



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica
Programa de Projeto de Estruturas

Rafael Costa da Hora

**AVALIAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE UMA PONTE SOB AÇÃO DE
MASSAS MÓVEIS**

Rio de Janeiro
2021



UFRJ

Rafael Costa da Hora

**AVALIAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE UMA PONTE SOB AÇÃO DE
MASSAS MÓVEIS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Orientadores:

Silvio de Souza Lima

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Rio de Janeiro

2021

Da Hora, Rafael

Avaliação Da Resposta Dinâmica De Uma Ponte Sob Ação De Massas Móveis / Rafael Costa da Hora – 2021.

188.: 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2021.

Orientadores: Silvio de Souza Lima e Sergio Hampshire de Carvalho Santos

1. Análise dinâmica, 2. Massas móveis, 3. Implementação computacional. I. Lima, Silvio de Souza e Santos, Sergio Hampshire de Carvalho II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola Politécnica. III. Avaliação Da Resposta Dinâmica De Uma Ponte Sob Ação De Massas Móveis.



UFRJ

AVALIAÇÃO DA RESPOSTA DINÂMICA DE UMA PONTE SOB AÇÃO DE MASSAS MÓVEIS

Rafael Costa da Hora

Orientadores:

Silvio de Souza Lima

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Aprovada pela Banca:

Prof. Silvio de Souza Lima, D. Sc., UFRJ

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc., UFRJ

Prof. Benjamin Ernani Diaz, Dr-Ing., UFRJ

Prof. Luiz Fernando Campos Ramos Martha, Ph.D., PUC-RJ

Julio Jerônimo Holtz Silva Filho, D.Sc., UFRJ

Rio de Janeiro

2021

A Andréa Maria Borges da Costa (*In memoriam*)

A Mayra Elida Almanza Adames (*In memoriam*)

AGRADECIMENTOS

A Deus. A minha família, pelas condições a mim concebidas. A Suely, por ser parte vital deste processo. A Julie, por ser exemplo de determinação. Ao professor Silvio de Souza Lima, pela confiança no convite ao desenvolvimento deste trabalho, pela ótima amizade e pelos valiosos ensinamentos e conversas que nunca se limitaram ao âmbito acadêmico. Ao professor Sergio Hampshire, pela paciência, excelência e amizade.

Progress in design of new structures seems to be unlimited.

- K. J. Bathe.

RESUMO

DA HORA, Rafael Costa. **Avaliação Da Resposta Dinâmica De Uma Ponte Sob Ação De Massas Móveis**. Rio de Janeiro. 2021. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2021.

O presente trabalho consiste no desenvolvimento do programa LOADYN, ferramenta computacional para análise dinâmica de estruturas apertadas capaz de realizar análise dinâmica em estruturas (pontes) submetidas à ação de massas móveis, análise modal, cálculo de velocidades críticas de passagem e análise estática linear. Durante a análise dinâmica de massas móveis, o acoplamento da matriz de massa dos veículos à matriz de massa da estrutura é feito através da atualização automática da matriz de massa global da estrutura a cada instante de integração, em função da posição dos veículos nos chamados elementos de contato. Conseqüentemente, as propriedades dinâmicas do sistema não se mantêm constantes ao longo do tempo, o que reflete de forma mais fidedigna o comportamento real. O histórico no tempo da resposta estrutural é gerado através do método de integração direta de Newmark. A solução numérica do problema generalizado de autovalor é obtida através do método de Jacobi, cuja implementação adaptada é capaz de lidar com modelos não restringidos. O *solver* implementado trabalha com sistemas esparsos e armazenados em forma de perfil (*skyline storage scheme*).

Palavras-chave: Análise dinâmica; Massa móvel; Implementação computacional; LOADYN.

ABSTRACT

DA HORA, Rafael Costa. **Dynamic Response Evaluation Of a Bridge Subjected To Moving Masses Effect**. Rio de Janeiro. 2021. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2021.

This work aims at the development of the LOADYN software, a computational tool built for structural dynamics of frame elements. The program can perform a dynamic analysis on structures (bridges) subjected to moving masses effect, modal analysis, critical travelling speed analysis and linear static analysis. During moving masses analysis, the coupling that occurs between the vehicle mass matrix and the global structure mass matrix is done by the structure mass matrix automatic updating at each integration time step according to the vehicle position within the so-called contact elements. Therefore, the dynamic properties of the system do not remain constant throughout time; thus, the real behavior is better simulated. The time history response is generated based on Newmark's direct integration method. The numerical solution for the generalized eigenproblem is obtained by applying Jacobi's method. The adapted implementation of this method is capable of dealing with non constrained models. The solver was designed to work with sparse systems stored as profile matrices known as Skyline Storage Scheme.

keywords: Dynamic analysis; Moving mass; Computational implementation; LOADYN.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Motivação	1
1.2. Conceitos de interação veículo-estrutura (VBI)	2
1.3. O modelo estrutural	6
1.4. Múltiplas cargas móveis	7
1.5. Revisão bibliográfica	8
1.6. Objetivos	10
1.7. Organização do trabalho	10
2. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	13
2.1. Revisão fundamental da dinâmica das estruturas	13
2.1.1. Sistemas de um grau de liberdade	13
2.1.2. Excitação harmônica	15
2.1.3. Sistemas de múltiplos graus de liberdade	18
2.1.4. Frequências e modos naturais de vibração	19
2.2. Vibração de sistemas contínuos	21
2.2.1. Viga simplesmente apoiada sujeita à carga móvel única	21
2.2.2. Fator de impacto	24
2.2.3. Múltiplas cargas móveis, ressonância e cancelamento	28
2.3. Modelagem da interação dinâmica através de forças de contato	33
2.4. Montagem das matrizes do sistema	37
3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	40
3.1. Conceitos elementares	40
3.1.1. O modelo matemático	40
3.1.2. O modelo discreto	40
3.2. Definição e montagem do modelo computacional	41
3.2.1. Matriz de rigidez do elemento	42
3.2.2. Matriz de massa do elemento	44
3.2.3. Matriz de massa dos elementos de contato e atualização global	45
3.2.4. Montagem do sistema global de equações	46
3.3. O solver	47
3.3.1. Solução do sistema de equações algébricas lineares	47
3.3.2. O método de Newmark	49
3.3.3. Obtenção das velocidades críticas	53
3.3.4. Resolução do problema generalizado de autovalor	53

3.4. Aspectos computacionais	55
4. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA LOADYN	58
4.1. Validação do método de Newmark	58
4.2. Validação para o problema da carga móvel única	63
4.3. Validação para o problema da massa móvel única	68
4.4. Validação para o problema de múltiplas massas móveis	75
4.4.1. Ressonância	79
4.5. Validação para o problema numérico de autovalor generalizado	80
5. APLICAÇÃO DO PROGRAMA LOADYN	86
5.1. Estudo de caso	86
5.1.1. Modelo estrutural	86
5.1.2. Análise modal	88
5.1.3. Análise de massas móveis	92
5.1.4. Análise de cargas móveis	95
5.1.5. Influência da massa do veículo na resposta estrutural	98
5.1.6. Determinação das velocidades críticas	99
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
6.1. Conclusões	102
6.2. Sugestões e aprimoramentos futuros	104
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
8. ANEXO A – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA VIGA SOB CARGA MÓVEL AMORTECIDA	108
9. ANEXO B – ARQUIVOS DO MODELO USADO NA VALIDAÇÃO DO PROGRAMA	112
10. ANEXO C – ARQUIVOS DO MODELO USADO NO ESTUDO DE CASO	119
11. ANEXO D – GUIA DO USUÁRIO – PROGRAMA LOADYN	127

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 – Modelo simplificado da carga móvel.....	4
Figura 1.2 – Modelo da massa móvel.....	5
Figura 1.3 - Modelo da massa suspensa, (YANG, YAU e WU, 2004).....	6
Figura 1.4 – Cargas pontuais em série.....	7
Figura 1.5 - Modelo de carga móvel, (YANG, YAU e WU, 2004).....	8
Figura 2.1 – Representação de um sistema de um grau de liberdade, (LIMA e SANTOS, 2008).....	13
Figura 2.2 – Resposta de um SGL amortecido em vibração livre amortecida.....	15
Figura 2.3 – Respostas de um sistema amortecido sob excitação harmônica $x(t) \times t$	17
Figura 2.4 – Fator de amplificação dinâmica $A_D(r) \times r$	17
Figura 2.5 – Shear building, (CHOPRA), Adaptado.....	18
Figura 2.6 – Viga sob carga móvel.....	21
Figura 2.7 – Deslocamento central da viga.....	23
Figura 2.8 – Deslocamento central não amortecido da viga para $S=0,1$	24
Figura 2.9 – Fator de impacto para deslocamento do ponto central, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004).....	26
Figura 2.10 – Fator de impacto para momento fletor do ponto central, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004).....	27
Figura 2.11 – Fator de impacto para o esforço cortante da extremidade direita, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004).....	27
Figura 2.12 – Passagem de múltiplas cargas móveis.....	30
Figura 2.13 – $S_1 \times L/d \times I_u$	32
Figura 2.14 – Curvas de nível de $S_1 \times L/d \times I_u$	32
Figura 2.15 – Elementos de contato da estrutura, adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004).....	37
Figura 2.16 – Amortecimento de Rayleigh.....	39
Figura 3.1 – Processo típico de um programa de computador para análise estrutural, adaptado de (FELIPPA, 2004).....	42
Figura 3.2 – Matriz de rigidez para um elemento de pórtico espacial, (PRZEMIENIECKI, 1968).....	43
Figura 3.3 – Matriz de massa para um elemento de pórtico espacial, (PRZEMIENIECKI, 1968).....	44
Figura 3.4 – Elemento de massa concentrada.....	45
Figura 3.5 – Armazenamento em perfil de uma matriz com semi-largura de banda variável, (BATHE, 1996).....	46
Figura 3.6 – Convergência do método de Newmark.....	51
Figura 3.7 – Diagrama simplificado da solução do problema das massas móveis.....	52
Figura 3.8 – Tempo de solução e armazenamento para matrizes cheias, adaptado de (FELIPPA, 2004).....	56
Figura 3.9 – Tempo de solução e armazenamento para matrizes esparsas para $B = N$, adaptado de (FELIPPA, 2004).....	57
Figura 4.1 – Modelo de pórtico utilizado para comparação das soluções.....	58
Figura 4.2 – Comparação para carga harmônica sem amortecimento.....	59
Figura 4.3 – Comparação para carga harmônica com amortecimento.....	60
Figura 4.4 – Comparação para carga impulsiva sem amortecimento.....	61
Figura 4.5 – Comparação para carga impulsiva com amortecimento.....	62
Figura 4.6 – Deslocamento vertical analítico e numérico para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos.....	63

Figura 4.7 – Velocidade vertical analítica e numérica para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	64
Figura 4.8 – Aceleração vertical analítica e numérica para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	65
Figura 4.9 – Momento fletor analítico e numérico para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	66
Figura 4.10 – Esforço cortante analítico e numérico para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	67
Figura 4.11 – Deslocamento vertical analítico e numérico com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	68
Figura 4.12 – Velocidade vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	69
Figura 4.13 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos	70
Figura 4.14 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais sem contribuição de modos superiores	71
Figura 4.15 – Comparação dos deslocamentos verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente	72
Figura 4.16 – Comparação das velocidades verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente	73
Figura 4.17 – Comparação das acelerações verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente	74
Figura 4.18 – Deslocamento vertical analítico e numérico com efeitos inerciais para duas massas móveis	75
Figura 4.19 – Velocidade vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para duas massas móveis	76
Figura 4.20 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para duas massas móveis	77
Figura 4.21 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais sem contribuição de modos superiores	78
Figura 4.22 – Resposta ressonante para os deslocamentos verticais do nó central para viga simplesmente apoiada discretizada em 20 elementos	79
Figura 4.23 – Modo 1, frequências naturais - $f=5.11\text{ Hz}$ e $f=5.10\text{ Hz}$, respectivamente	80
Figura 4.24 – Modo 2, frequências naturais - $f=20.4\text{ Hz}$ e $f=20.3\text{ Hz}$, respectivamente	81
Figura 4.25 – Modo 3, frequências naturais - $f=41.4\text{ Hz}$ e $f=41.4\text{ Hz}$, respectivamente	82
Figura 4.26 – Modo 4, frequências naturais - $f=46.01\text{ Hz}$ e $f=45.2\text{ Hz}$, respectivamente	83
Figura 4.27 – Modo 5, frequências naturais - $f=81.8\text{ Hz}$ e $f=79.4\text{ Hz}$, respectivamente	84
Figura 4.28 – Comparação das frequências naturais obtidas pelos programas	85
Figura 5.1 – Esquema do modelo estrutural	86
Figura 5.2 – Seções transversais dos elementos estruturais	87
Figura 5.3 – Propriedades mecânicas e geométricas do modelo	88
Figura 5.4 – Modelo estrutural	88
Figura 5.5 – Parâmetros para análise modal	89
Figura 5.6 – Primeiro e segundo modos de vibração	90
Figura 5.7 – Terceiro e quarto modos de vibração	91
Figura 5.8 – Seção do relatório modal	92
Figura 5.9 – Parâmetros de entrada para análise de massa móvel	92
Figura 5.10 – Histórico no tempo dos deslocamentos (m)	93
Figura 5.11 – Histórico no tempo das velocidades (m/s)	93
Figura 5.12 – Histórico no tempo das acelerações (m/s ²)	94

Figura 5.13 – Histórico no tempo das rotações (rad)	94
Figura 5.14 – Histórico no tempo dos momentos fletores (kN.m)	95
Figura 5.15 – Histórico no tempo dos deslocamentos (m)	96
Figura 5.16 – Histórico no tempo das velocidades (m/s)	96
Figura 5.17 – Histórico no tempo das acelerações (m/s ²)	97
Figura 5.18 – Histórico no tempo das rotações (rad)	97
Figura 5.19 – Histórico no tempo dos momentos fletores (kN.m)	98
Figura 5.20 – Histórico no tempo dos deslocamentos para cargas móveis (m)	98
Figura 5.21 – Histórico no tempo dos deslocamentos para massas móveis (m)	99
Figura 5.22 – Velocidades críticas para cargas móveis	100
Figura 5.23 – Velocidades críticas para massas móveis	100

1. INTRODUÇÃO

1.1. *Motivação*

A engenharia, mesmo que de forma espontânea, está presente na humanidade desde os primórdios da civilização. Tem como finalidade facilitar, melhorar e desenvolver a vida em sociedade através da resolução de problemas independentemente da tipificação dos mesmos. Como ciência exata, a engenharia teve sua origem em âmbito militar; e de forma gradual, se expandiu às outras esferas sociais. Entende-se então o termo engenharia civil.

O contínuo e exponencial crescimento tecnológico, concomitante às necessidades humanas, guia as ciências naturais na busca e desenvolvimento de novos meios para um fim. A adoção das novas tecnologias e ferramentas permite que desafios e problemas com maior escala de magnitude e complexidade sejam possíveis e solucionados. No entanto, tal fato traz consigo maiores responsabilidades e exige também um aumento na capacidade crítica de análise em todos seus aspectos.

O transporte é uma necessidade inerente à evolução da espécie humana, graças a ele civilizações e expansões territoriais se tornaram realidade. A mudança de estilo de vida nômade para o sedentarismo foi a mãe das razões pela qual se fez extremamente necessária a evolução de um sistema de transporte à época. Como um marco de referência, a roda deu origem ao desenvolvimento significativo dos meios de transporte. Tempos à frente, destaca-se a invenção do transporte aquaviário, o qual permitiu a expansão marítima e conseqüentemente o descobrimento de novas terras. Foi na primeira revolução industrial que os meios de transporte foram capazes de atingir um novo patamar com a criação do motor a vapor, dando origem à primeira locomotiva pelo inglês George Stephenson. Pouco depois, em 1886, o alemão Carl Benz seria responsável pela criação do primeiro carro, também com motor a vapor. Menciona-se também outra passagem histórica a qual representa a revolução e origem do transporte aéreo, o voo de Alberto Santos Dumont em território francês a bordo de sua invenção o 14-Bis. Este feito abriu portas para inovações nos transportes aéreo e espacial, dando origem, mais tarde, à chamada corrida espacial entre a antiga União Soviética e os Estados Unidos em tempos de Guerra Fria.

Nos dias de hoje, a existência de trens de alta velocidade para transporte humano, por exemplo, requer um nível mais avançado de segurança, não apenas do veículo em si, mas também da estrutura que o suporta. Tal necessidade se faz presente principalmente em pontes, tendo em vista a complexidade estrutural e a natureza dinâmica dos carregamentos atuantes. Conseqüentemente, torna-se necessária uma análise mais avançada e sofisticada das estruturas em questão. Na NBR 7187 (ABNT, 2021), referente a projeto de pontes, o efeito dinâmico é levado em consideração através de um coeficiente de impacto ou fator de amplificação dinâmica para a majoração dos efeitos estáticos. Esta abordagem do problema leva a resultados favoráveis à segurança. Uma análise mais específica do problema deve tomar em conta a interação veículo-estrutura (LIMA, SORIANO e REIS, 2002).

A norma brasileira preconiza as seguintes equações para obtenção do coeficiente de impacto φ para pontes rodoviárias e ferroviárias, respectivamente.

$$\varphi = 1,4 - 0,007 \cdot L \quad (1.1)$$

$$\varphi = 0,001(1600 - 60\sqrt{L} + 2,225 \cdot L) \quad (1.2)$$

Observa-se nas expressões anteriores que os coeficientes de impacto são funções apenas do comprimento L do vão. Não levam em consideração outros fatores influentes como o sistema estrutural, características dinâmicas do sistema como frequências e modos naturais de vibração; amortecimento, velocidade e massa do veículo. Em casos específicos, como em pontes para trens de alta velocidade, não se pode apenas considerar esforços de natureza dinâmica como a simples variação de posição de cargas estáticas pontuais ou distribuídas ao longo da estrutura. Ao fazê-lo, negligenciam-se as forças de inércia causadas pelas vibrações das massas do veículo e da estrutura. Com o aumento da velocidade dos veículos junto com o aumento da relação massa do veículo / massa da ponte, aquelas forças podem atingir valores não mais desprezíveis.

1.2. Conceitos de interação veículo-estrutura (VBI)

Sabe-se que a primeira operação comercial de trens de alta velocidade ocorreu em 1964 a uma velocidade de 210 *km/h* em trilhos japoneses que conectavam as cidades de Tokyo e Osaka, o que marcou o início de uma nova era da engenharia sobre trilhos (YANG, YAU e WU, 2004). Alguns dos problemas de origem dinâmica encontrados em pontes

destinadas a veículos de alta velocidade são o impacto e vibração causados pela passagem dos trens. Estes diferem dos problemas encontrados em pontes rodoviárias convencionais pelas seguintes razões. Primeiro, as cargas dinâmicas induzidas pela passagem de um trem são de natureza repetitiva e caracterizadas pela forma sequencial das cargas das rodas e distância entre eixos, o que implica na imposição de determinadas frequências excitadoras à estrutura durante sua passagem. Por outro lado, as cargas impostas por tráfego rodoviário são de natureza randômica ou arbitrária ao se levar em consideração a carga das rodas e a distância entre eixos dos veículos (YANG, YAU e WU, 2004). Segundo, trens de alta velocidade possuem grandes comprimentos e se movem a elevadas velocidades de até 600 *km/h*, o que possibilita que as frequências externas geradas pela passagem do veículo se aproximem das frequências naturais da estrutura, resultando no fenômeno de ressonância. Uma vez atingida a ressonância, a resposta da estrutura é amplificada continuamente à medida que mais cargas solicitam a estrutura de forma dinâmica ao passar sobre a mesma. Terceiro, a razão entre a massa do veículo e a da estrutura que suporta a estrada de ferro de um trem de alta velocidade é relativamente alta, o que faz com que a interação veículo-estrutura seja mais evidente e relevante em comparação às pontes rodoviárias.

O problema de interação veículo-estrutura não é tratado de forma direta, tendo em vista a existência de dois subsistemas dinâmicos; o veículo em movimento e a ponte. A interação entre os dois sistemas se dá através de forças de contato; o que em essência, expressa um problema tempo-dependente acoplado dinâmico (já que as magnitudes das forças de contato não permanecem constantes devido ao movimento dos sistemas.). Essa interação ocorre primeiramente através das frequências naturais dos dois sistemas e da frequência de passagem do veículo em movimento (YANG, YAU e WU, 2004). Pode-se dividir a abordagem da interação veículo-estrutura em duas partes, o problema de cargas móveis e a interação das mesmas com a estrutura. Tais abordagens se diferem também pelo fato de que a primeira pode ser resolvida de forma analítica e possui solução fechada possível, enquanto que a segunda requer solução numérica.

O termo Interação Veículo-Estrutura (VBI), neste trabalho, refere-se à interação entre estes dois subsistemas, como mencionado. Considera-se o veículo em termos gerais, podendo ser um carro, um trem de carga, um trem de alta velocidade, um veículo de levitação magnética (Maglev) e etc. Analogamente, a estrutura a ser considerada também pode ser entendida de forma general, podendo ser representada por uma viga simplesmente apoiada, uma viga contínua, outro tipo de ponte e etc. A VBI se faz necessária quando se tem interesse

em analisar a resposta do veículo em movimento em adição á resposta da estrutura. Por exemplo, acelerações máximas verticais e horizontais dos vagões de trens de alta velocidade são analisadas quando se trata de avaliar conforto de passageiros. A força máxima de contato lateral é outro exemplo de interesse de análise quando se quer obter informação a respeito do risco de descarrilamento, com atenção especial em casos de abalos sísmicos.

Como mencionado anteriormente, quando a relação entra a massa do veículo e da estrutura é pequena, ou a velocidade do veículo é baixa, desprezam-se os efeitos de inércia e efeitos elásticos gerados pelo veículo em movimento devido à oscilação da estrutura. Ou seja, considera-se apenas a estrutura como um sistema dinâmico e simplifica-se a existência do corpo em movimento através de uma carga pontual. Tal simplificação é conhecida como modelo da carga móvel, Figura 1.1.

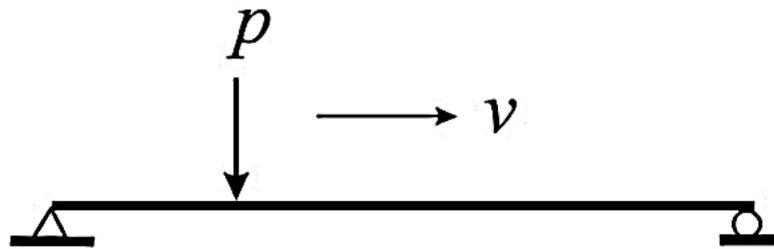


Figura 1.1 – Modelo simplificado da carga móvel

Modelos simplificados a apenas um sistema dinâmico como o apresentado na Figura 1.1 são comumente usados somente para a análise da resposta de uma estrutura, como, por exemplo de uma ponte. A equação 1.3 apresenta o modelo matemático analítico de Euler-Bernoulli que descreve o problema simplificado da carga móvel para uma viga isostática simplesmente apoiada.

$$m_b(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (1.3)$$

Onde m_b é massa linear, c o coeficiente de amortecimento viscoso, EI a rigidez flexional da viga, $f(x,t)$ e $w(x,t)$ a força por unidade de comprimento e a deflexão na coordenada x e instante t , respectivamente (CEPEDA e CASTILLO, 2005). No caso de vigas prismáticas, com amortecimento e massa linear constantes, a equação diferencial parcial 1.3 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$m_b \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (1.4)$$

Assim, torna-se possível a obtenção de soluções analíticas para cada um dos i -ésimos modos de vibração ϕ_i , frequências circulares ω_i e massas modais M_i expressas da seguinte forma (CEPEDA e CASTILLO, 2005):

$$\phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (1.5)$$

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_b}} \quad (1.6)$$

$$M_i = m_b \int_L \phi_i^2(x) dx \quad (1.7)$$

Onde L representa o domínio linear do problema, correspondente ao comprimento total da viga.

Quando os efeitos inerciais causados pelo veículo na estrutura não podem ser negligenciados, adota-se o modelo da massa móvel. Este novo modelo consiste na representação dos veículos em movimento através de massas que se deslocam com uma determinada velocidade ao longo da estrutura como representado na Figura 1.2.

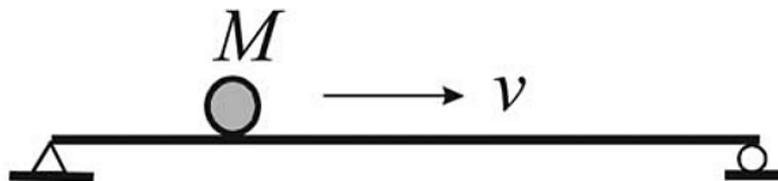


Figura 1.2 – Modelo da massa móvel

Analogamente ao modelo da carga móvel, para o caso simplificado de uma única massa móvel deslocando-se ao longo de uma viga simplesmente apoiada, a solução analítica

pode ser obtida. Pode-se dizer que existe um custo quando se opta por simplificações dos modelos físicos visando simplificações matemáticas no modelo de cálculo. Neste caso, o custo se traduz em uma não consideração dos efeitos inerciais do deslocamento vertical relativo do veículo em relação à estrutura. Quando tais forças são de interesse de análise (geralmente para o estado de serviço e conforto do usuário), considera-se o veículo como um sistema dinâmico constituído por uma mola com rigidez k_v , uma massa M_v e um amortecedor viscoso com amortecimento c_v , chamado de modelo de massa suspensa, Figura 1.3. Esses efeitos tornam-se de extremo interesse quando existem irregularidades significativas nos trilhos (essas podem ser representadas por funções matemáticas durante a análise) (YANG, YAU e WU, 2004).

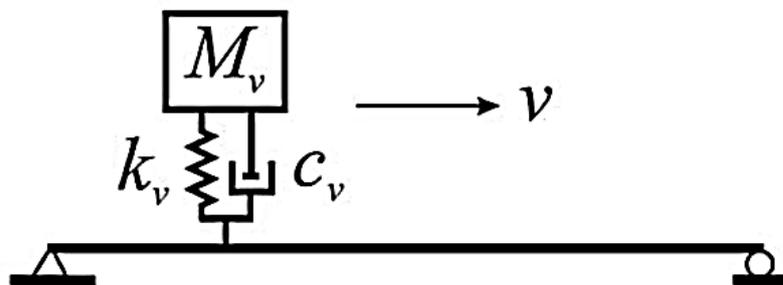


Figura 1.3 - Modelo da massa suspensa, (YANG, YAU e WU, 2004)

Percebeu-se que não há diferença em termos de deslocamentos estruturais entre o modelo da massa móvel e o modelo da massa suspensa. Notou-se também que para valores pequenos de rigidez k_v da mola o modelo de massa suspensa é praticamente equivalente ao modelo da carga móvel (PESTEREV, 2003).

1.3. O modelo estrutural

A viga simplesmente apoiada é a estrutura mais utilizada em estudos analíticos de vibração induzida por veículos. O elevado poder computacional a que se tem acesso nos dias de hoje permite a elaboração de modelos estruturais quase sem restrições, ao se levar em consideração a possibilidade de se representar estruturas por elementos finitos de diversos tipos. Ainda assim, modelos simplificados ajudam na identificação de parâmetros dominantes na resposta dinâmica da estrutura (YANG, YAU e WU, 2004).

Como mencionado anteriormente, a consideração das irregularidades do pavimento ou do trilho é de extrema importância quando se trata de análise de conforto de passageiros na utilização do veículo. O perfil da irregularidade é tridimensional e pode ser simplificado a um perfil bidimensional para fins de análise; o mesmo depende de fatores construtivos e de manutenção. Porém, apesar da natureza aleatória, as irregularidades possuem frequências inerentes e podem ser modeladas como um processo gaussiano estacionário e geradas utilizando-se funções de densidade espectral (GUPTA, 1980). Geralmente, visando o conforto do usuário, o dimensionamento deste tipo de estrutura é regido por critérios de serviço (aceleração lateral e vertical máximas do veículo).

Este trabalho se restringirá à análise da resposta dinâmica da estrutura.

1.4. *Múltiplas cargas móveis*

Até o momento foram discutidos modelos constituídos por apenas uma carga ou massa pontual como representação do veículo. Por outro lado, existem estudos que visam avaliar a resposta dinâmica de estruturas sob influência de uma sequência finita e infinita de cargas móveis com intervalos regulares entre si, simulando o efeito da passagem de composições ferroviárias, (BOLOTIN, 1964). Este estudou o comportamento de uma viga sujeita a um carregamento móvel infinito de cargas iguais e com espaçamento d entre elas e velocidade v , e identificou o período d/v do carregamento como um parâmetro chave. FR`YBA (1972) conclui que a resposta da estrutura sob vibração forçada atingirá seu máximo quando o intervalo de tempo entre cargas consecutivas for igual a períodos de vibração da própria estrutura em vibração livre ou algum inteiro múltiplo. Ressalta-se a influência direta da velocidade do veículo e da distância entre eixos (rodas como ponto de contato). A Figura 1.4 a seguir ilustra o mencionado.

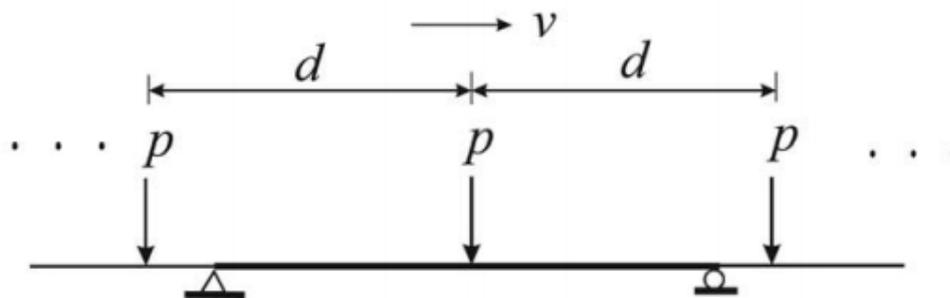


Figura 1.4 – Cargas pontuais em série

O efeito de apoios elásticos e do lastro na resposta dinâmica de pontes ferroviárias foi estudado por YAU (1996). A utilização de suportes elásticos nos apoios das vigas com o propósito de isolar a estrutura na presença de carga sísmica pode adversamente, amplificar o efeito dinâmico da viga quando submetida a cargas móveis. Já a presença do lastro e dos dormentes (considerados como elásticos no modelo de massa suspensa) pode resultar em um menor deslocamento máximo, assim como uma menor aceleração máxima da estrutura quando comparados aos obtidos pelo modelo que leva em consideração apenas as cargas móveis.

Uma solução analítica foi desenvolvida para a resposta dinâmica de uma viga simplesmente apoiada e submetida à passagem de trem, modelado por cargas móveis com intervalos não uniformes e regulares. Com isso, foi possível identificar condições necessárias para a ocorrência do fenômeno de ressonância e cancelamento.

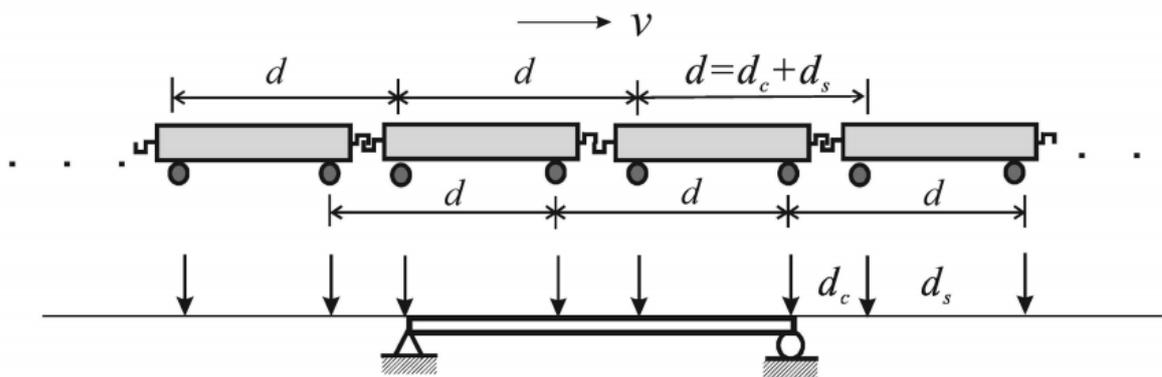


Figura 1.5 - Modelo de carga móvel, (YANG, YAU e WU, 2004)

1.5. Revisão bibliográfica

Pesquisas e estudos científicos no campo da dinâmica de pontes ferroviárias produziram medidas que têm sido incorporadas em normas técnicas de projetos e análises de pontes.

Esta área da dinâmica estrutural é estudada ao longo da história e ao redor do mundo. Seja dito de passagem, que o problema do movimento de veículos ao longo de pontes foi o segundo problema o qual a dinâmica estrutural teve como objetivo de estudo (FRYBA, 1996). Durante a construção dos primeiros trilhos na Inglaterra na primeira metade do século

XIX, surgiu o problema em questão, quando os engenheiros se dividiram em dois grupos. Um acreditava que a passagem da locomotiva ao longo da ponte causaria um impacto, enquanto o outro acreditava que a estrutura não teria tempo suficiente para responder dinamicamente durante a passagem do veículo.

Sendo assim, isso deu origem aos primeiros experimentos por WILLIS (1849) e aos primeiros estudos teóricos por STOKES (1849), que acreditava que o efeito da passagem de um veículo sobre uma ponte deveria estar em algum lugar entre as opiniões dos dois grupos mencionados.

Entre os pioneiros desse tema, algumas menções devem ser feitas. Como a ZIMMERMANN (1896) por um dos primeiros estudos de uma viga submetida a uma carga móvel; e, especialmente a TIMOSHENKO (1955), que resolveu os dois problemas fundamentais do movimento: o de uma força constante, e o de uma força harmonicamente variável ao longo de uma viga.

No período entre guerras mundiais uma atenção especial foi dada ao estudo da dinâmica de pontes na antiga União Soviética (URSS) e na Grã-Bretanha. Neste período, torna-se de vital importância mencionar o trabalho de INGLIS (1934), que explicou teórica e experimentalmente o efeito da passagem de locomotivas a vapor na vibração de pontes ferroviárias. Sua pesquisa teve influência decisiva nos subsequentes desenvolvimentos da área.

Na antiga Tchecoslováquia, KOLOUSEK (1973) encontrou solução para os efeitos da passagem de uma locomotiva a vapor sobre estruturas estaticamente indeterminadas e sobre arcos.

Na antiga URSS existiam, pelo menos, três escolas que estudavam essa vertente da dinâmica estrutural de maneira teórica e experimental. De forma semelhante, nos Estados Unidos da América (USA), o estudo da dinâmica de pontes tem sido alvo de estudo em diversas universidades como, *Northwestern University, University of Illinois, Massachusetts Institute of Technology, Stanford University* e *Michigan State University*.

Mais recentemente, com o grande avanço computacional e o desenvolvimento de métodos numéricos, tornou-se possível a elaboração e análise de modelos estruturais antes impensáveis. Este tipo de metodologia é explicado de forma didática por YANG, YAU e WU (2004), que abordam a interação entre dois sistemas dinâmicos, o problema da carga móvel múltipla, vigas curvas sob ações dinâmicas, massas móveis, entre outros. Isto é, problemas de soluções impossíveis sem o advento do computador.

1.6. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento do programa LOADYN, programa de computador para análise dinâmica de pontes sob ação de massas móveis. Como mencionado, é comum a consideração de esforços dinâmicos como majorações estáticas em estruturas. Essas, não levam em consideração propriedades dinâmicas na análise, negligenciando a relevância da análise dinâmica. Um entendimento real da dinâmica de pontes leva não somente a uma economia em termos de projeto, como também a uma utilização racional da estrutura em seu estado de serviço.

Diferentemente de uma análise através das linhas de influência, que é um método estático, a análise realizada pelo programa em questão é de caráter dinâmico, ou seja, leva em consideração as forças de inércia e amortecimento geradas pelas acelerações e velocidades das massas móveis e pela própria estrutura.

O *software* possui interface gráfica e foi programado em linguagem Object Pascal, uma nova versão (constantemente atualizada) do antigo Turbo Pascal, que permite programação orientada a objetos. A entrada da geometria para o pré-processamento é feita através de arquivo de texto. A visualização dos dados do pós-processamento é feita de forma gráfica e através de arquivo de texto. A metodologia adotada baseia-se no Método dos Elementos Finitos (Método da Rigidez Direta) e realiza análise dinâmica de pórticos espaciais. Para a resolução numérica da equação diferencial do equilíbrio dinâmico e obtenção do histórico no tempo, optou-se pela implementação do método de integração direta de Newmark, tendo em vista a impossibilidade do uso de um método modal para solução desse tipo de problema devido à variação da matriz de massa da estrutura a cada instante de tempo. Implementou-se um algoritmo numérico para resolução do problema de autovalor generalizado, para extração das propriedades dinâmicas da estrutura como modos de vibração e frequências naturais.

1.7. Organização do trabalho

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento de um programa de computador capaz de realizar análise dinâmica de pontes sob ação de massas móveis, determinar velocidades críticas de passagem, análise modal e estática linear de pórticos espaciais. Para a análise de

massas móveis, o programa se baseia no método numérico de integração direta de Newmark (NEWMARK e CHAN, 1952), sendo capaz de simular com precisão satisfatória o comportamento dinâmico do modelo.

O primeiro capítulo introduz o problema principal e aborda diferentes tipos de idealizações do mesmo, seja o modelo da carga móvel, massa móvel ou massa suspensa. Utiliza como base uma viga simplesmente apoiada cujo modelo matemático, para o equilíbrio dinâmico sob carga móvel, possui solução analítica. Também introduz o conceito e ressalta a importância da interação veículo estrutura para análise dinâmica de pontes ferroviárias sujeitas à passagem de múltiplas cargas.

O segundo capítulo consiste no entendimento do problema do ponto de vista da dinâmica estrutural. Aborda não apenas conceitos básicos do tema, como também sua resolução numérica, por integração direta, através de forças de contato. Esta abordagem limita a complexidade do modelo estrutura-veículo a ser utilizado ao poder computacional disponível. Além disso, descreve o processo de atualização da matriz de massa global do sistema a cada intervalo de integração.

O terceiro capítulo aborda os aspectos computacionais envolvidos no processo de formulação matemática e resolução numérica dos problemas existentes. É implementado o método de Cholesky, adaptado para resolução de sistemas de equações algébricas lineares armazenadas em perfil (LIMA, 2017). Este método mostra-se vantajoso ao lidar com sistemas esparsos armazenados em perfil, sendo capaz de reduzir não somente o tempo de processamento necessário para sua resolução, mas também a quantidade de memória utilizada para seu armazenamento. Mostra-se também o método implementado para a resolução do problema de autovalor generalizado (BATHE, 1996).

O quarto capítulo consiste na validação do programa LOADYN. Inicia-se a validação do programa comparando a solução obtida para o histórico no tempo dos deslocamentos de um pórtico espacial com as soluções obtidas por pacotes comerciais de Elementos Finitos. Na etapa seguinte, utiliza-se um modelo estrutural de uma viga simplesmente apoiada, cuja solução analítica é existente na maioria dos casos, para comparar a solução numérica obtida com a analítica para os problemas de carga e massa móvel. Por fim, faz-se uso do programa SALT para a validação da análise modal.

O quinto capítulo apresenta formalmente o programa LOADYN através de um estudo de caso. Efetua-se uma análise completa do modelo estrutural de uma ponte, começando pela obtenção dos modos e frequências naturais fisicamente relevantes da estrutura. Em seguida

são feitas comparações para as soluções obtidas para o modelo de carga e massa móvel. Também se realiza uma análise de velocidades críticas de passagem para cargas e massas móveis e comparam-se os resultados.

O sexto capítulo apresenta as conclusões a respeito do estudo e sugere possíveis aprimoramentos e continuidade do desenvolvimento apresentado.

2. DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

2.1. Revisão fundamental da dinâmica das estruturas

Para um melhor entendimento dos temas abordados no presente capítulo desse trabalho, recomenda-se que o leitor esteja familiarizado com alguns tópicos da engenharia como: estática, álgebra linear, cálculo diferencial e análise matricial.

A dinâmica das estruturas tem como objetivo a determinação de deslocamentos, velocidades e acelerações dos elementos que formam uma estrutura submetida a cargas dinâmicas (LIMA e SANTOS, 2008). Um carregamento estático pode ser considerado como um caso particular da dinâmica.

2.1.1. Sistemas de um grau de liberdade

É de fundamental importância o entendimento do comportamento de sistemas de um grau de liberdade (SGL). Estes fazem parte e facilitam o estudo de sistemas dinâmicos mais complexos. Seja um SGL conforme apresentado na Figura 2.1.

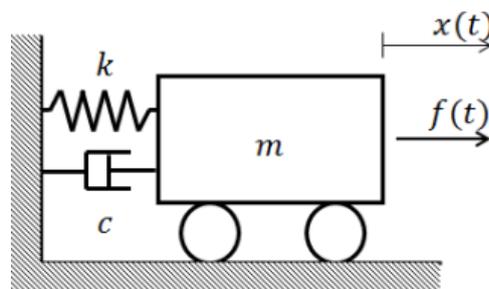


Figura 2.1 – Representação de um sistema de um grau de liberdade, (LIMA e SANTOS, 2008)

A massa m representa a inércia do sistema, a rigidez k da mola representa as propriedades elásticas do mesmo, o fator de amortecimento c do amortecedor representa a dissipação de energia, $f(t)$ é a força externa aplicada e $x(t)$ é o deslocamento do sistema. Seja o modelo matemático que rege o comportamento de um SGL representado pela equação diferencial do movimento a seguir.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.1)$$

O ponto sobrescrito representa derivada em relação ao tempo. A dedução da solução analítica para esta equação diferencial é amplamente conhecida e está disponível na literatura. Impondo-se as condições iniciais necessárias para o movimento do sistema e considerando a equação diferencial homogênea ($f(t)=0$, vibração livre amortecida), obtém-se a solução geral que possui a seguinte forma analítica (LIMA e SANTOS, 2008).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right] \quad (2.2)$$

Onde a frequência circular do sistema, amortecimento crítico, fator de amortecimento e frequência circular amortecida são definidos, respectivamente, por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (2.4)$$

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.5)$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.6)$$

Ao se impor como condições iniciais do movimento de um SGL qualquer, $x_0 = 1$; $\dot{x}_0 = 0$, obtém-se uma resposta gráfica em termos do deslocamento do sistema com a seguinte forma (Figura 2.2).

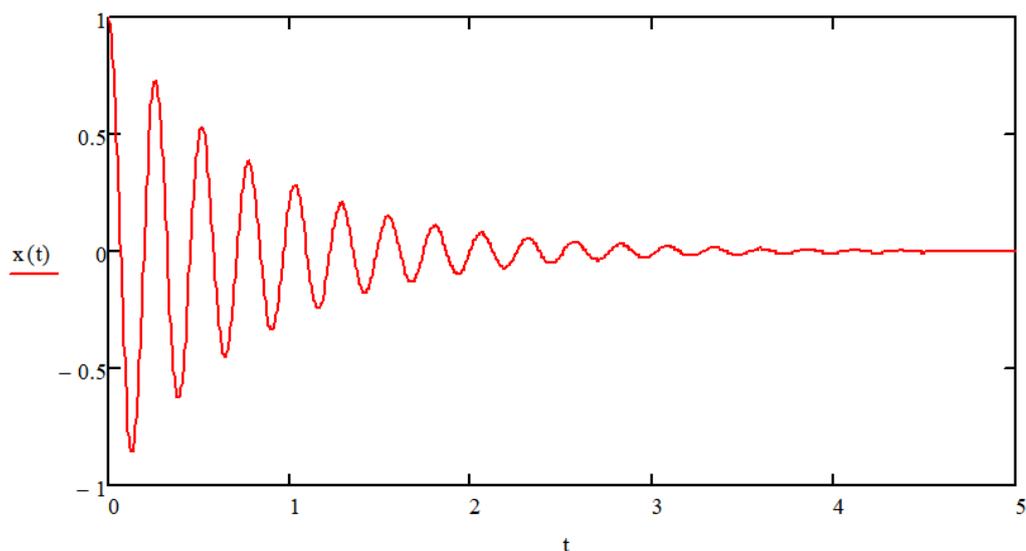


Figura 2.2 – Resposta de um SGL amortecido em vibração livre amortecida

A massa m pode ter deslocamentos na direção da coordenada x , que por sua vez define de forma completa a posição da massa em qualquer instante de tempo t . Sendo assim, para definir a posição exata de m faz-se necessária apenas uma coordenada. Trata-se então de um sistema com um grau de liberdade (LIMA e SANTOS, 2008). Entende-se como número de graus de liberdade o número de coordenadas independentes necessárias à definição exata das posições de todas as massas de um sistema para qualquer instante t .

2.1.2. *Excitação harmônica*

Forças harmônicas são aquelas que podem ser expressas em termos de seno ou cosseno. O entendimento de suas aplicações na análise dinâmica é de vital importância já que, por exemplo, uma força periódica arbitrária no tempo pode ser reescrita como série de funções harmônicas. A equação diferencial do movimento correspondente pode ser escrita da seguinte forma.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

Sabe-se que a solução geral é obtida pela soma da solução complementar (termo à esquerda da equação 2.12) com a solução particular (termo à direita). A solução

complementar equivale à solução do sistema em vibração livre amortecida, como visto anteriormente, na forma:

$$x_c(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] \quad (2.8)$$

A solução particular assume a forma:

$$x_p(t) = S_1 \cos(\omega t) + S_2 \sin(\omega t) \quad (2.9)$$

Ao se substituir a equação (2.9) com suas respectivas derivadas na equação (2.7), obtém-se os valores dos coeficientes S_1 e S_2 .

$$S_1 = \frac{(1 - r^2)F_0}{k[(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2]} \quad (2.10)$$

$$S_2 = \frac{2\xi r F_0}{k[(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2]} \quad (2.11)$$

Onde r representa a razão entre a frequência excitadora e a frequência circular do sistema ($r = \omega/\omega_n$). Determinam-se as constantes A e B da equação (2.8) a partir das condições iniciais do movimento. Segundo LIMA e SANTOS (2008), através de transformações trigonométricas, pode-se escrever a solução geral como:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] + \frac{F_0}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (2.12)$$

Onde ϕ é chamado de ângulo de fase. A equação (2.12) recebe o nome de resposta total e é composta pela soma das respostas transiente e permanente, as quais, respectivamente, correspondem às soluções complementar e particular. A Figura 2.3 representa de forma gráfica a solução geral para um sistema dinâmico genérico qualquer a fim de facilitar o entendimento da mesma.

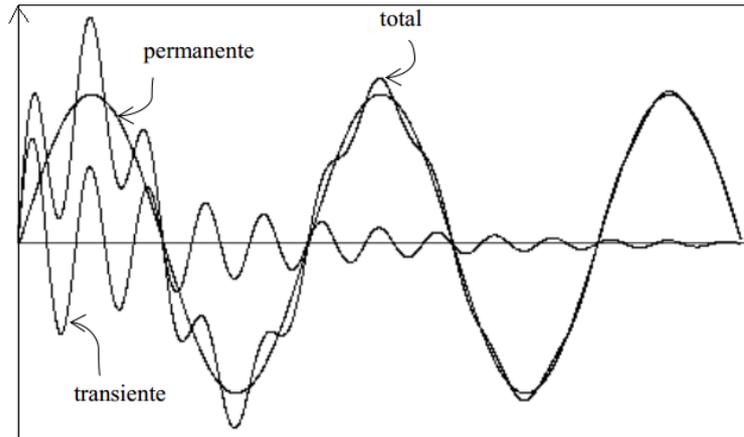


Figura 2.3 – Respostas de um sistema amortecido sob excitação harmônica $x(t)$ x t

A razão entre a amplitude da resposta permanente e a deformação estática do sistema ($x_{est} = F_0/k$) recebe o nome de *fator de amplificação dinâmica* (A_D).

$$A_D = \frac{1}{k\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.13)$$

De forma inversa, o produto de A_D por x_{est} fornece o deslocamento máximo da resposta permanente do sistema.

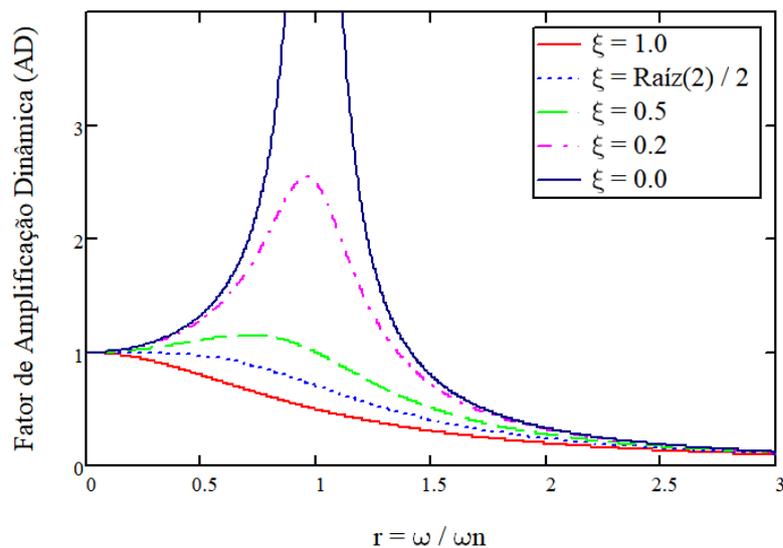


Figura 2.4 – Fator de amplificação dinâmica $A_D(r)$ x r

Evidencia-se a real influência do fator de amplificação dinâmica para respostas de sistemas na proximidade da ressonância ($r=1$). Ressalta-se também, a inexistência de amplificação para $\xi \geq \sqrt{2}/2$.

2.1.3. Sistemas de múltiplos graus de liberdade

Um modelo idealizado e comumente utilizado para a compreensão de um sistema de múltiplos graus de liberdade é o *shear building*, conforme mostrado na Figura 2.5.

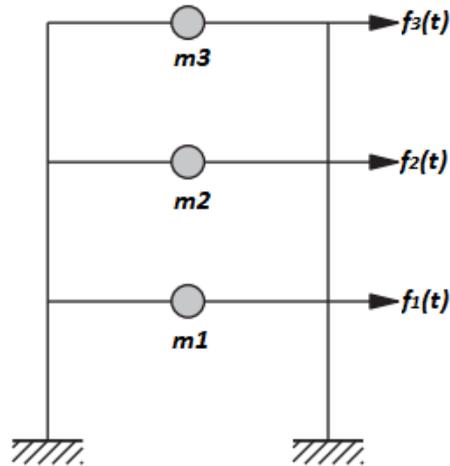


Figura 2.5 – Shear building, (CHOPRA), Adaptado

Considera-se como *shear building* uma estrutura sem deformação axial em seus elementos estruturais; vigas com rigidez flexional infinita e massas concentradas nos níveis dos respectivos andares (LIMA e SANTOS, 2008). As equações do movimento são expressas, no caso de sistemas com três graus de liberdade, de forma a representar o comportamento da estrutura idealizada com seus respectivos graus de liberdade e forças externas aplicadas. Ao se escrever as equações do movimento do sistema e organizá-las em forma matricial, têm-se:

$$\begin{bmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m2 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d}1 \\ \ddot{d}2 \\ \ddot{d}3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c1 + c2 & -c2 & 0 \\ -c2 & c2 + c3 & -c3 \\ 0 & -c3 & c3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{d}1 \\ \dot{d}2 \\ \dot{d}3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k1 + k2 & -k2 & 0 \\ -k2 & k2 + k3 & -k3 \\ 0 & -k3 & k3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1(t) \\ f2(t) \\ f3(t) \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Ou em forma compacta:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{f(t)\} \quad (2.15)$$

Onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema; \ddot{d} , \dot{d} , d os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos, respectivamente.

2.1.4. Frequências e modos naturais de vibração

Em caso de vibração livre não amortecida o modelo apresentado na equação (2.15), para n graus de liberdade, particulariza-se em:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = 0 \quad (2.16)$$

Seja a vibração livre do sistema segundo um de seus modos de vibração representada por:

$$\{d\} = \{\varphi_j\} \left[A_j \cos(\omega_{n_j} t) + B_j \sin(\omega_{n_j} t) \right] \quad (2.17)$$

Onde φ_j é o j -ésimo modo de vibração do sistema (um dos autovetores) e ω_{n_j} sua j -ésima frequência circular (autovalor). Substituindo-se a equação (2.17) em (2.16) e desconsiderando-se a solução trivial onde $\{d\} = 0$, implicando na inexistência de movimento, obtêm-se:

$$\left([K] - \omega_{n_j}^2 [M] \right) \{\varphi_j\} = \{0\} \quad (2.18)$$

$[K]$ e $[M]$ são matrizes reais e simétricas. Logo, os autovalores são reais ($\lambda \in \mathbb{R}$). Configura-se um problema de autovalor generalizado¹ cuja solução não trivial implica na imposição de singularidade (determinante igual a zero) para a parcela matricial entre parênteses como mostrado na equação (2.19). Isto é, existem infinitas soluções. Como o interesse na solução se resume à proporcionalidade entre seus termos, a falta de valores absolutos não configura um problema.

$$\left| [K] - \omega_{n_j}^2 [M] \right| = 0 \quad (2.19)$$

¹ A solução numérica para o problema matemático de autovalor generalizado será apresentada mais adiante no presente trabalho.

Com n graus de liberdade, têm-se o mesmo número de autopares $(\omega_{n_j}, \varphi_j)$ como solução não trivial. Os n autovetores podem ser agrupados formando a *matriz modal* $[\tilde{\phi}]$, que indica a matriz de transformação para a base modal.

$$[\tilde{\phi}] = [\{\tilde{\varphi}_1\} \ \{\tilde{\varphi}_2\} \ \dots \ \{\tilde{\varphi}_n\}] \quad (2.20)$$

Ou em forma expandida:

$$[\tilde{\phi}] = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{1,1} & \dots & \tilde{\varphi}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\varphi}_{n,1} & \dots & \tilde{\varphi}_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Os n autovalores são colocados em uma matriz diagonal chamada *matriz espectral* $([\Lambda])$, a qual também pode ser obtida conforme a equação (2.22), caso os autovetores tenham sido normalizados em relação à matriz de massa $[M]$ como mostra a equação (2.24).

$$[\Lambda] = [\phi]^T [K] [\phi] \quad (2.22)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{n_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_{n_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\phi_{i,j} = \frac{\tilde{\varphi}_{i,j}}{\sqrt{\{\tilde{\varphi}_j\}^T [M] \{\tilde{\varphi}_j\}}} \quad (2.24)$$

Onde ϕ indica a matriz modal normalizada. Com essas novas representações o problema de autovalores pode ser reescrito de uma nova forma, cuja resolução denomina-se *análise modal*.

$$[K][\phi] = [M][\phi][\Lambda] \quad (2.25)$$

2.2. Vibração de sistemas contínuos

2.2.1. Viga simplesmente apoiada sujeita à carga móvel única

Alguns sistemas estruturais relativamente simples possui solução analítica para sua resposta dinâmica. Para um sistema mais complexo, a dedução da solução analítica torna-se impossível. Sendo assim, algumas suposições são feitas para o estudo do problema em questão. São elas: a viga é homogênea e de seção constante, onde a hipótese de *Euler-Bernoulli* (seções planas permanecem planas após deformação) se aplica; é permitida a passagem de apenas um veículo por vez; considera-se apenas o efeito gravitacional do veículo e negligencia-se seu efeito inercial; o veículo se move a uma velocidade v constante; o amortecimento da viga é o de *Rayleigh*; a viga se encontra em sua posição de equilíbrio estático em $t = 0$ e nenhuma consideração a respeito da rugosidade da via é feita (YANG, YAU e WU, 2004).

A Figura 2.6 ilustra o problema em questão onde uma viga de comprimento L , massa linear m , amortecimento c e rigidez à flexão EI é submetida à ação de uma carga móvel p com velocidade v . Adota-se $u(x,t)$ como o deslocamento da viga ao longo do eixo y na posição x e instante t .

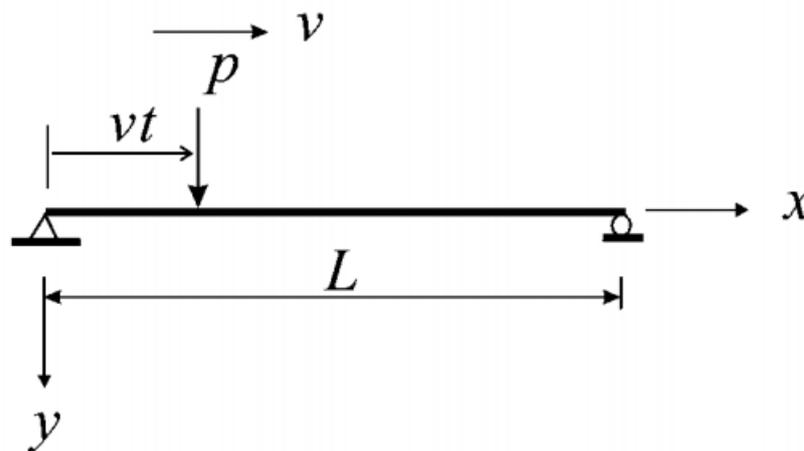


Figura 2.6 – Viga sob carga móvel

As condições de contorno para a viga do problema são:

$$\begin{aligned}
u(0, t) &= 0 \\
u(L, t) &= 0 \\
EIu''(0, t) &= 0 \\
EIu''(L, t) &= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

E as condições iniciais são:

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= 0 \\
\dot{u}(x, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Seja φ_n o n -ésimo modo de vibração da viga que satisfaz às condições de contorno. A solução para a equação do movimento da viga $u(x, t)$, devido somente a φ_n , tem a seguinte forma:

$$u(x, t) = \varphi_n(x)q_n(t) \tag{2.28}$$

Onde $q_n(t)$ é a coordenada generalizada correspondente ao n -ésimo modo de vibração. Na prática, para uma série de problemas envolvendo cargas móveis, o efeito do amortecimento na estrutura é muito pequeno tendo em vista o curto tempo de atuação da carga. Ignora-se por completo o efeito do amortecimento nesse tipo de estudo, principalmente, se o interesse está nos primeiros ciclos da resposta dinâmica da estrutura². A resolução analítica da equação diferencial do problema fornece solução válida para $x \in (0 \leq vt \leq L)$, a qual sem o efeito do amortecimento assume a forma (YANG, YAU e WU, 2004):

$$u(x, t) = \frac{2pL^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{\sin(\Omega_n t) - S_n \sin(\omega_n t)}{1 - S_n^2} \right) \tag{2.29}$$

Correspondentemente, o momento fletor $M (-EIu''(x, t))$ e o esforço cortante $V (EIu'''(x, t))$ gerados pela carga móvel podem ser calculados, respectivamente, como:

$$M(x, t) = \frac{2pL}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{\sin(\Omega_n t) - S_n \sin(\omega_n t)}{1 - S_n^2} \right) \tag{2.30}$$

² As respostas amortecidas são apresentadas nos anexos ao presente trabalho.

$$V(x, t) = \frac{2p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{\sin(\Omega_n t) - S_n \sin(\omega_n t)}{1 - S_n^2} \right) \quad (2.31)$$

Onde a frequência excitadora imposta pela carga móvel é:

$$\Omega_n = \frac{n \pi v}{L} \quad (2.32)$$

S_n é um parâmetro adimensional de velocidade que define a razão entre a frequência excitadora da carga móvel e o n ésimo modo de vibração da viga.

$$S_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n} \quad (2.33)$$

As soluções analíticas para o deslocamento, velocidade, aceleração e esforços do problema amortecido são apresentadas nos anexos a este trabalho.

Seja uma viga de comprimento $L = 20 \text{ m}$, massa linear $m = 3000 \text{ kg/m}$, rigidez à flexão $EI = 10^3 \text{ kN m}^2$, coeficiente de amortecimento $\xi = 2,5\%$ para todos os modos e sujeita à uma carga móvel $p = 6 \text{ kN}$ com velocidade $v = 27,8 \text{ m/s}$ (100 km/h). A Figura 2.7 mostra o deslocamento do ponto central da viga durante a ação da carga, para $n = 1$ (contribuição de n modos de vibração na resposta).

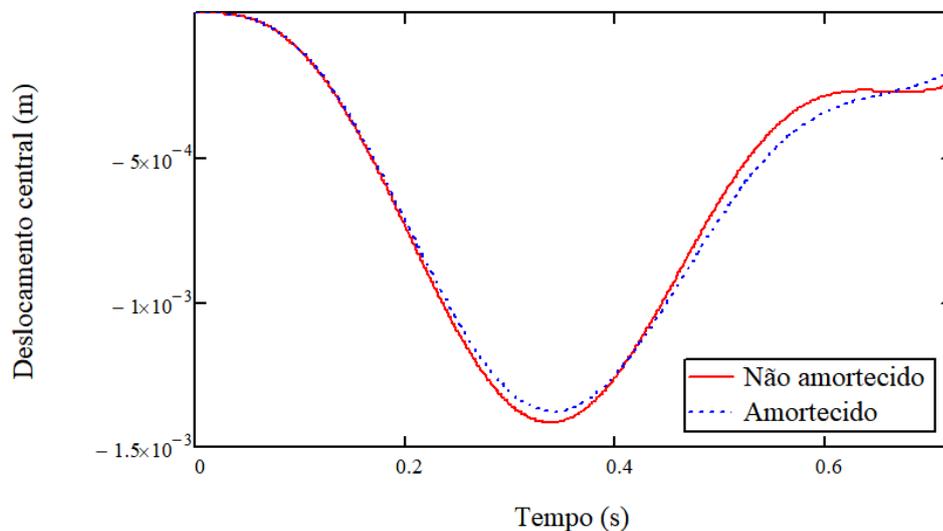


Figura 2.7 – Deslocamento central da viga

O amortecimento possui baixa influência na resposta da viga. Se obtém um deslocamento máximo amortecido de 1,38 milímetros e um deslocamento máximo não amortecido de 1,42 milímetros. A Figura 2.8 ilustra a influência de mais modos de vibração na resposta dinâmica da viga não amortecida para $S = 0,1$.

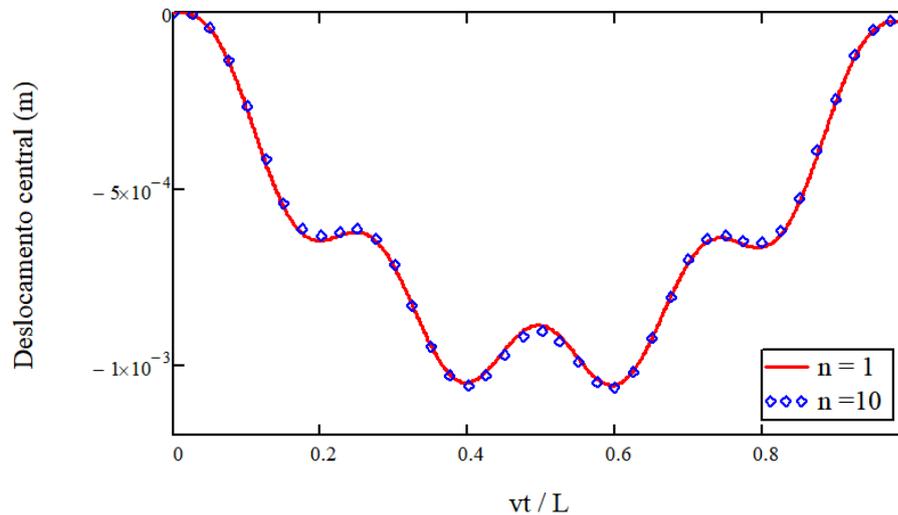


Figura 2.8 – Deslocamento central não amortecido da viga para $S=0,1$

A consideração de mais modos de vibração no cálculo não tem influência prática na resposta da estrutura para a análise em questão. Apenas a contribuição do primeiro modo já é suficiente para uma solução aceitável, especialmente quando se tem como objetivo o deslocamento central da viga (YANG, YAU e WU, 2004).

2.2.2. Fator de impacto

O fator de impacto formulado para o deslocamento central de uma viga simplesmente apoiada leva em consideração o parâmetro adimensional de velocidade S , o que permite a utilização de seus resultados em uma ampla gama de aplicações.

Ressalta-se também que os fatores de impacto para deslocamento, momento fletor e esforço cortante são ligeiramente diferentes; impossibilitando assim, o uso de fórmulas idênticas para todas as grandezas mencionadas. A equação (2.34) estabelece a definição matemática do fator de impacto (I).

$$I = \frac{R_d(x) - R_s(x)}{R_s(x)} \quad (2.34)$$

Onde $R_d(x)$ e $R_s(x)$ representam, respectivamente, a máxima resposta dinâmica e estática da estrutura na seção x devido à ação da carga móvel. Sabe-se que os deslocamentos estáticos e dinâmicos máximos para uma viga simplesmente apoiada, ocorrem em seu ponto central. Da análise estática³ (GERE e GOODNO, 2009) têm-se:

$$R_{su}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^3}{48EI} \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.35) e (2.29) na equação (2.34), obtêm-se o fator de impacto I_u para o deslocamento do ponto central da viga.

$$I_u \cong \left(\frac{\sin(\Omega_1 t) - S_1 \sin(\omega_1 t)}{1 - S_1^2} \right) - 1 \quad (2.36)$$

Torna-se clara a independência no fator de impacto da magnitude da carga móvel p e a contribuição insignificante dos termos de ordem superior, os quais foram negligenciados. Observa-se também a existência de uma envoltória superior máxima para o fator de impacto em função de diferentes valores de vt/L . Pode-se inferir que o fator de impacto máximo é condicionalmente proporcional ao parâmetro adimensional de velocidade. Sendo assim, com base em tais observações, foram obtidas fórmulas para o coeficiente de impacto máximo do deslocamento do ponto central da viga simplesmente apoiada, como mostra a equação (2.37). A Figura 2.9 ilustra o que foi mencionado anteriormente de forma concisa.

$$I_u = \begin{cases} 1.54S_1 & \text{para } S_1 < 0.5 \\ 0.77 & \text{para } S_1 \geq 0.5 \end{cases} \quad (2.37)$$

³ Deslocamento de uma viga simplesmente apoiada sob ação da carga estática p com ponto de aplicação em $L/2$.

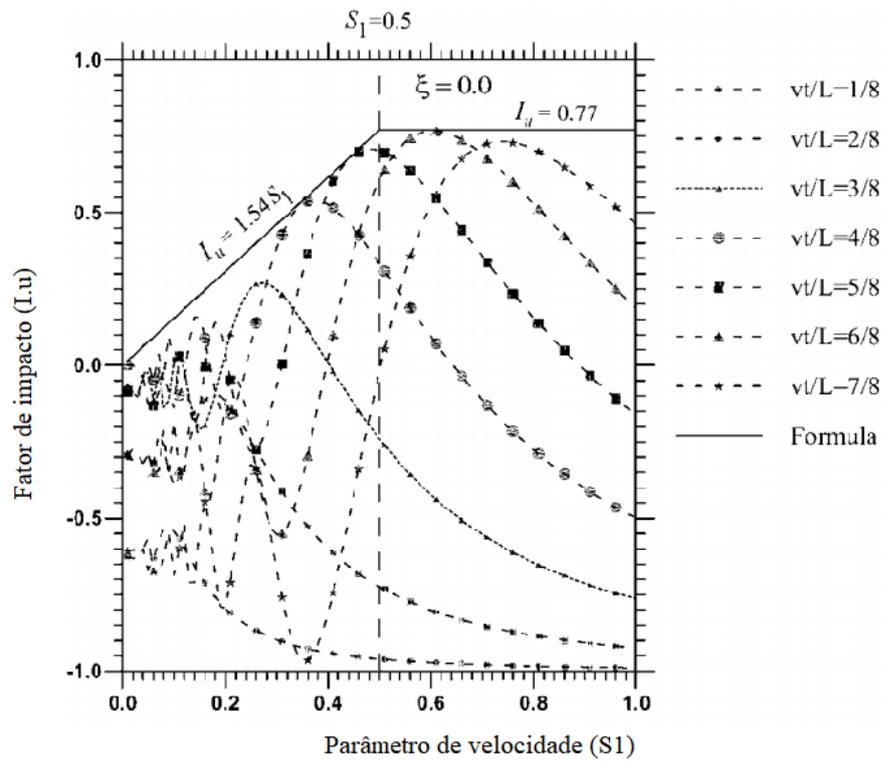


Figura 2.9 – Fator de impacto para deslocamento do ponto central, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004)

De forma análoga, as Figura 2.10 e Figura 2.11 representam os fatores de impacto I_M e I_V para o momento fletor e esforço cortante, respectivamente.

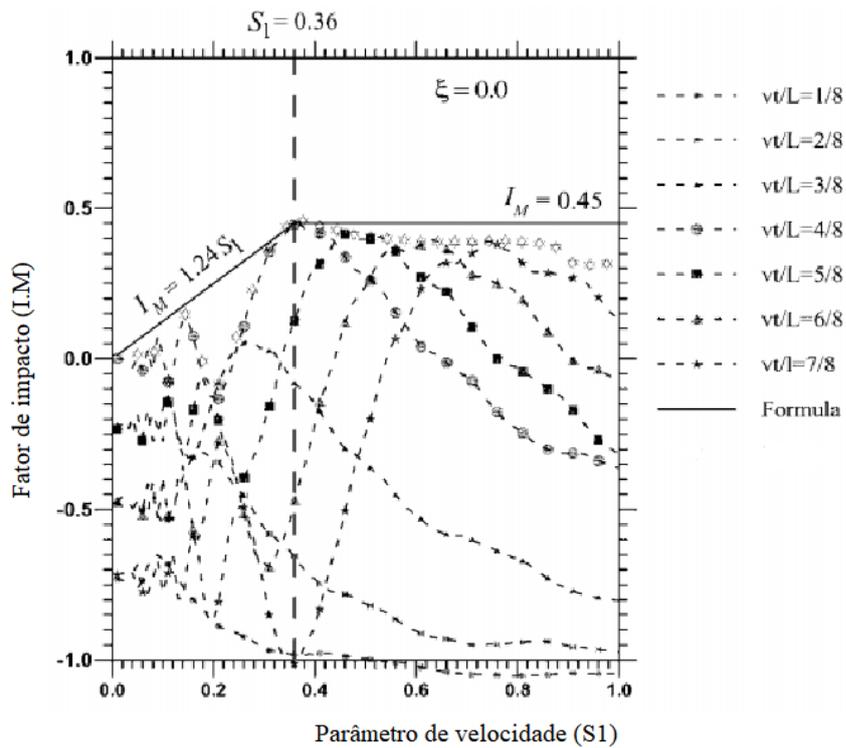


Figura 2.10 – Fator de impacto para momento fletor do ponto central, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004)

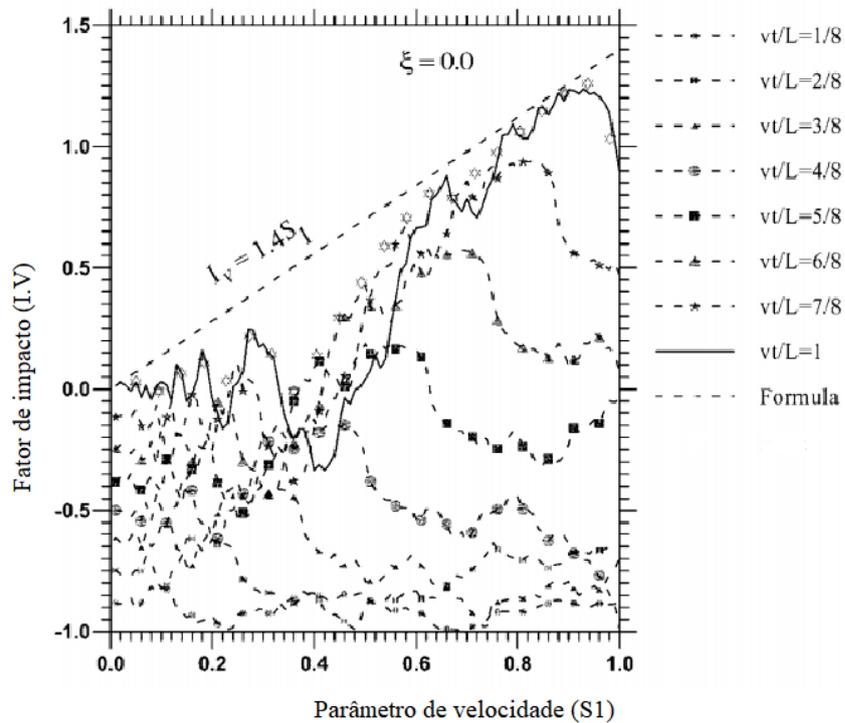


Figura 2.11 – Fator de impacto para o esforço cortante da extremidade direita, Adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004)

Ressalta-se que a contribuição de modos superiores possui relevância na resposta estrutural para o momento fletor e esforço cortante.

2.2.3. Múltiplas cargas móveis, ressonância e cancelamento

A solução para o modelo matemático que representa a resposta dinâmica em termos de deslocamentos verticais para uma viga simplesmente apoiada sujeita à ação de múltiplas massas móveis, equação (2.39), é apresentada na equação (2.38):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.38)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + EIu'''' = \sum_{j=1}^N F(p, M, v) [U_j(t, v, L) + U_j(t - t_c, v, L)] \quad (2.39)$$

O lado direito da equação (2.39) representa a função de carga, cuja consideração dos efeitos dinâmicos do veículo e da posição das cargas são descritos na equação:

$$F(p, M, v) = p - M(\ddot{u} + 2v\dot{u}' + v^2u'') \quad (2.40)$$

$$U_j(t, v, L) = \delta[x - v(t - t_j)] \left[H(t - t_j) - H\left(t - t_j - \frac{L}{v}\right) \right] \quad (2.41)$$

Onde, p é o peso do veículo, $M\ddot{u}$ a força de inércia gerada pela aceleração vertical do veículo, $M2v\dot{u}'$ a força de Coriolis, Mv^2u'' a força centrífuga, δ o delta de *Dirac*, $t_j = (j - 1)d/v$ e H a função de *Heaviside*. Ao se substituir (2.38) em (2.39), tem-se a equação do movimento do problema em termos das coordenadas generalizadas q_n . Para o enésimo modo, tem-se:

$$(1 + \varepsilon_{m,n})\ddot{q}_n + (2\xi_n\omega_n + \varepsilon_{c,n})\dot{q}_n + (\omega_n^2 + \varepsilon_{s,n})q_n = F_n(t) \quad (2.42)$$

Onde,

$$F(t) = \frac{2p}{mL} \sum_{j=1}^N [f_n(t, v, L) + f_n(t - t_c, v, L)] \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{2M}{mL} \sum_{j=1}^N [g_n(t, v, L) + g_n(t - t_c, v, L)] \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_{c,n} = \frac{2M}{mL} \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \sum_{j=1}^N [h_n(t, v, L) + h_n(t - t_c, v, L)] \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{s,n} = -\frac{2M}{mL} \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 \sum_{j=1}^N [g_n(t, v, L) + g_n(t - t_c, v, L)] \quad (2.46)$$

Sendo t_c o tempo entre as cargas das rodas iniciais e finais do veículo, $\varepsilon_{m,n}$ o efeito adicional gerado pelas massas dos veículos, $\varepsilon_{c,n}$ efeito da força de *Coriolis*, $\varepsilon_{s,n}$ efeito da força centrífuga e ainda:

$$\begin{aligned} f_n(t, v, L) = & \sin \frac{n\pi v(t - t_j)}{L} H(t - t_j) \\ & + (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi v(t - t_j - L/v)}{L} H\left(t - t_j - \frac{L}{v}\right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} g_n(t, v, L) = & \left(\sin \frac{n\pi v(t - t_j)}{L} \right)^2 H(t - t_j) \\ & - \left[\sin \frac{n\pi v(t - t_j - L/v)}{L} \right]^2 H\left(t - t_j - \frac{L}{v}\right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} h_n(t, v, L) = & \sin \frac{2n\pi v(t - t_j)}{L} H(t - t_j) \\ & - \sin \frac{2n\pi v(t - t_j - L/v)}{L} H\left(t - t_j - \frac{L}{v}\right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Tais efeitos tendem a diminuir a rigidez dinâmica da estrutura gerando um alongamento no período da resposta. Em termos práticos $\varepsilon_{c,n}$ e $\varepsilon_{s,n}$ são desprezíveis em relação a $\varepsilon_{m,n}$ tendo em vista a alta rigidez existente nesse tipo de estrutura.

Seja P a função da resposta estrutural para os primeiros conjuntos de rodas dos vagões.

$$P(v, t) = [\sin \Omega_1(t - t_N) - S_1 \sin \omega_1(t - t_N)]H(t - t_N) - 2S_1 \cos \frac{\omega_1 L}{2v} \left[\sin \omega_1 \left(t - \frac{L}{2v} \right) \sin \omega_1 \left(t - \frac{L}{2v} - \frac{t_N}{2} \right) \frac{\sin \omega_1 \left(\frac{t_N}{2} - \frac{d}{2v} \right)}{\sin \frac{\omega_1 d}{2v}} \right] H \left(t - t_{N-1} - \frac{L}{v} \right) \quad (2.50)$$

Através da equação (2.51) pode-se inferir que a resposta máxima é alcançada quando o denominador do termo entre colchetes tende a zero. Para isso, $\omega_1 d / 2v = i\pi$, $i = 1, 2, 3 \dots$ tornando a equação indeterminada, o que representa a condição de ressonância. Tal indeterminação pode ser contornada aplicando-se a regra de L'Hôpital. Com a condição de ressonância pode-se calcular parâmetros críticos do sistema.

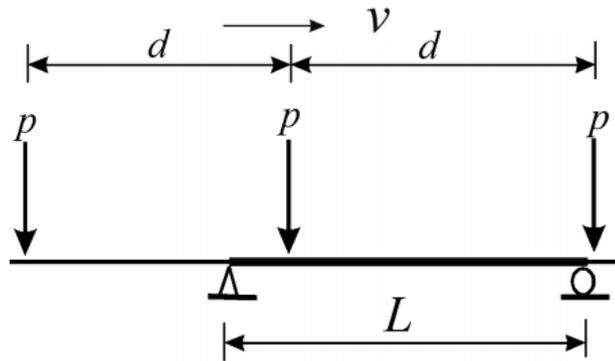


Figura 2.12 – Passagem de múltiplas cargas móveis

Na Figura 2.12 – Passagem de múltiplas cargas móveis d representa o comprimento dos vagões e p , as cargas concentradas atuando nas rodas dos mesmos. O comprimento crítico de ressonância d pode ser expresso da seguinte forma:

$$d = 2iS_1L, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.51)$$

Assim, ao se fixar um dos parâmetros (S_1 ou L) obtêm-se o outro. Quanto maior o comprimento da estrutura, menor é a velocidade necessária para a ressonância. Segundo YANG, YAU e WU (2004) um bom projeto deve manter a ressonância primária ($S_1=0,5d/L$) suprimida ao longo do tempo, através do ajuste do comprimento do vão e/ou seção transversal

da viga, uma vez que se tenha fixado o comprimento do vagão. Quando não existe resposta residual induzida pelas cargas que já atravessaram a estrutura, diz-se estar sob fenômeno de cancelamento. Pode-se determinar o parâmetro de velocidade para tal condição da seguinte forma:

$$S_1 = \frac{1}{2i - 1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.52)$$

Se a condição de cancelamento é atingida, o fenômeno de ressonância fica automaticamente suprimido. Ao se igualar a velocidade de ressonância primária com qualquer velocidade que satisfaça o cancelamento, obtêm-se uma relação ótima para suprimir os pontos de ressonância como mostrado a seguir.

$$\frac{L}{d} = i - 0,5, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.53)$$

O efeito da relação descrita acima no fator de impacto de resposta da estrutura será representado graficamente. O fator de impacto I_u foi obtido em função de S_1 e L/d conforme mostram as Figura 2.13 e Figura 2.14.

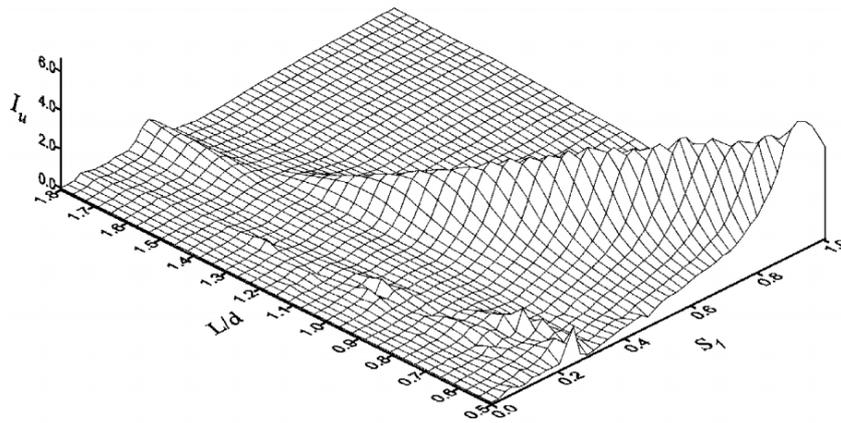


Figura 2.13 – $S_1 \times L/d \times I_u$

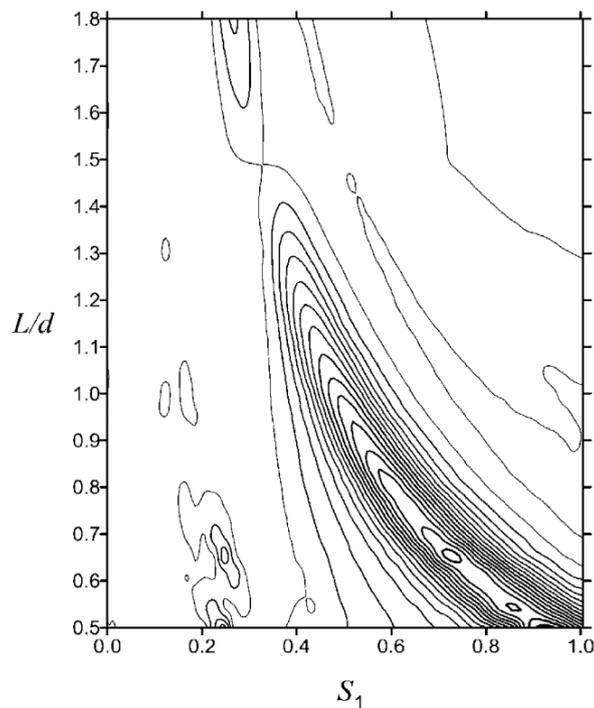


Figura 2.14 – Curvas de nível de $S_1 \times L/d \times I_u$

Como visto, o estudo de diversos parâmetros é necessário quando se trata de critérios de desenvolvimento de um projeto ótimo. Consta-se a influência considerável de apoios elásticos na resposta dinâmica da estrutura. Estes tendem a diminuir as frequências naturais da estrutura, alterando conseqüentemente parâmetros como: amplitude dos deslocamentos; velocidade de ressonância e cancelamento, entre outros. Assim, não sendo algo incomum na engenharia de pontes, é válido chamar a atenção para a existência dos mesmos, já que podem levar a alterações consideráveis e/ou não esperadas durante as análises.

2.3. Modelagem da interação dinâmica através de forças de contato

Além da utilização de forças de contato, pode-se abordar a modelagem do problema de interação veículo-estrutura através da condensação dinâmica. Esta consiste na condensação dos graus de liberdade dos veículos (representado por um subsistema dinâmico) aos graus de liberdade dos elementos da ponte. A modelagem através de forças de contato foi escolhida e implementada. Essa abordagem restringe a complexidade do sistema veículo modelado ao poder computacional disponível. Pode-se variar desde uma carga móvel até um sistema de massas suspensas com barras rígidas.

Os pontos de atuação das forças de contato são os que fazem com que as equações diferenciais que definem o problema sejam acopladas. As matrizes do sistema são tempo-dependentes e devem ser atualizadas a cada instante de tempo à medida que os pontos de contato se deslocam; isto define uma análise incremental de histórico no tempo. HOFFMAN (2001) apresenta soluções numéricas e iterativas para a resolução deste tipo de problema, como por exemplo, o método de *Newmark*.

Divide-se o veículo em duas partes, as sem contato com a estrutura (corpo ou parte superior) e as com contato com a estrutura (rodas ou parte inferior). A equação do movimento do veículo é dada a seguir.

$$[m_v]\{\ddot{d}_v\} + [c_v]\{\dot{d}_v\} + [k_v]\{d_v\} = \{f_v\} \quad (2.54)$$

Onde o vetor de forças $\{f_v\}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

$$\{f_v\} = \{f_e\} + [l]\{f_c\} \quad (2.55)$$

O vetor $\{f_e\}$ representa as forças externas exceto as de contato. Estas são representadas pelo vetor $\{f_c\}$ atuando através das rodas do veículo. $[l]$ é uma matriz de transformação.

O vetor de deslocamentos $\{d_v\}$ é formado por $\{\{d_u\}\{d_w\}\}^T$, representando os deslocamentos nas direções dos graus de liberdade sem contato com a estrutura e dos graus em contato com a estrutura do veículo, respectivamente. Relacionam-se os deslocamentos das rodas $\{d_w\}$ com os deslocamentos dos pontos de contato $\{d_c\}$, como:

$$\{d_w\} = [\Gamma]\{d_c\} + \{r\} \quad (2.56)$$

Tem-se, a matriz $[\Gamma]$ que representa condições de salto do veículo; caso não exista, a mesma terá valor unitário; $\{r\}$ é o vetor que representa a irregularidade do trilho (ou pavimento). Ao não se levar em consideração condições de salto e irregularidades da via, os deslocamentos das rodas se igualam aos deslocamentos dos pontos de contato. Neste trabalho apenas as forças de contato que atuam na direção da gravidade serão levadas em conta durante a análise. Isto é, excluem-se forças horizontais geradas por aceleração ou frenagem do veículo.

O sistema será analisado de maneira incremental; para isso, assume-se que todas as informações do mesmo são conhecidas no instante t . Atribui-se valor pequeno ao incremento de tempo Δt . O interesse da análise está na obtenção das respostas do sistema no instante $t + \Delta t$. Pode-se reescrever a equação (2.54) para o novo instante de tempo separando de forma matricial os graus de liberdade do veículo (u) e os das rodas (w):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [m_{uu}] & [m_{uw}] \\ [m_{wu}] & [m_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{d}_u\} \\ \{\ddot{d}_w\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} [c_{uu}] & [c_{uw}] \\ [c_{wu}] & [c_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{d}_u\} \\ \{\dot{d}_w\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} \\ & + \begin{bmatrix} [k_{uu}] & [k_{uw}] \\ [k_{wu}] & [k_{ww}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_u\} \\ \{d_w\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \{f_{ue}\} \\ \{f_{we}\} \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} [l_u] \\ [l_w] \end{bmatrix} \{f_c\}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ao se expandir a primeira linha de equação (2.57) tem-se:

$$[m_{uu}]\{\ddot{d}_u\}_{t+\Delta t} + [c_{uu}]\{\dot{d}_u\}_{t+\Delta t} + [k_{uu}]\{d_u\}_{t+\Delta t} = \{f_{ue}\}_{t+\Delta t} - \{q_{uc}\}_{t+\Delta t} \quad (2.58)$$

Onde,

$$\{q_{uc}\}_{t+\Delta t} = [m_{uw}]\{\ddot{d}_w\}_{t+\Delta t} + [c_{uw}]\{\dot{d}_w\}_{t+\Delta t} + [k_{uw}]\{d_w\}_{t+\Delta t} \quad (2.59)$$

Com a utilização do método de integração de Newmark⁴ baseado em diferenças finitas, como abordado em NEWMARK e CHAN (1952) e com uma série de transformações

⁴ Este método será descrito em mais detalhes no próximo capítulo.

algébricas como mostrado em (YANG, YAU e WU, 2004) é possível obter as equações que descrevem as etapas da solução do problema.

$$\begin{aligned}
\{\ddot{d}_u\}_{t+\Delta t} &= b_0\{\Delta d_u\} - b_1\{\dot{d}_u\}_t - b_2\{\ddot{d}_u\}_t; \\
\{\dot{d}_u\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{d}_u\}_t + b_3\{\ddot{d}_u\}_t + b_4\{\ddot{d}_u\}_{t+\Delta t}; \\
\{d_u\}_{t+\Delta t} &= \{d_u\}_t + \{\Delta d_u\};
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Para os parâmetros de estabilidade numérica de Newmark β e γ ; e para os coeficientes do método tem-se:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}; & b_1 &= \frac{1}{\beta\Delta t}; & b_2 &= \frac{1}{2\beta} - 1; \\
b_3 &= (1 - \gamma)\Delta t; & b_4 &= \gamma\Delta t; & b_5 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}; \\
b_6 &= \frac{\gamma}{\beta} - 1; & b_7 &= \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right); \\
\gamma &= \frac{1}{2}; & \beta &= \frac{1}{4};
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Após a substituição das equações (2.60) em (2.57) e manipulações algébricas, pode-se dar seguimento ao problema cuja solução implica na resolução de um sistema de equações algébricas lineares.

$$[\Psi_{uu}]\{\Delta d_u\} = \{f_{ue}\}_{t+\Delta t} - \{q_{uc}\}_{t+\Delta t} + \{q_u\}_t \tag{2.62}$$

Onde,

$$[\Psi_{uu}] = b_0[m_{uu}] + b_5[c_{uu}] + [k_{uu}] \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
\{q_u\}_t &= [m_{uu}] \left(b_1\{\dot{d}_u\}_t + b_2\{\ddot{d}_u\}_t \right) \\
&+ [c_{uu}] \left(b_6\{\dot{d}_u\}_t + b_7\{\ddot{d}_u\}_t \right) - [k_{uu}]\{d_u\}_t
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Assim, a resolução do sistema (2.62) resulta no vetor de incremento dos deslocamentos $\{\Delta d_u\}$ da parte superior do veículo. Substituindo os mesmos em (2.60) obtêm-se o vetor de deslocamentos $\{d_u\}_{t+\Delta t}$ da parte superior do veículo. Com o conhecimento dos deslocamentos da parte superior do veículo no instante seguinte é possível obter as forças de contato atuantes no sistema através da substituição desses deslocamentos na equação governante do problema (2.57). Ao se expandir os termos da segunda linha da mesma tem-se:

$$\{f_c\}_{t+\Delta t} = [m_c]\{\ddot{d}_w\}_{t+\Delta t} + [c_c]\{\dot{d}_w\}_{t+\Delta t} + [k_c]\{d_w\}_{t+\Delta t} + \{p_c\}_{t+\Delta t} + \{q_c\}_t \quad (2.65)$$

Onde as matrizes de contato são:

$$\begin{aligned} [m_c] &= [l_w]^{-1}([m_{ww}] - [\Psi_{wu}][\Psi_{uu}]^{-1}[m_{uw}]); \\ [c_c] &= [l_w]^{-1}([c_{ww}] - [\Psi_{wu}][\Psi_{uu}]^{-1}[c_{uw}]); \\ [k_c] &= [l_w]^{-1}([k_{ww}] - [\Psi_{wu}][\Psi_{uu}]^{-1}[k_{uw}]); \end{aligned} \quad (2.66)$$

Os vetores de carga são:

$$\begin{aligned} \{p_c\}_{t+\Delta t} &= [l_w]^{-1}([\Psi_{wu}][\Psi_{uu}]^{-1}\{f_{ue}\}_{t+\Delta t} - \{f_{we}\}_{t+\Delta t}) \\ \{q_c\}_t &= [l_w]^{-1}([\Psi_{wu}][\Psi_{uu}]^{-1}\{q_u\}_t - \{q_w\}_t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

E também,

$$[\Psi_{wu}] = b_0[m_{wu}] + b_5[c_{wu}] + [k_{wu}] \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \{q_w\}_t &= [m_{wu}](b_1\{\dot{d}_u\}_t + b_2\{\ddot{d}_u\}_t) \\ &+ [c_{wu}](b_6\{\dot{d}_u\}_t + b_7\{\ddot{d}_u\}_t) - [k_{wu}]\{d_u\}_t \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ao não se levar em consideração condições de salto no sistema, assume-se que os deslocamentos de roda sejam iguais aos deslocamentos dos pontos de contato da estrutura, isto é, $\{d_w\} \equiv \{d_c\}$. Logo, pode-se reescrever a equação (2.65).

$$\{f_c\}_{t+\Delta t} = [m_c]\{\ddot{d}_c\}_{t+\Delta t} + [c_c]\{\dot{d}_c\}_{t+\Delta t} + [k_c]\{d_c\}_{t+\Delta t} + \{p_c\}_{t+\Delta t} + \{q_c\}_t \quad (2.70)$$

2.4. Montagem das matrizes do sistema

As forças de contato do sistema variam tanto no tempo quanto no espaço. Logo, as matrizes do sistema, as quais são função das forças de contato, devem ser atualizadas e remontadas a cada instante de tempo.

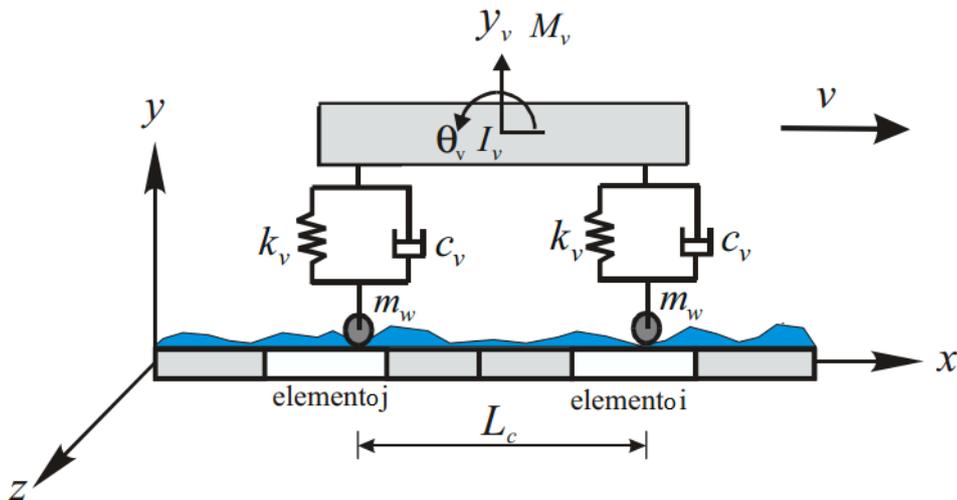


Figura 2.15 – Elementos de contato da estrutura, adaptado de (YANG, YAU e WU, 2004)

A Figura 2.15 ilustra os elementos da estrutura que estão sob os pontos de contato do veículo em um determinado instante de tempo, os quais são chamados elementos VBI ou elementos de contato. A cada determinado instante de tempo o sistema estrutural é configurado por elementos de contato diferentes. Isto se deve à natureza dinâmica do problema; ou seja, à passagem do veículo e conseqüentemente à variação da posição dos pontos de contato ao longo de toda a estrutura. Os demais elementos da estrutura em determinado instante de tempo se comportam como elementos de pórtico espacial usuais. As matrizes que constituem o veículo e as respectivas forças de contato estão acopladas na

formação matricial do elemento VBI, que por sua vez faz parte da matriz global do sistema. A cada instante, um elemento do sistema estrutural pode ser ou não um elemento VBI dependendo da posição do veículo. Isso explica por que as matrizes globais do sistema $[M]$ e $[K]$ devem ser atualizadas a cada incremento de tempo. As técnicas computacionais usadas para a atualização das matrizes de forma eficiente visando minimizar consumo de memória e tempo de processamento serão abordadas no capítulo seguinte. Para as equações globais do sistema na forma matricial pode-se escrever:

$$[M]\{\ddot{D}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{D}\}_{t+\Delta t} + [K]\{D\}_{t+\Delta t} = \{P\}_{t+\Delta t} \quad (2.71)$$

Para a matriz de amortecimento $[C]$ é utilizado o amortecimento de Rayleigh, o qual é constituído por uma combinação linear entre as matrizes $[M]$ e $[K]$.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.72)$$

Onde,

$$\alpha = 2\omega_k \frac{\xi_k \omega_i^2 - \xi_i \omega_i \omega_k}{\omega_i^2 - \omega_k^2} \quad (2.73)$$

$$\beta = \frac{2\xi_i \omega_i - 2\xi_k \omega_k}{\omega_i^2 - \omega_i \omega_k}$$

Neste caso, ω_i e ω_k são os limites da faixa de frequência de interesse do amortecimento de Rayleigh, podendo ser iguais a frequências naturais da estrutura ou não. A resolução computacional do problema de autovalores para a obtenção das frequências naturais será abordada no próximo capítulo.

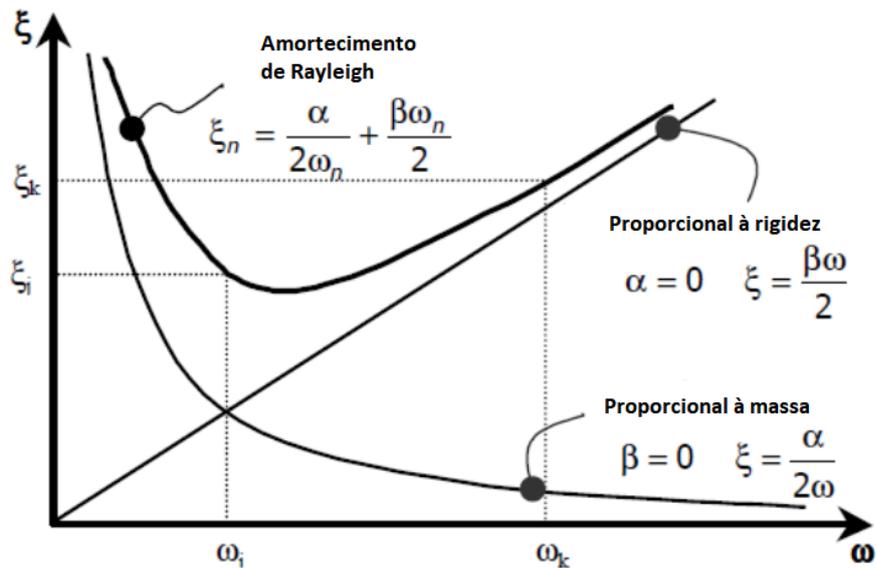


Figura 2.16 – Amortecimento de Rayleigh

Em suma, abordagens analíticas para a resolução do problema em questão existem, porém são restritas a estruturas relativamente simples, tendo em vista sua complexidade ou impossibilidade matemática. Assim, recorre-se a métodos numéricos que simplificam o problema com a discretização de seu domínio matemático. A abordagem através de forças dinâmicas de contato mostrou-se como a mais indicada, apesar de não trivial, já que permite a resolução de sistemas dinâmicos acoplados independentemente de sua complexidade. Como descrito, a complexidade do sistema dinâmico que representa o veículo não possui grande relevância na resposta da estrutura. Torna-se importante quando se tem como objetivo a resposta do veículo em uma análise de conforto para usuários, por exemplo.

3. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

3.1. *Conceitos elementares*

3.1.1. *O modelo matemático*

Tendo em vista o alto grau de complexidade das estruturas, torna-se extremamente difícil a compreensão integral e representação exata dos sistemas constituídos de matéria que as compõem. Sendo assim, desenvolvem-se estudos analíticos para o entendimento aproximado dos fenômenos físicos que a constituem.

Graças ao cálculo diferencial a matéria pôde ser idealizada como uma distribuição contínua constituída por infinitos pontos materiais adjacentes, mas com a propriedade de poderem se afastar sem a formação de vazios e se aproximarem sem sobreposição, o que se conhece como meio contínuo. Essa idealização quando associada às propriedades mecânicas do meio e em consonância com determinado princípio ou lei física, permite a representação do fenômeno por equações matemáticas que regem o comportamento físico do meio a ser estudado. Assim, essas equações constituem o modelo matemático⁵ do problema, cuja solução expressa o comportamento do sistema.

3.1.2. *O modelo discreto*

Diferentemente do modelo matemático contínuo, pode-se idealizar um sistema considerando um número finito de pontos materiais com grandezas físicas incógnitas, o que se conhece como modelo matemático discreto. As variáveis necessárias para a definição de uma configuração do fenômeno no espaço físico são ditas independentes, como por exemplo, coordenadas referenciais para localização física e temporal⁶ de pontos do sistema. Esse conjunto de pontos, isto é, a região do modelo contínuo com exceção de seu contorno é chamada de domínio. As incógnitas a serem determinadas no problema são chamadas de variáveis dependentes. Algumas dessas variáveis dão origem a outras através de derivações. As primeiras recebem o nome de variáveis primárias. Essas, em cada ponto do domínio discreto, são denominadas graus de liberdade. Sendo assim, em um modelo contínuo gera-se

⁵ Usualmente a palavra modelo denota a reprodução de um sistema físico em escala real ou não. No atual contexto, entende-se modelo como uma equação matemática capaz de representar de forma aproximada o comportamento de um sistema regido por leis físicas.

⁶ A variável tempo é considerada no caso de fenômenos mutáveis de forma relevante no tempo.

um número infinito de graus de liberdade, cujo comportamento é regido por equações diferenciais. Já em um modelo discreto têm-se um número finito de graus de liberdade cujo comportamento é regido por equações algébricas⁷.

Para a resolução dos modelos matemáticos mencionados é necessário definir algumas condições do domínio. Para problemas estáticos, ou problema de valor de contorno (PVC), são definidas condições atribuídas ao contorno do domínio estudado. As condições que se referem às variáveis primárias são denominadas condições essenciais, cinemáticas ou de *Dirichlet*. Por outro lado, as condições referentes às variáveis secundárias recebem o nome de condições naturais, geométricas ou de Neumann (VALERIANO, 2018). Quando a variável tempo deve ser levada em consideração para o estabelecimento e resolução do problema, por exemplo, em sistemas de natureza dinâmica, trata-se de um problema de valor inicial (PVI). Geralmente tem-se como condição o valor conhecido da(s) variável(s) no instante inicial do problema.

É parte da função do engenheiro conceber um modelo matemático adequado ao problema. Ou seja, o modelo elaborado dependerá dos recursos disponíveis para a análise e do nível de precisão desejado para a representação do comportamento real, tendo em vista a impossibilidade de se elaborar um modelo matemático que expresse de maneira exata a realidade de um fenômeno físico em sua totalidade.

3.2. Definição e montagem do modelo computacional

Os modelos estruturais criados pelo programa utilizam elementos finitos unidimensionais de pórtico espacial. Como a análise permanece em regime linear, os deslocamentos totais podem ser obtidos através da soma dos deslocamentos estáticos com os dinâmicos.

De forma a otimizar recursos computacionais, tira-se proveito da simetria e do elevado grau de esparsidade das matrizes globais de rigidez, massa e amortecimento da estrutura. Assim, a diagonal e a parte triangular superior das mesmas são armazenadas na memória do computador em forma de perfil (*Skyline storage*). É necessária a elaboração de algoritmos

⁷ O custo computacional e o tratamento matemático necessário para a manipulação de equações algébricas são muito menores em relação às diferenciais. Entre outras razões, a abordagem discreta do problema é preferida no lugar de uma abordagem contínua, cuja solução analítica para sistemas complexos nem sempre é possível.

computacionais específicos, capazes de lidar com matrizes em perfil na resolução de sistemas de equações algébricas lineares, na multiplicação de matrizes, no método adaptado de integração de Newmark, na atualização da matriz de massa da estrutura a cada instante de tempo. O diagrama a seguir representa o processo típico de processamento para análise estrutural em um programa de computador.

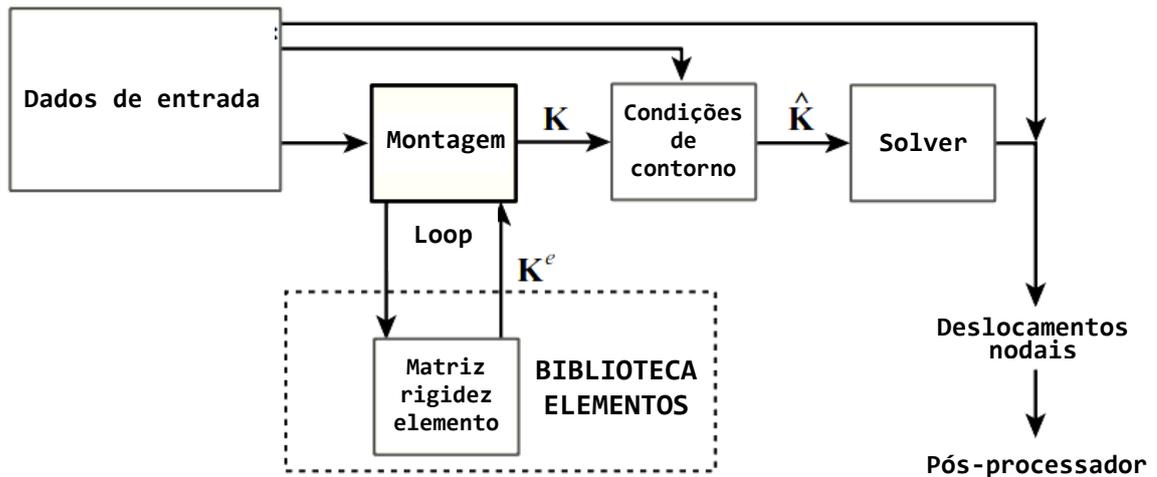


Figura 3.1 – Processo típico de um programa de computador para análise estrutural, adaptado de (FELIPPA, 2004)

3.2.1. Matriz de rigidez do elemento

Utiliza-se para os elementos a matriz de rigidez com consideração de deformação por cortante a seguir.

3.2.2. Matriz de massa do elemento

Optou-se pela utilização da matriz de massa consistente do elemento de pórtico espacial com inércia rotacional. Apesar de sua formulação relativamente complexa⁸, o pequeno esforço necessário para sua implementação computacional não justificaria o uso da matriz de massa discreta para o elemento. De acordo com PRZEMIENIECKI (1968) assume-se fundamentalmente para a dedução da matriz de massa de um elemento que a distribuição de deslocamento dinâmico no domínio do mesmo pode ser representada satisfatoriamente pela distribuição de deslocamento estático. Assim, através do teorema do deslocamento unitário tem-se para o cálculo da matriz de massa do elemento:

$$m = \int_V \rho N^T N dv \quad (3.3)$$

Onde N é o vetor formado pelas funções de forma referentes a todos os deslocamentos nodais do elemento e ρ a massa específica do material que constitui o elemento. Realiza-se a integral no volume total do elemento, resultando na matriz de massa equivalente a seguir.

1	$\frac{1}{3}$																		
2	0	$\frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5AI^2}$																	
3	0	0	$\frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5AI^2}$																
4	0	0	0	$\frac{J_z}{3A}$															
5	0	0	$-\frac{11I}{210} - \frac{I_y}{10AI}$	0	$\frac{I^2}{105} + \frac{2I_y}{15A}$														
6	0	$\frac{11I}{210} + \frac{I_z}{10AI}$	0	0	0	$\frac{I^2}{105} + \frac{2I_z}{15A}$													
7	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$												
8	0	$\frac{9}{70} - \frac{6I_z}{5AI^2}$	0	0	0	$\frac{13I}{420} - \frac{I_z}{10AI}$	0	$\frac{13}{35} + \frac{6I_z}{5AI^2}$											
9	0	0	$\frac{9}{70} - \frac{6I_y}{5AI^2}$	0	$-\frac{13I}{420} + \frac{I_y}{10AI}$	0	0	0	$\frac{13}{35} + \frac{6I_y}{5AI^2}$										
10	0	0	0	$\frac{J_z}{6A}$	0	0	0	0	0	$\frac{J_z}{3A}$									
11	0	0	$\frac{13I}{420} - \frac{I_y}{10AI}$	0	$-\frac{I^2}{140} - \frac{I_y}{30A}$	0	0	0	$\frac{11I}{210} + \frac{I_y}{10AI}$	0	$\frac{I^2}{105} + \frac{2I_y}{15A}$								
12	0	$-\frac{13I}{420} + \frac{I_z}{10AI}$	0	0	0	$-\frac{I^2}{140} - \frac{I_z}{30A}$	0	$-\frac{11I}{210} - \frac{I_z}{10AI}$	0	0	0	$\frac{I^2}{105} + \frac{2I_z}{15A}$							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12							

Symmetric

Figura 3.3 – Matriz de massa para um elemento de pórtico espacial, (PRZEMIENIECKI, 1968).

⁸ Ver (PRZEMIENIECKI, 1968).

3.2.3. Matriz de massa dos elementos de contato e atualização global

Formulou-se a matriz de massa dos elementos de contato somando-se os efeitos da matriz de massa do elemento com a(s) matriz(es) do(s) veículo(s) em coordenadas globais a cada instante de integração, o que configura o processo de atualização da matriz de massa. Como mencionado, consideram-se os veículos como massas concentradas.

$$[M] = [M_e] + \sum_{i=1}^K [N(x)]^T [m_i] [N(x)] \quad (3.4)$$

Onde, $[M]$ é a matriz de massa global da estrutura, $[M_e]$ a matriz de massa do elemento de contato, K o número de veículos pertencentes ao domínio (em contato) do elemento e no instante, $[N(x)]$ a matriz das funções de forma translacionais e $[m_i]$ a matriz de massa diagonal translacional do veículo i em contato com o elemento.

Pode-se entender o veículo como um elemento sem massa distribuída, formado apenas por uma massa concentrada na posição x do seu domínio. A Figura 3.4 esquematiza o acima descrito.

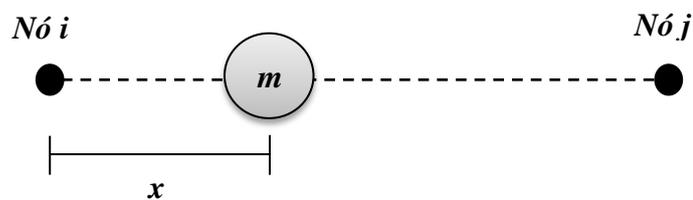


Figura 3.4 – Elemento de massa concentrada

A posição da massa é acrescida de $v\Delta t$ a cada instante de tempo, a matriz de massa do veículo é reformulada e, conseqüentemente, a matriz de massa global da estrutura é atualizada. O esquema completo do processamento é apresentado adiante.

sistema é de essencial importância, tendo em vista que o tempo computacional de resolução de um sistema de equações algébricas é proporcional ao quadrado de sua banda (RAMALHO, 1990). Minimizar a semi-largura de banda, em análise estrutural, equivale a alterar a numeração dos nós do modelo (renumeração nodal). Em outras palavras, cria-se um novo arranjo válido para o sistema de equações algébricas. Uma vez montada a(s) matriz(es) do problema, aplicam-se as devidas condições de contorno ao sistema de forma a eliminar sua singularidade.

3.3. O solver

3.3.1. Solução do sistema de equações algébricas lineares

A resolução do sistema de equações algébricas lineares configura o núcleo central da maioria dos programas de análise baseados em métodos discretos. Dentre os inúmeros métodos disponíveis para a resolução de sistemas de equações lineares, optou-se pelo método de Cholesky por ser eficientemente aplicável a matrizes simétricas e positivas definidas. Além disso, o método permite trabalhar na resolução do problema segundo as colunas da matriz, o que o torna de fácil adaptação à resolução de sistemas de equações armazenados em perfil (LIMA, 2017). Define-se uma tolerância numérica para se evitar problemas também numéricos na resolução do sistema. Desta forma, evita-se e/ou determina-se a singularidade do mesmo.

É apresentada a resolução de um sistema comum e não singular de equações algébricas lineares pelo método de Cholesky.

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (3.5)$$

Onde $[K]$ representa a matriz $n \times n$ de coeficientes do sistema de equações, $\{D\}$ o vetor das incógnitas do problema e $\{F\}$ o vetor de termos independentes. Como o sistema $[K]$ é simétrico e positivo definido, pode-se reescrever o problema da seguinte forma:

$$[K] = [C]^T[C] \quad (3.6)$$

Portanto, tem-se:

$$[C]^T[C]\{D\} = \{F\} \quad (3.7)$$

Seja $\{Y\}$ um vetor auxiliar $n \times 1$ (um),

$$\{Y\} = [C]\{D\} \quad (3.8)$$

Substitui-se (3.8) em (3.7),

$$[C]^T\{Y\} = \{F\} \quad (3.9)$$

A matriz $[C]$ é triangular superior e é conhecida como fator de Cholesky. A simples manipulação algébrica das equações anteriores permite a determinação do fator de Cholesky $[C]$. Este processo denomina-se triangularização¹⁰. Para $i = j$ tem-se:

$$C_{i,i} = \sqrt{K_{i,i} - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m,i}^2} \quad (3.10)$$

Para $i \neq j$ tem-se:

$$C_{i,j} = \frac{K_{i,j} - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m,i}C_{m,j}}{C_{i,i}} \quad (3.11)$$

Com a determinação do fator de Cholesky pode-se partir para a fase de substituição, a qual consiste na determinação dos coeficientes do vetor auxiliar Y apresentado na equação (3.8) com o procedimento definido na equação (3.12).

$$Y_i = \frac{F_i - \sum_{m=1}^{i-1} C_{m,i}Y_m}{C_{i,i}} \quad (3.12)$$

Em posse do vetor auxiliar $\{Y\}$, pode-se partir para a obtenção do vetor solução $\{D\}$, o qual configura a solução do sistema principal (3.5). Este processo é chamado de retrosubstituição.

¹⁰ Usualmente, é a parte do processo de solução do sistema de equações que requer maior tempo de processamento computacional.

$$D_i = \frac{Y_i - \sum_{m=i+1}^n C_{i,m} D_m}{C_{i,i}} \quad (3.13)$$

Com n sendo o número total de linhas ou colunas da matriz quadrada dos coeficientes, tem-se a solução do sistema de equações.

Sabe-se que grande parte dos problemas presentes na engenharia estrutural pode ser resolvida de forma satisfatória através da análise estática linear. Considera-se esta como um caso particular da dinâmica. Desta forma, já que a mera resolução do sistema algébrico de equações lineares configura uma solução estática, adicionou-se ao programa computacional em questão esta capacidade.

3.3.2. O método de Newmark

O processo de integração de Newmark é amplamente utilizado na resolução numérica de equações diferenciais em problemas de dinâmica estrutural e propagação de ondas. Como mencionado anteriormente, trata-se de um método implícito, métodos que tendem a ser incondicionalmente estáveis, conforme explicado mais adiante. Em contrapartida, métodos explícitos tendem a ser condicionalmente estáveis e utilizados com intervalos de integração extremamente pequenos em análises de eventos de curta duração. Assim, métodos incondicionalmente estáveis podem ser usados com maiores intervalos de integração. Conseqüentemente, um menor número de iterações se faz necessário para a resolução do problema, apesar do maior tempo computacional necessário para cada iteração. Em linhas gerais, o custo da solução é menor para métodos implícitos além destes proporcionarem, geralmente, soluções mais robustas para o problema (BATHE e NOH, 2019).

O presente método é implícito por ser necessário conhecer todas as variáveis do problema no instante $t - \Delta t$, sendo Δt o intervalo de integração, para que se possam atender as condições de equilíbrio do mesmo.

$$\mathbf{K}' \mathbf{u}_i = \mathbf{f}'_i \quad (3.14)$$

Onde, \mathbf{K}' , \mathbf{u}_i e \mathbf{f}'_i representam a matriz de pseudorigidez do sistema, o vetor de deslocamentos do instante i e o vetor de forças pseudoestáticas no instante i , respectivamente. É incondicionalmente estável devido à independência entre o tamanho do intervalo de integração com a estabilidade numérica do método. Isto não é o mesmo que independência

entre o tamanho do intervalo de integração e a precisão aceitável da resposta numérica. De maneira geral, para métodos como este, adota-se como tamanho do intervalo de integração uma fração do menor período natural relevante T_n na resposta harmônica do sistema. Como estimativa inicial pode-se adotar $\Delta t = T_n/10$.

Utilizaram-se parâmetros numéricos de Newmark que permitem a estabilidade incondicional do método e que baseiam-se na consideração de uma aceleração média $\ddot{\mathbf{u}}_m$ ¹¹ entre o intervalo $[t, t + \Delta t]$, sendo:

$$\ddot{\mathbf{u}}_m = \frac{1}{2} [\ddot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)] \quad (3.15)$$

Isto é válido para um sistema dinâmico qualquer. A Figura 3.6 apresenta a convergência do método de Newmark com a solução analítica para diferentes tamanhos de intervalos de integração.

¹¹ Para a formulação do método, ver (NEWMARK e CHAN, 1952).

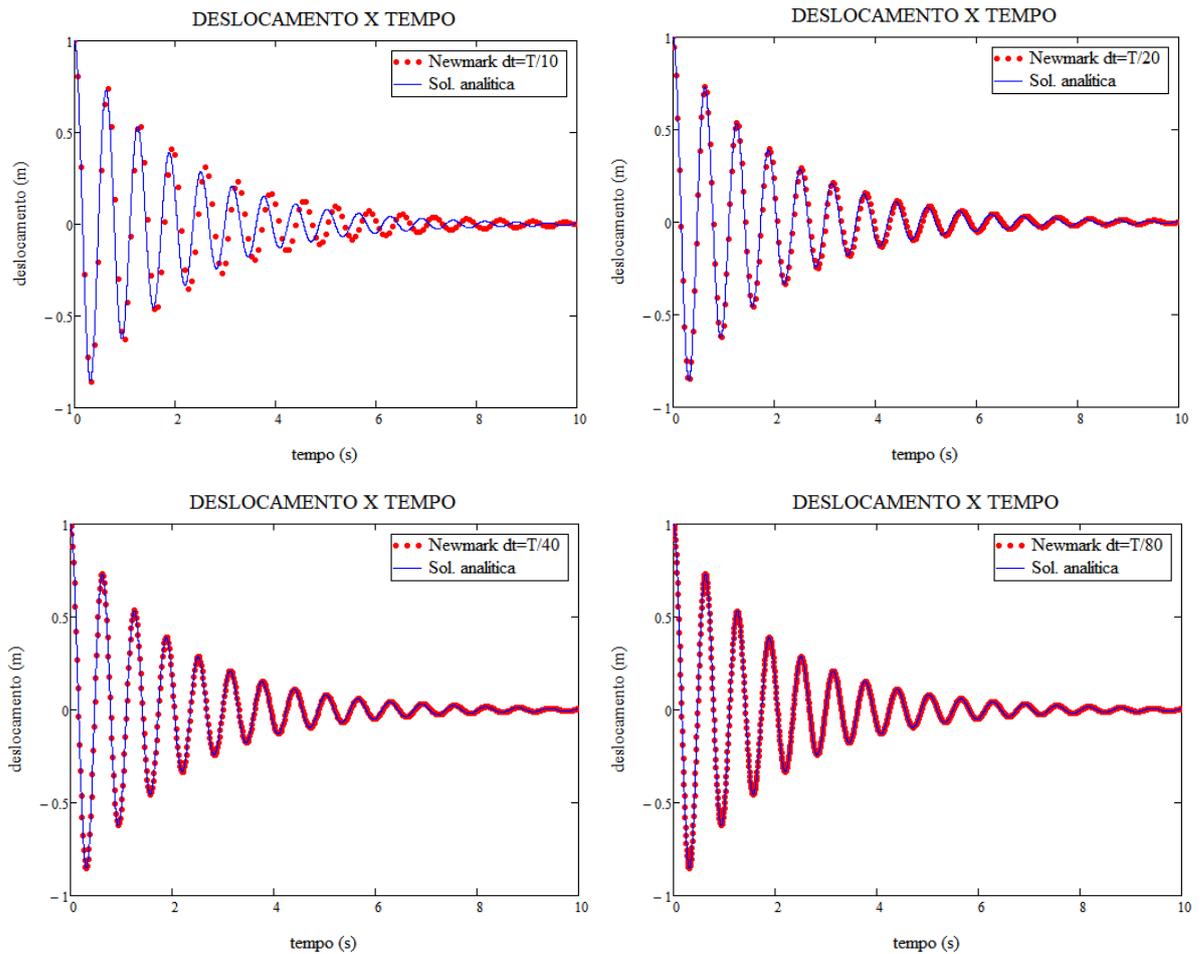


Figura 3.6 – Convergência do método de Newmark

Foram feitas algumas adaptações na implementação computacional do método de Newmark para a resolução do problema dinâmico das massas móveis. As rotinas foram desenvolvidas de maneira que se pudesse trabalhar com matrizes armazenadas em forma de perfil. Também foi adicionada ao processo a atualização da matriz de massa da estrutura como consequência do cálculo da posição das massas no domínio do modelo e formulação das respectivas matrizes a cada intervalo de integração. Desta maneira, monta-se um novo sistema (3.14) a cada iteração do método. O diagrama da Figura 3.7 resume, de forma simplificada, o processo realizado a cada iteração.

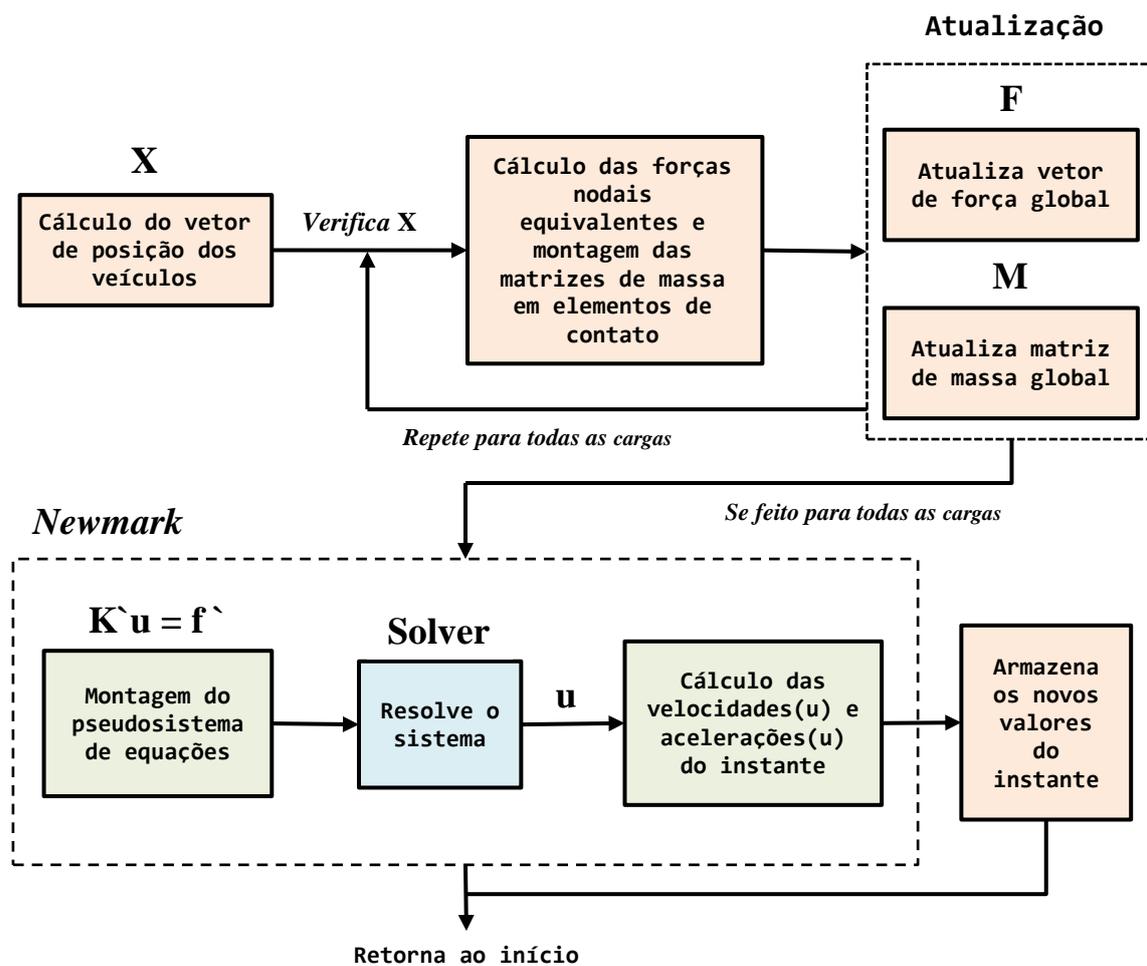


Figura 3.7 –Diagrama simplificado da solução do problema das massas móveis

Como mostrado no diagrama, calcula-se o vetor de posições das cargas/massas que representam os veículos. Verificam-se para cada elemento do vetor \mathbf{X} suas posições em relação à estrutura e também suas posições relativas aos elementos que se encontram (de contato), caso existam. Uma vez verificadas as posições e determinados os elementos de contato, calculam-se as forças nodais equivalentes e as matrizes de massa do(s) elemento(s) de contato. Assim, monta-se o vetor de força global da estrutura e atualiza-se a matriz de massa global em função das matrizes de massa calculadas anteriormente para os elementos de contato. Com as matrizes de rigidez, massa, amortecimento da estrutura, vetor de força global, velocidades e acelerações nodais do instante anterior, é possível montar o pseudossistema de equações algébricas de Newmark. Resolve-se então o sistema para a obtenção do vetor de deslocamentos do instante atual que por sua vez, possibilita o cálculo dos novos valores das velocidades e acelerações do instante. Armazenam-se os novos valores obtidos no instante

para futura visualização da resposta dinâmica da estrutura. Por fim, repete-se o processo até o número de iterações desejadas.

3.3.3. Obtenção das velocidades críticas

A velocidade crítica é a velocidade de passagem do veículo que gera uma frequência excitadora próxima às frequências naturais da estrutura ou múltiplos inteiros das mesmas. Condições próximas à ressonância causam amplificações na resposta da estrutura. Estas condições podem ser detectadas não somente na análise da resposta do histórico no tempo, mas também através da obtenção das velocidades críticas do sistema.

A consideração da(s) massa(s) do(s) veículo(s) como parte do sistema ocasiona uma redução da frequência fundamental da estrutura, conseqüentemente uma redução da velocidade crítica do sistema. Ressalta-se que diferentes conjuntos estrutura-veículo possuem diferentes velocidades críticas, as quais não podem ser atribuídas à estrutura ou ao veículo de forma independente.

Para a obtenção das velocidades críticas soluciona-se o problema anterior (massas móveis) repetidas vezes variando-se a velocidade de passagem do veículo em incrementos de velocidades ΔV . A cada iteração armazenam-se os valores máximos das respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura. Ao final, plota-se o gráfico desejado de valores máximos x velocidade do veículo.

3.3.4. Resolução do problema generalizado de autovalor

A solução do problema matemático de autovalor generalizado é de extrema importância prática para a engenharia. No caso do problema dinâmico aqui abordado, possibilita a obtenção de propriedades dinâmicas fundamentais do sistema estrutural como frequências naturais e modos de vibração. A solução deste tipo de problema consiste em encontrar as raízes do polinômio característico. Segundo Paolo Ruffini, tal tarefa configura uma impossibilidade ao se tratar de polinômios acima de um certo grau. Sendo assim, soluções aproximadas se tornam necessárias. Existem métodos numéricos de solução baseados em iteração de vetores como iteração inversa e iteração direta; baseados em transformações lineares como Jacobi; métodos baseados em técnicas de iteração polinomial, *shifting* e métodos baseados em iteração por subespaço que consiste em uma combinação dos anteriores. Para o presente trabalho, optou-se pela implementação do método de Jacobi para a realização de análise modal pelo programa LOADYN. Tratando-se de um problema

generalizado de autovalores, pode-se obter a solução através de resolução de dois problemas *standarts* de autovalor ou, como implementado, pode-se obter a solução através da transformação simultânea das duas matrizes do problema. Assim, a resolução da equação (3.16) se resume a sucessivas transformações lineares aplicadas às matrizes K e M de maneira a zerar os termos fora da diagonal principal das mesmas.

$$\mathbf{K}\Phi = \lambda\mathbf{M}\Phi \quad (3.16)$$

Sabe-se que a matriz formada pelos autovetores do sistema é ortogonal e forma uma base completa no espaço n dimensional, o que permite a diagonalização do mesmo. Para sistemas normalizados em relação à matriz de massa e sendo \mathbf{I} a matriz identidade, pode-se escrever:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda \quad (3.17)$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.18)$$

Como mencionado, busca-se diagonalizar as matrizes K e M através de sucessivas iterações de forma a se obter a matriz espectral Λ e a matriz modal Φ . Sendo R uma matriz que representa a transformação linear responsável pela diagonalização devendo ser atualizada a cada iteração i , pode-se escrever:

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{R}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{R}_i \quad (3.19)$$

$$\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{R}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{R}_i \quad (3.20)$$

$$\Phi = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \dots \mathbf{R}_i \quad (3.21)$$

Teoricamente, para uma solução apropriada do problema apresentado faz-se necessário:

$$\mathbf{K}_i \rightarrow \Lambda \quad e \quad \mathbf{M}_i \rightarrow \Phi \quad \text{quando} \quad i \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

Em termos práticos, estabelece-se uma tolerância numérica aceitável como critério de parada para quando uma precisão satisfatória for atingida. Depois de atingida a tolerância, tem-se as soluções sendo $i+1$ a última iteração:

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \left(\frac{\mathbf{K}_{i+1}}{\mathbf{M}_{i+1}} \right) \quad (3.23)$$

$$\mathbf{\Phi} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{M}_{i+1}}} \right) \quad (3.24)$$

Optou-se pela implementação do método de Jacobi em detrimento dos anteriormente mencionados por sua relativa simplicidade, beleza, estabilidade e eficiência para pequenos modelos. O algoritmo em questão foi implementado de maneira a lidar com sistemas positivos definidos e sistemas semi-definidos positivos. Ou seja, sistemas não singulares e singulares, respectivamente. O que implica na consideração não somente de modos elásticos, ou em outras palavras, que possuem energia de deformação, mas também na consideração de modos de corpo rígido, caso existam.

3.4. Aspectos computacionais

O processo de montagem das matrizes globais do problema e a resolução do sistema de equações já foram descritos em itens anteriores do presente trabalho. Nesta seção, aborda-se o tema em um maior nível de resolução, porém mantendo-se dentro do escopo desta dissertação.

Sparse solvers é o nome dado aos algoritmos encarregados de resolver sistemas esparsos de equações. Pode-se referir aos sistemas armazenados com o método aqui utilizado como *Skyline storage* ou *skymatrix*. Como mencionado anteriormente, *Sparse solvers* tiram grande vantagem do alto grau de esparsidade dos sistemas de equações encontrados na análise estrutural em termos de armazenamento e tempo de processamento. Na prática a ordem dos sistemas de equações pode ser relativamente grande. Para padrões atuais, sistemas na ordem de 10^3 a 10^4 equações são resolvidos por programas comerciais de forma rotineira.

Se a matriz de rigidez \mathbf{K} de ordem \mathbf{N} do problema for armazenada e processada em sua forma cheia e sem o aproveitamento de sua simetria, tempo e memória disponível

rapidamente se tornam fatores limitantes à medida que N aumenta. Seria necessária a disponibilidade de N^2 espaços na memória. Se cada espaço tem um tamanho de 8 bytes para armazenar pontos flutuantes de precisão dupla, seria necessário um total de aproximadamente 800 *MegaBytes* apenas para o armazenamento total dos coeficientes de um sistema de ordem $N=10^4$. Na etapa de fatorização de K se requer aproximadamente $N^3/6$ operações de ponto flutuante¹² (FELIPPA, 2004). Atualmente, computadores pessoais podem executar mais de 10^9 dessas operações por segundo (*FLOPS*). Os fatores de tempo apresentados nas Figura 3.8 e Figura 3.9 refletem o poder computacional de 1998 e consideram que todo o armazenamento necessário para o sistema é mantido na memória primária do computador (RAM). Observa-se que o uso de sistemas cheios e de ordem acima de 10^4 geram dificuldades práticas que impossibilitam sua resolução.

Ordem matriz (N)	Armazenamento (prec. Dupla)	Operações (FLOPS)	Tempo (Desktop)	Tempo (supercomputador)
10^4	800 MB	$10^{12}/6$	3 hrs	2 min
10^5	80 GB	$10^{15}/6$	4 meses	30 hrs
10^6	8 TB	$10^{18}/6$	300 anos	3 anos

Figura 3.8 – Tempo de solução e armazenamento para matrizes cheias, adaptado de (FELIPPA, 2004)

Se uma matriz esparsa de ordem N é armazenada em S espaços de memória, diz-se que $B=S/N$, Sendo B chamado de largura de banda média. A fatorização de uma matriz esparsa precisa de aproximadamente $\frac{1}{2}NB^2$ de operações de ponto flutuante. Para problemas bidimensionais pode-se considerar B estando na ordem de \sqrt{N} . A Figura 3.9 mostra as diferenças de recursos necessários para a solução desses diferentes sistemas.

¹² Uma operação de ponto flutuante (*FLOP*), convencionalmente, é definida como um par (multiplicação, adição) com um índice associado e operações de movimento de dados.

Ordem matriz (N)	Armazenamento (prec. Dupla)	Operações (FLOPS)	Tempo (Desktop)	Tempo (supercomputador)
10^4	8 MB	$10^8/2$	5 seg	0.05 seg
10^5	240 MB	$10^{10}/2$	8 min	5 seg
10^6	8 GB	$10^{12}/2$	15 hrs	8 min

Figura 3.9 – Tempo de solução e armazenamento para matrizes esparsas para $B = \sqrt{N}$, adaptado de (FELIPPA, 2004)

4. VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

4.1. Validação do método de Newmark

Inicialmente, por facilidade de visualização dos resultados, programou-se o método de integração de Newmark em MATLAB, cujo código veio a ser reescrito em linguagem Pascal posteriormente para uso no programa *LOADYN*. Compararam-se as soluções numéricas obtidas em MATLAB com as soluções, também numéricas, de programas comerciais. Para esta comparação criou-se um modelo simples de pórtico sujeito a diferentes forças dinâmicas $F(t)$.

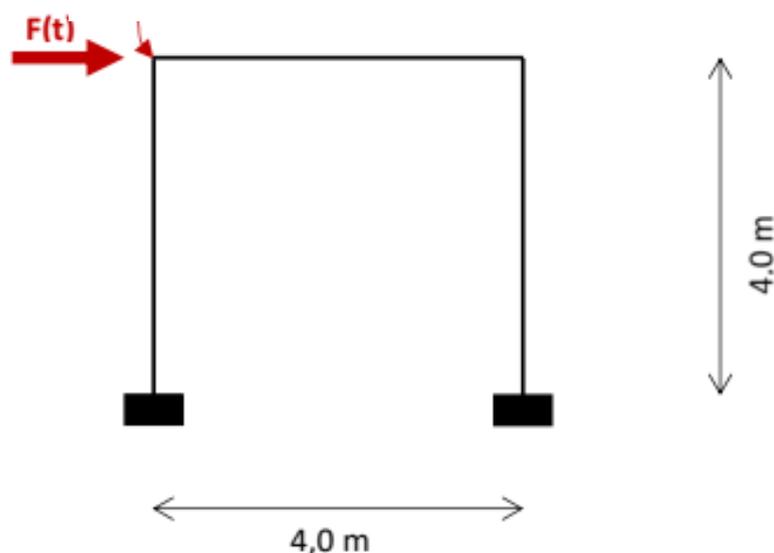


Figura 4.1 – Modelo de pórtico utilizado para comparação das soluções.

Os gráficos de deslocamento horizontal no tempo do nó de aplicação de $F(t)$ são apresentados para diferentes situações conforme descrito adiante.

Para situação de carga harmônica sem amortecimento tem-se:

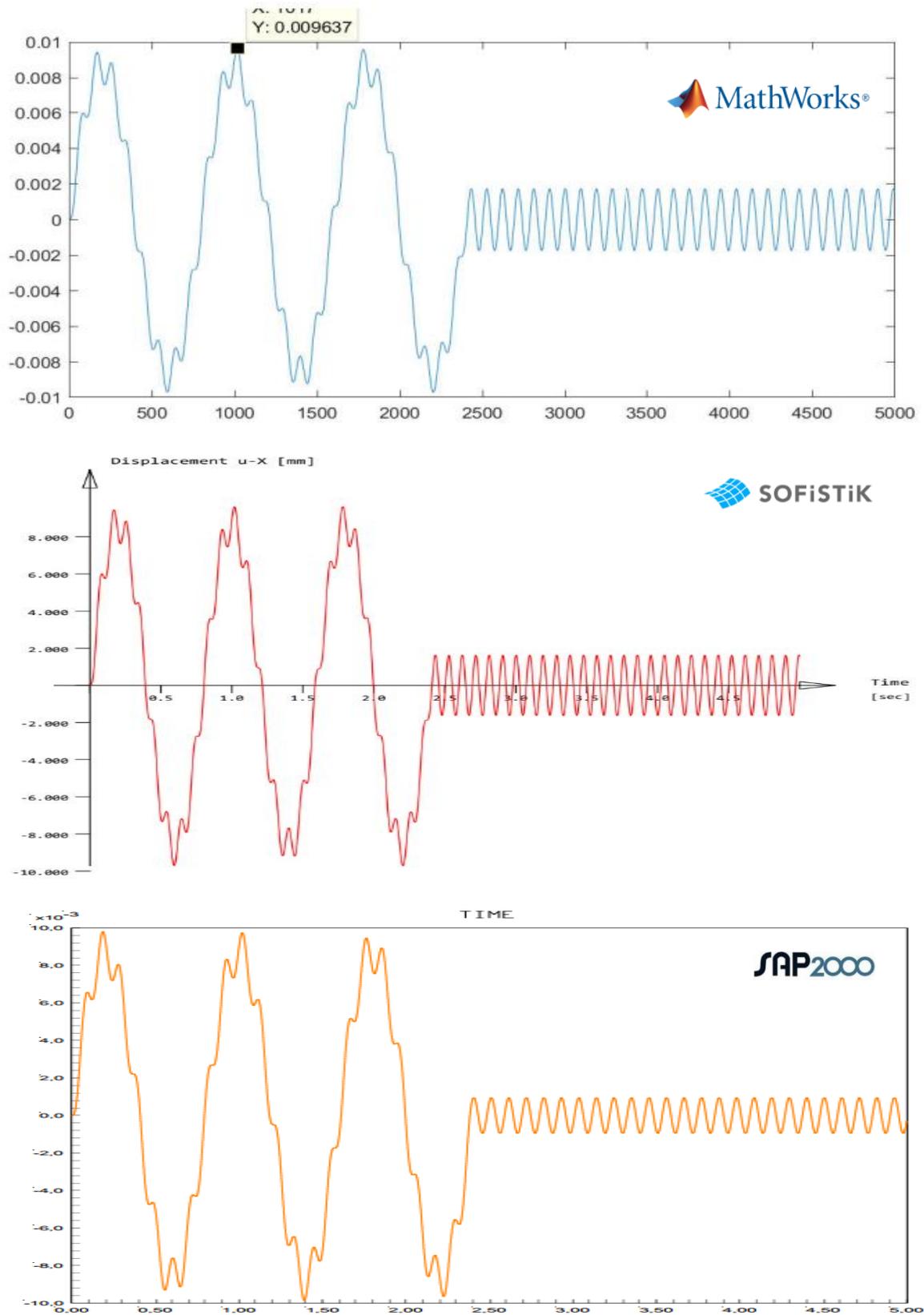


Figura 4.2 – Comparação para carga harmônica sem amortecimento.

Para situação de carga harmônica com amortecimento tem-se:

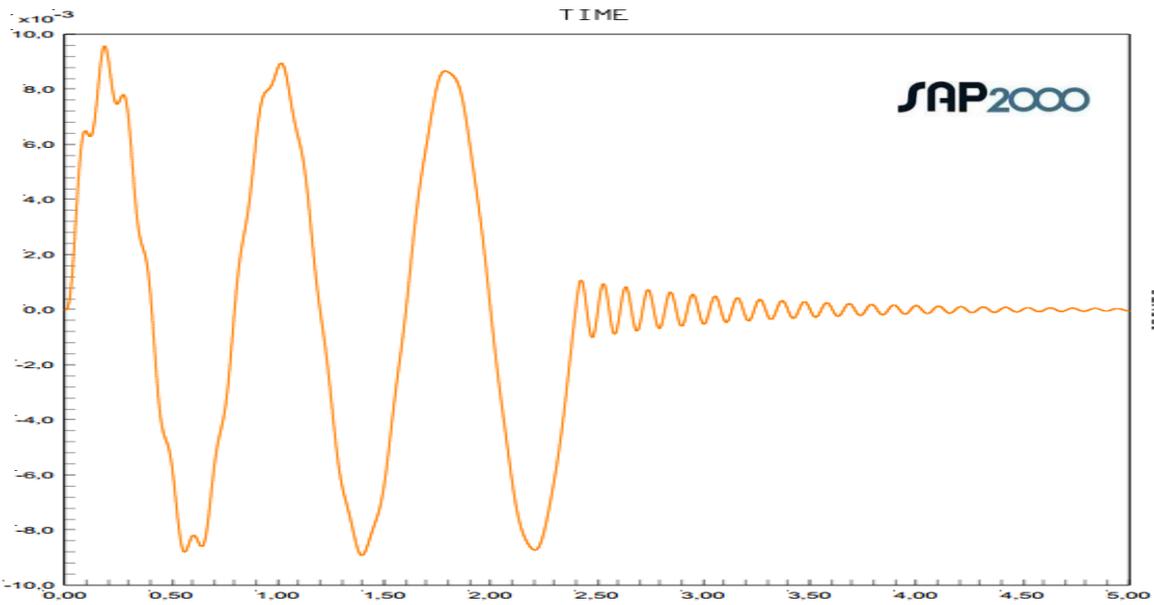
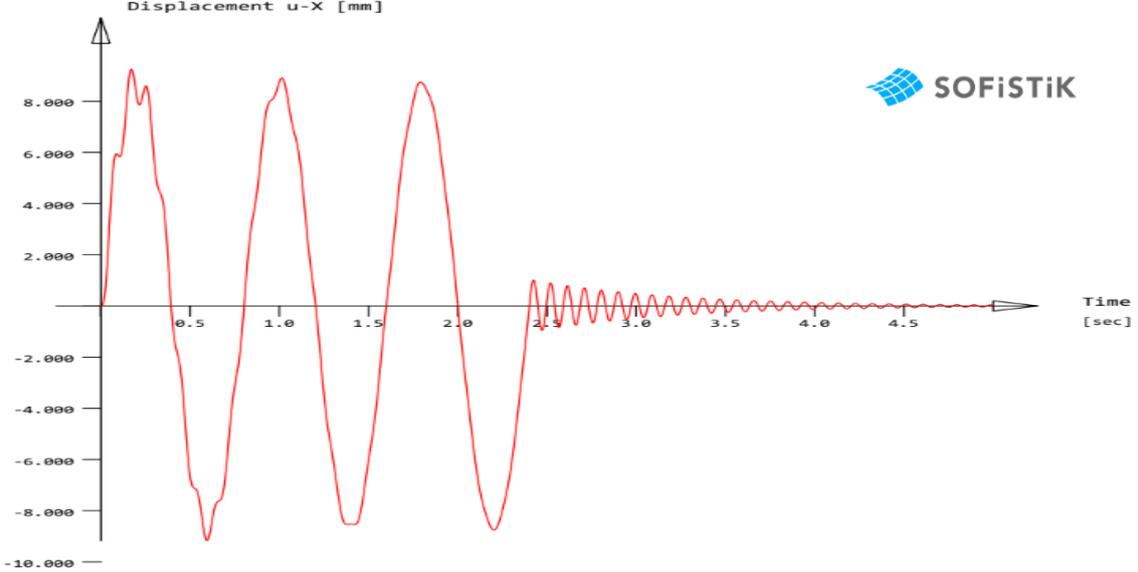
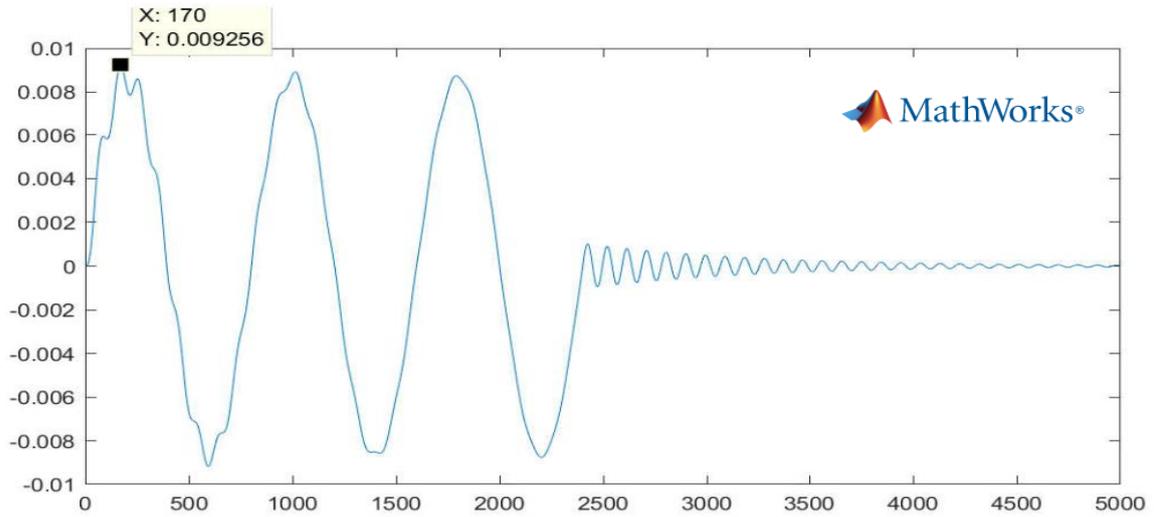


Figura 4.3 – Comparação para carga harmônica com amortecimento.

Para situação de carga impulsiva sem amortecimento tem-se:

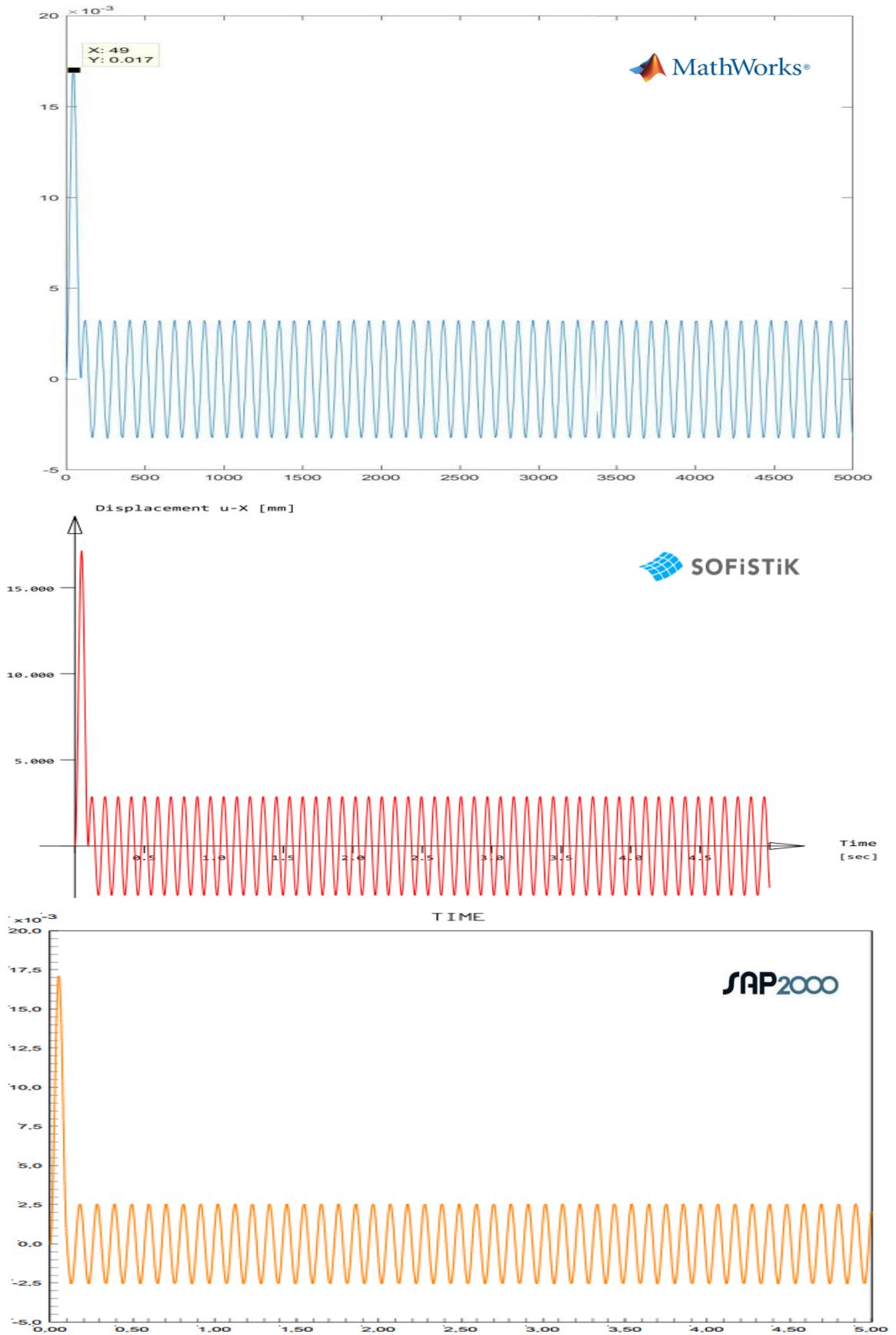


Figura 4.4 – Comparação para carga impulsiva sem amortecimento.

Para situação de carga impulsiva com amortecimento tem-se:

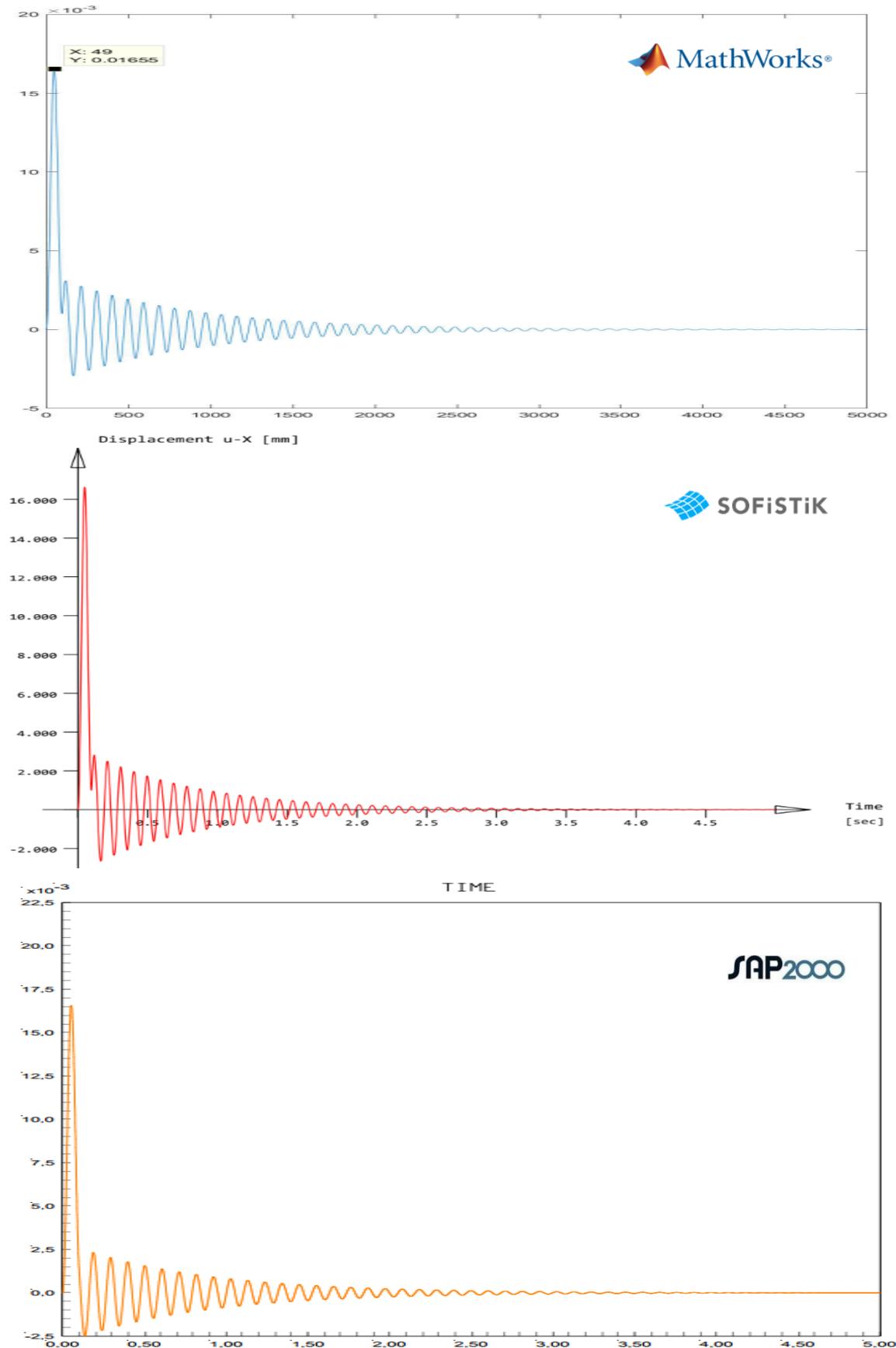


Figura 4.5 – Comparação para carga impulsiva com amortecimento.

As respostas obtidas se mostram satisfatórias em comparação com as respostas fornecidas pelos programas comerciais.

4.2. Validação para o problema da carga móvel única

O presente item consiste na validação da solução do problema da carga móvel apresentado anteriormente. Neste caso, comparou-se a solução numérica obtida pelo programa *LOADYN* para uma viga simplesmente apoiada discretizada em 20 elementos com a solução analítica do problema¹³. As soluções analítica e numérica, respectivamente, do histórico no tempo para o deslocamento vertical do nó central da viga com a passagem da carga são apresentadas nas figuras a seguir.

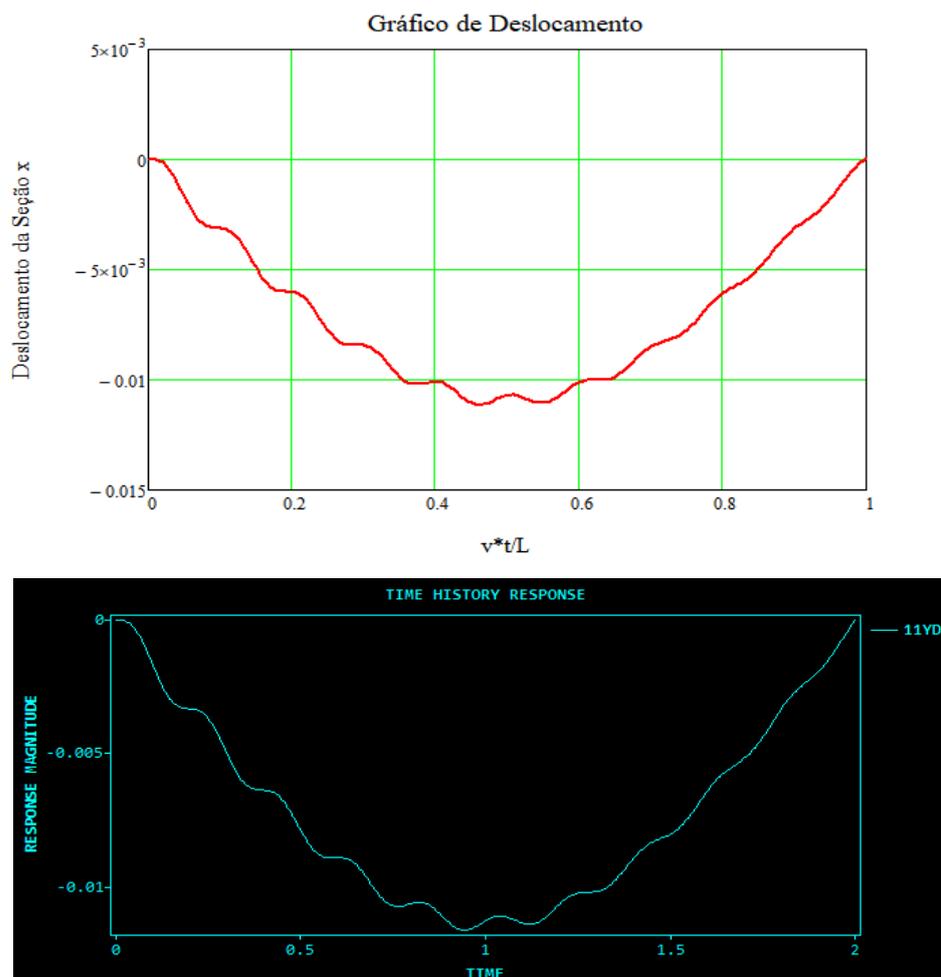


Figura 4.6 – Deslocamento vertical analítico e numérico para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

¹³ As propriedades mecânicas e geométricas da viga em exemplo assim como os parâmetros numéricos da análise são apresentados no apêndice B. Adotou-se o mesmo modelo estrutural para a validação em itens subsequentes.

Soluções do histórico no tempo para a velocidade vertical do nó central:

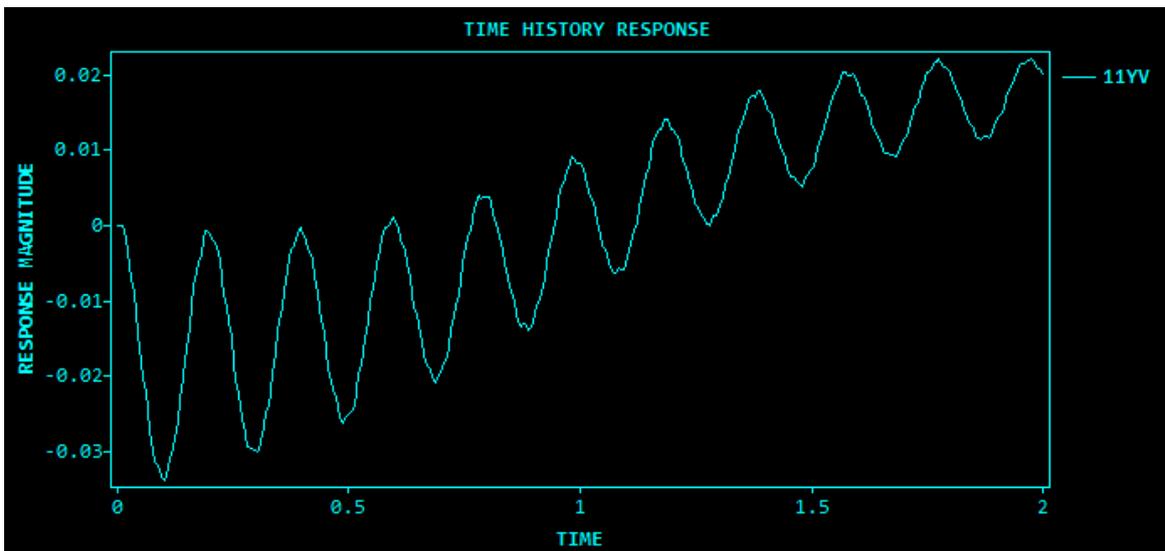
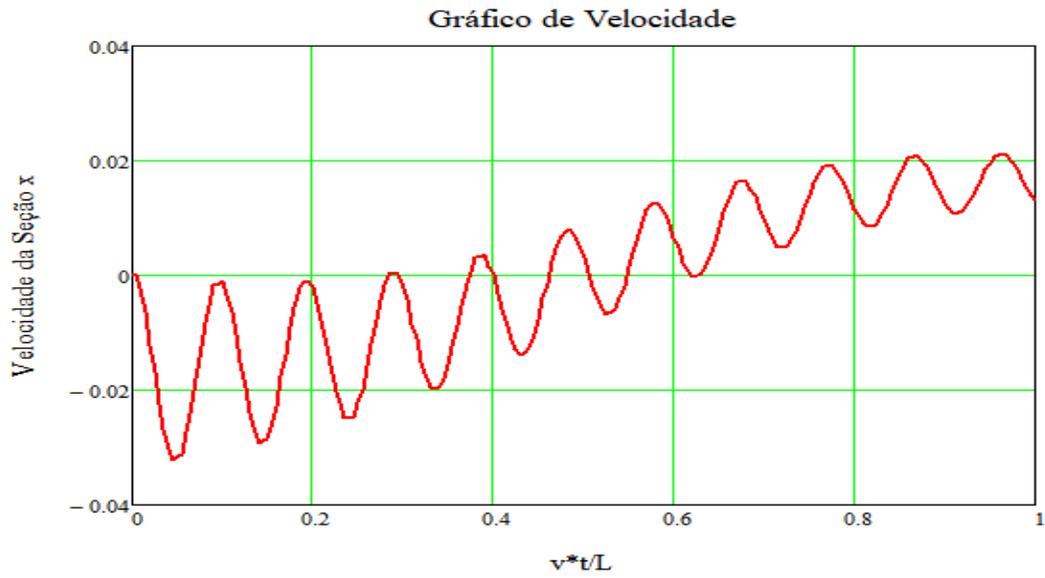


Figura 4.7 – Velocidade vertical analítica e numérica para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

Soluções do histórico no tempo para a aceleração vertical do nó central:

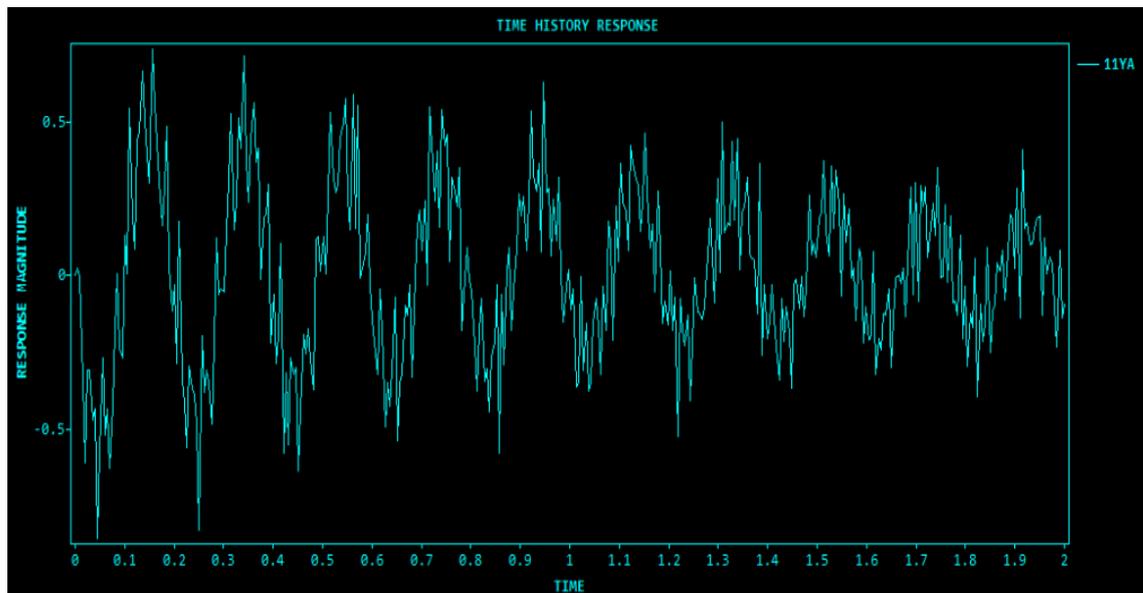
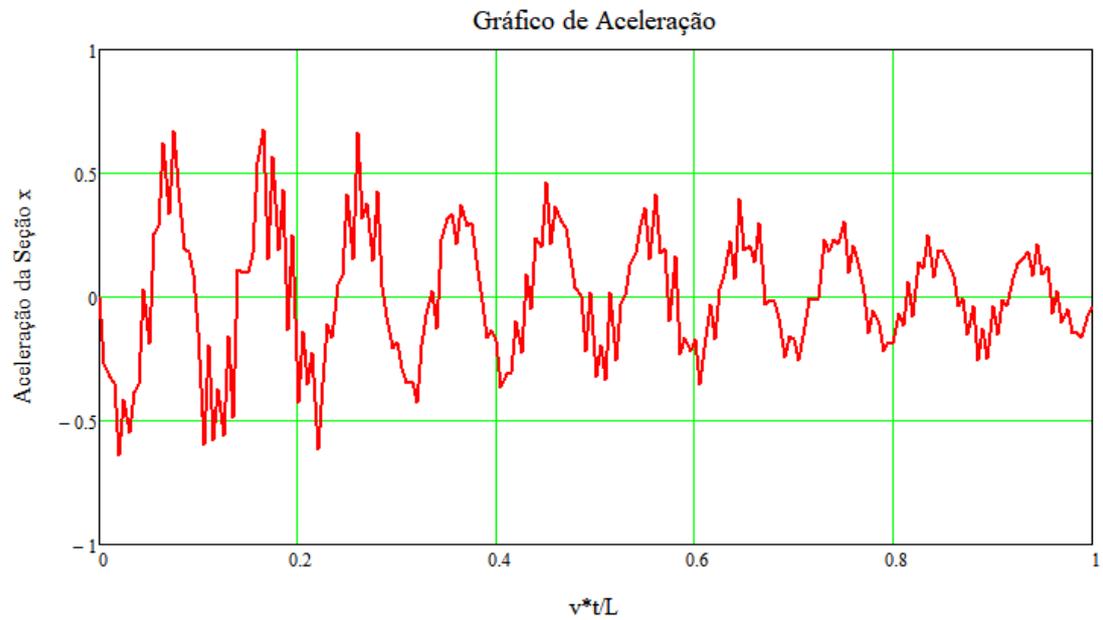


Figura 4.8 – Aceleração vertical analítica e numérica para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

Soluções do histórico no tempo para o momento fletor do nó central:

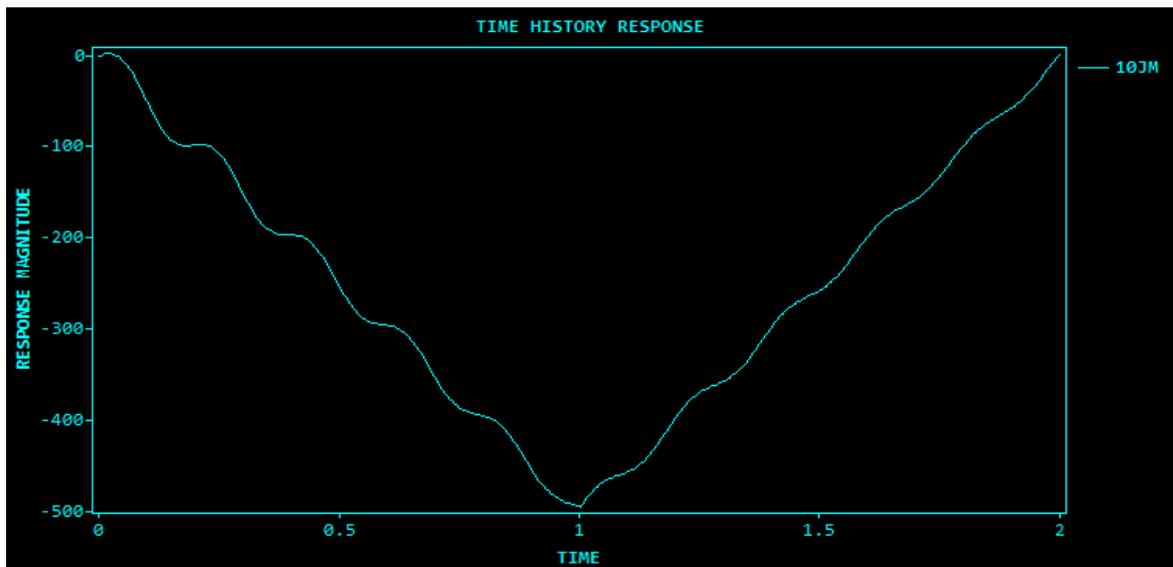
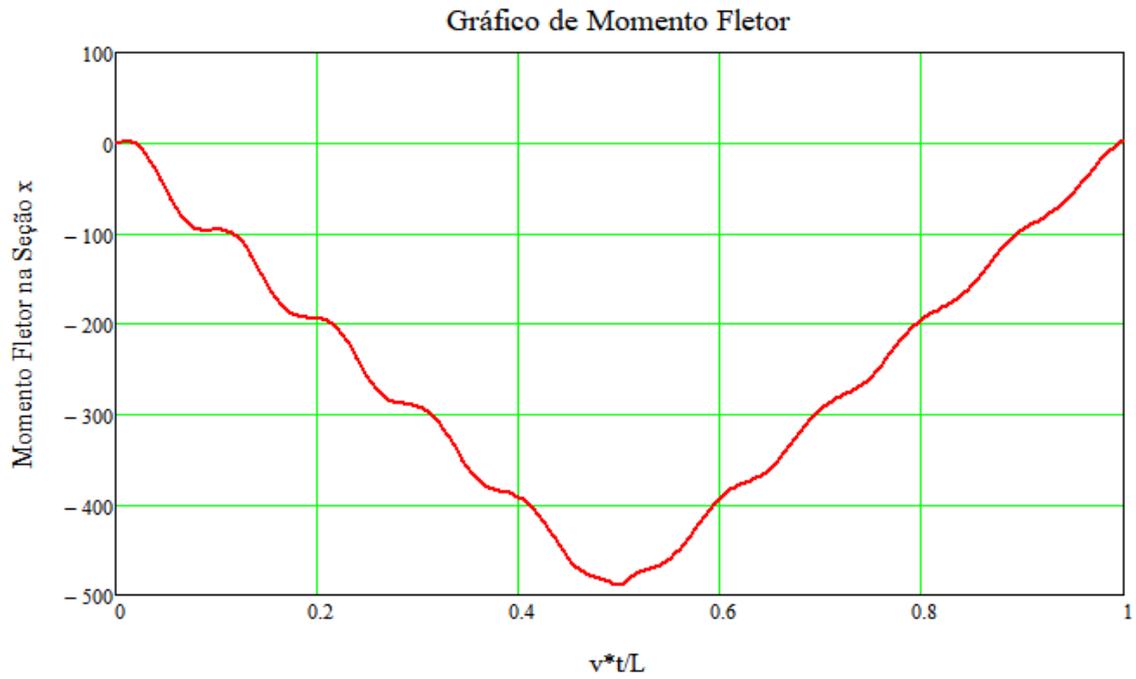


Figura 4.9 – Momento fletor analítico e numérico para o modelo de viga biapoada com 20 elementos

Soluções do histórico no tempo para o esforço cortante do nó central:

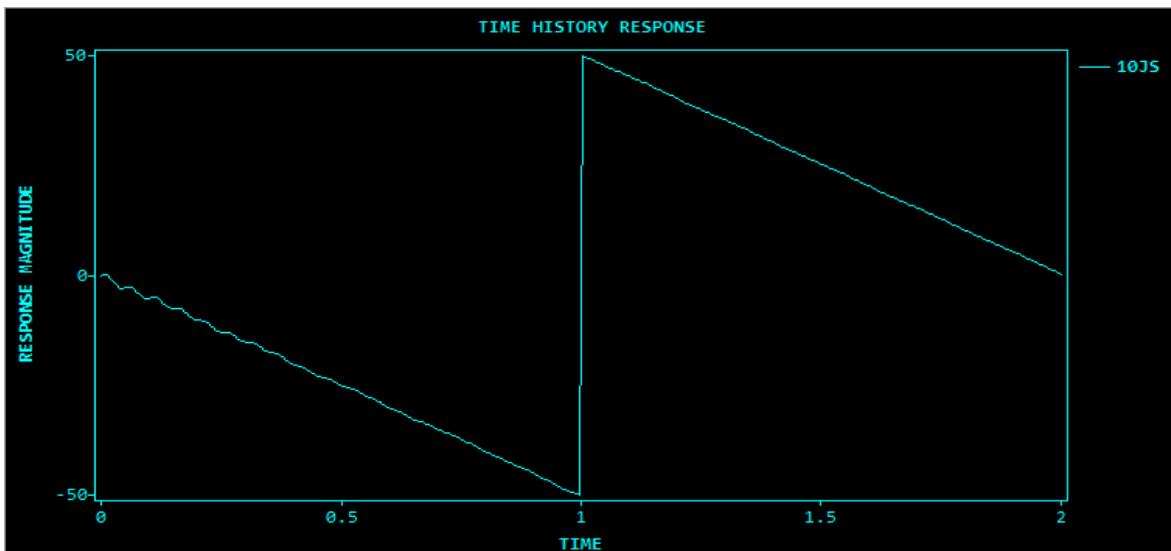
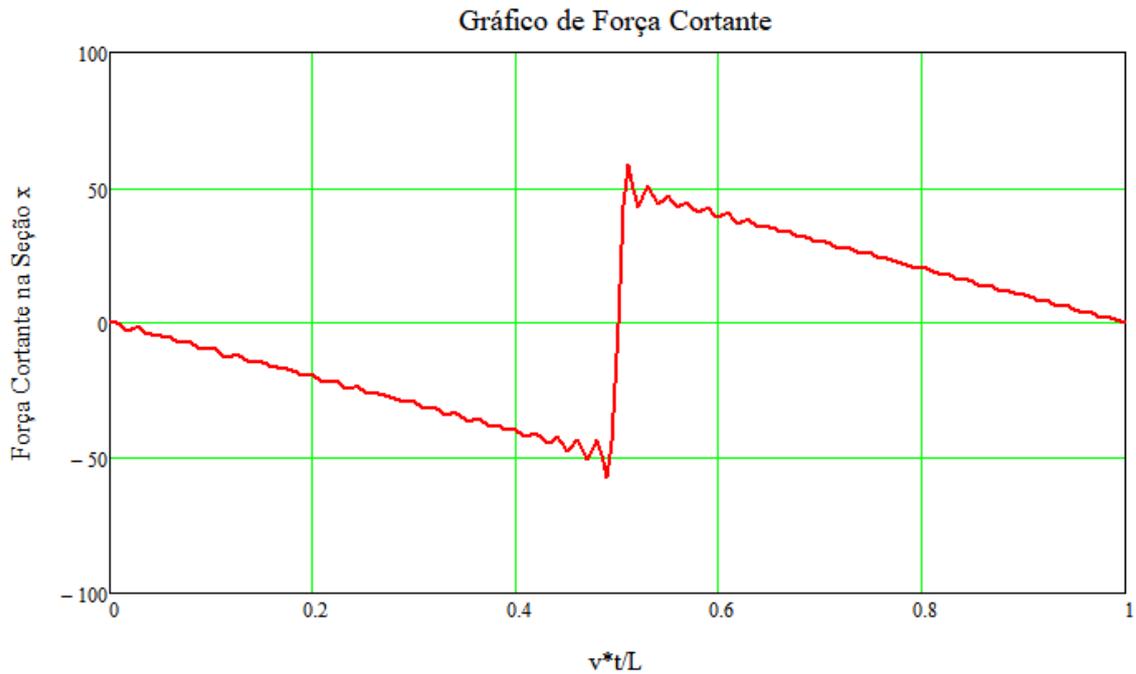


Figura 4.10 – Esforço cortante analítico e numérico para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

Os resultados mostrados sugerem precisão e comportamento aceitáveis para as soluções numéricas obtidas e garantem a validação do programa para o caso de carga móvel única.

4.3. Validação para o problema da massa móvel única

Esta seção busca validar a solução numérica do problema de viga simplesmente apoiada sob ação de massa móvel única. Para isso, utiliza-se o mesmo modelo estrutural e os mesmos parâmetros de integração numérica do item anterior, diferindo somente na consideração dos efeitos inerciais gerados pela massa móvel. As soluções analítica e numérica, respectivamente, do histórico no tempo para o deslocamento vertical do nó central da viga com a passagem da massa são apresentadas nas figuras a seguir.

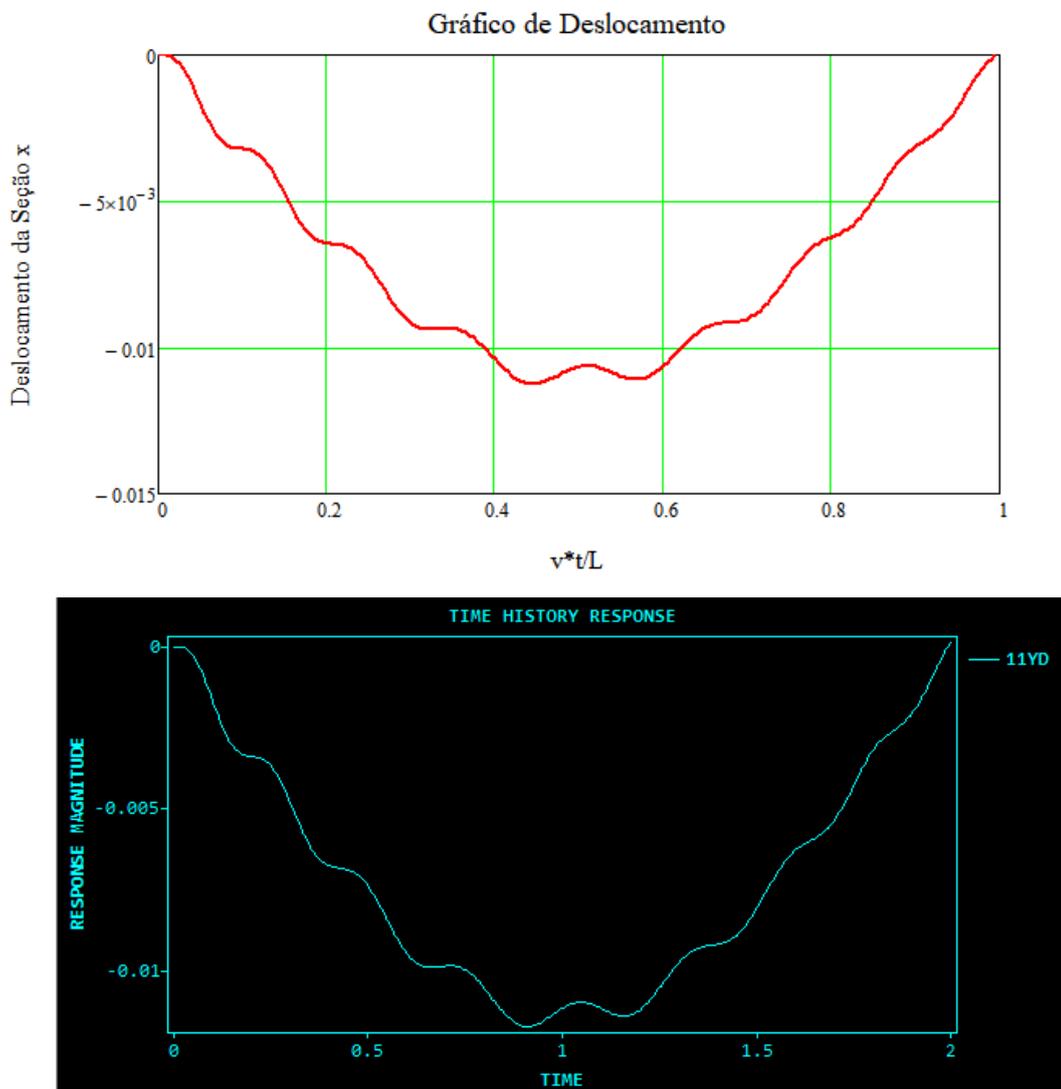


Figura 4.11 – Deslocamento vertical analítico e numérico com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

Soluções do histórico no tempo para a velocidade vertical do nó central:

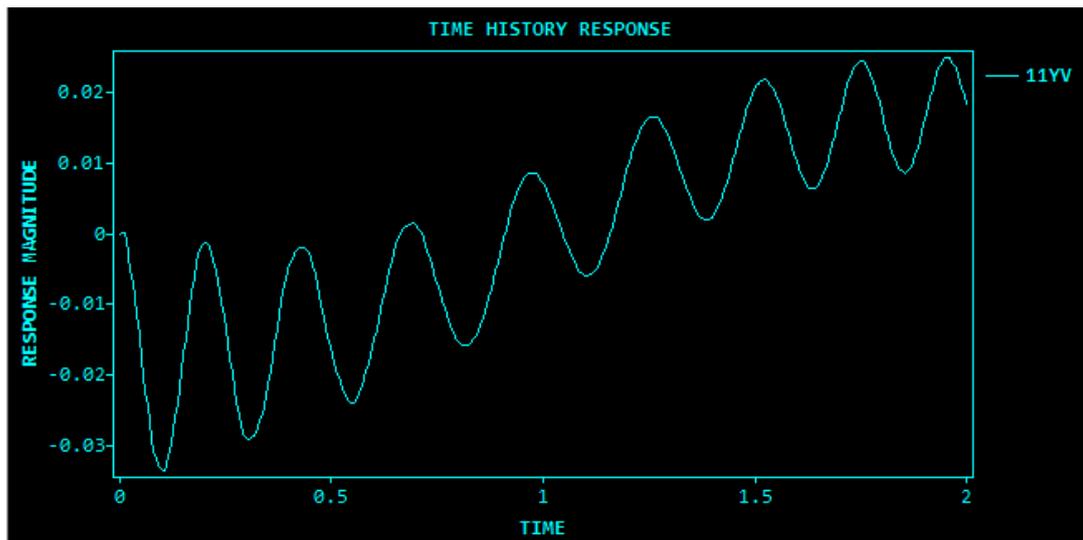
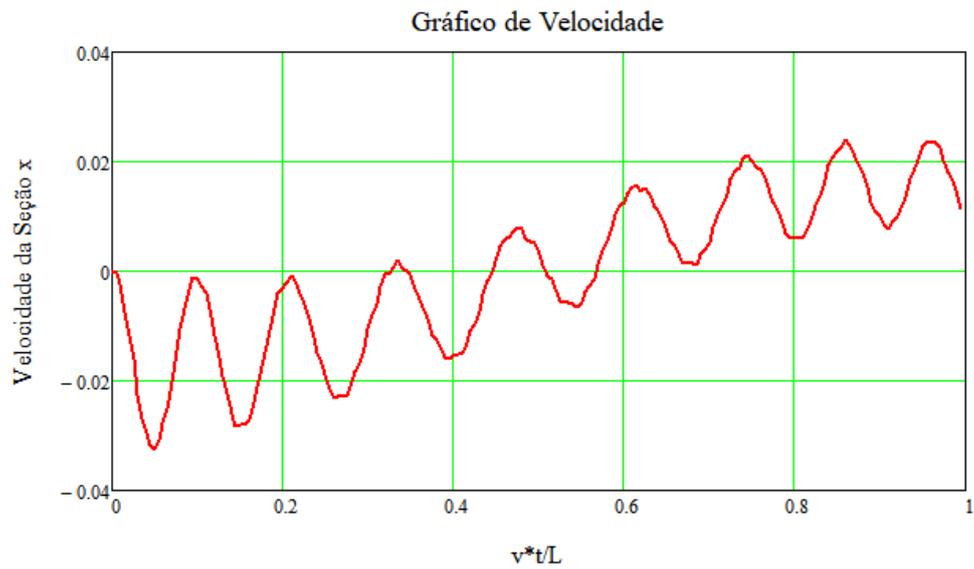


Figura 4.12 – Velocidade vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiaada com 20 elementos

Soluções do histórico no tempo para a aceleração vertical do nó central:

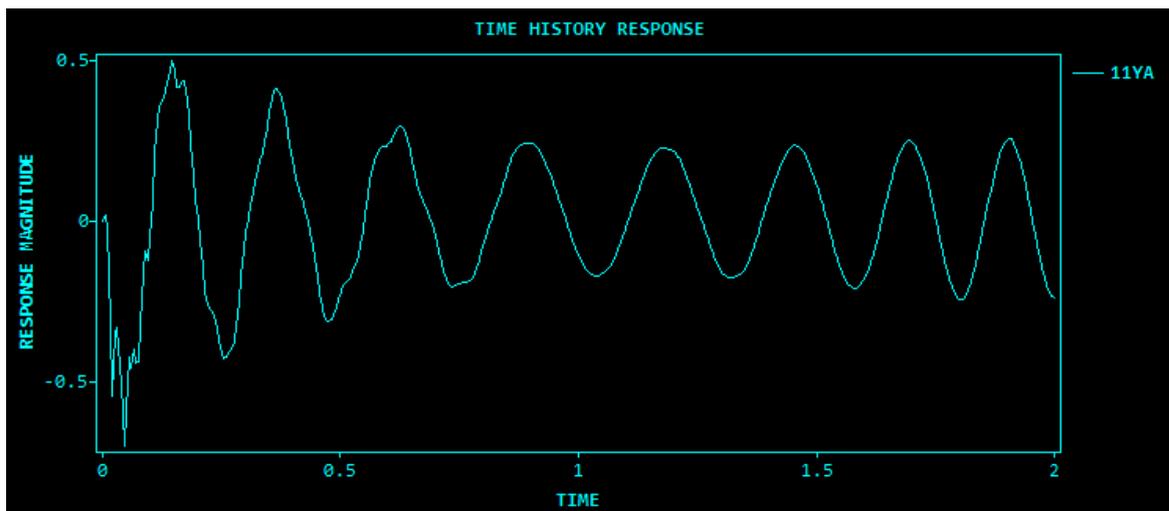
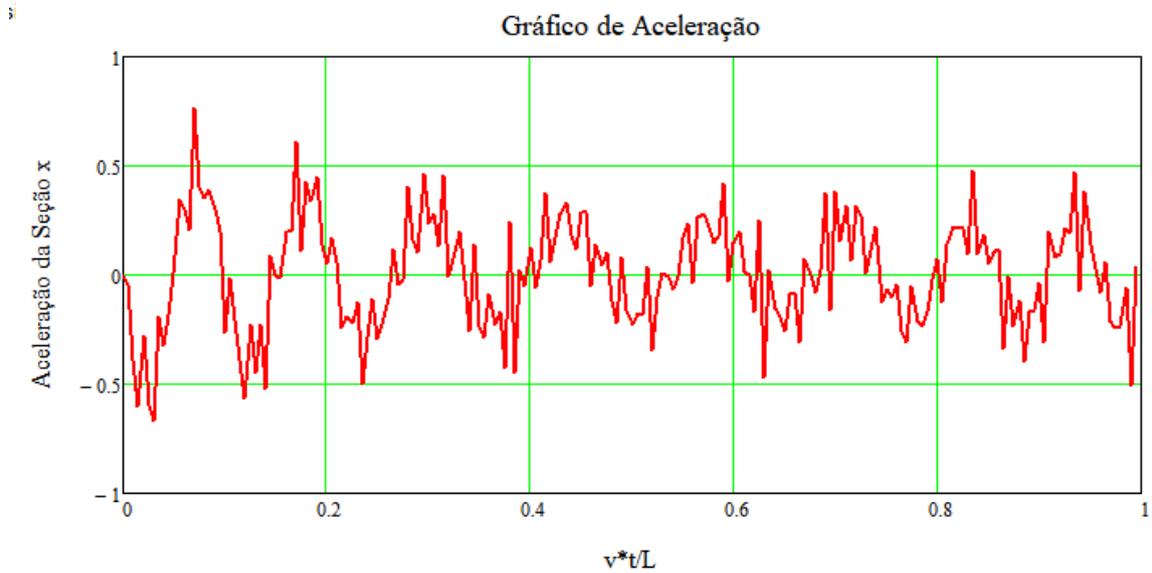


Figura 4.13 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para o modelo de viga biapoiada com 20 elementos

Nota-se que a solução numérica para o histórico das acelerações difere em maior grau da solução analítica quando comparada com as soluções para velocidades e deslocamentos. Isto se deve à perda de precisão numérica referente à obtenção das acelerações como derivada segunda dos deslocamentos, o que impossibilita o ganho de acurácia referente à contribuição de modos superiores. As respostas se assemelham à medida que se reduz o número de modos para o cálculo da solução analítica como mostra a Figura 4.14 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais.

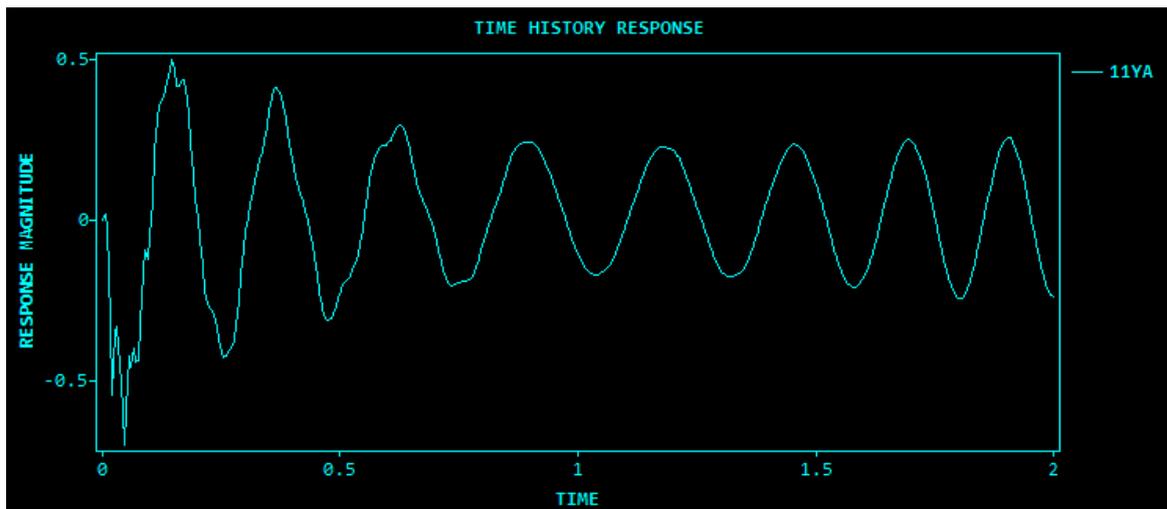
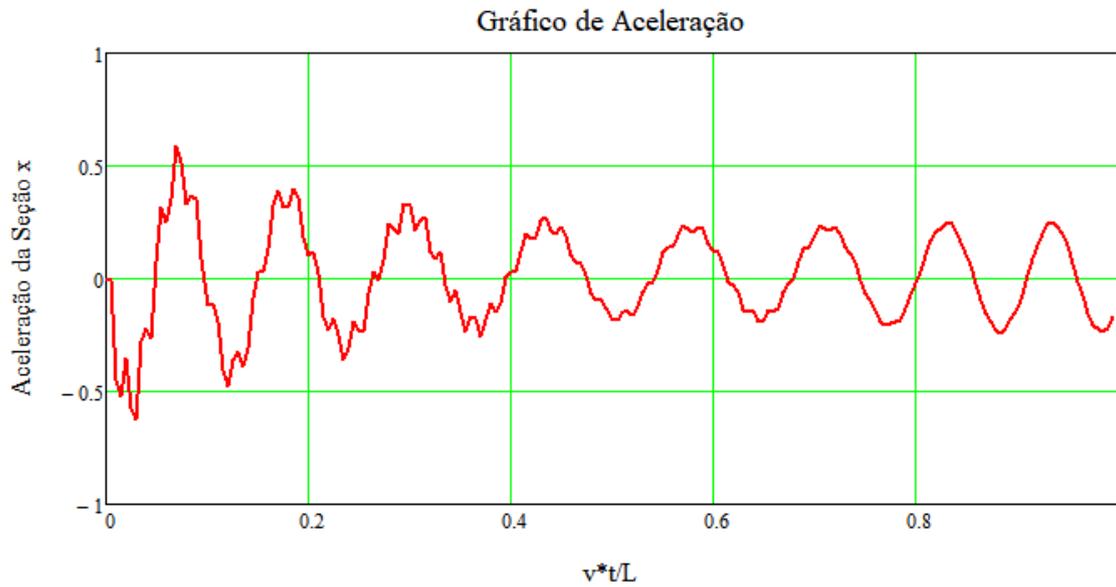


Figura 4.14 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais sem contribuição de modos superiores

Verifica-se a suscetibilidade das respostas numéricas quanto à discretização adotada para o domínio da estrutura. As comparações das respostas obtidas para o modelo discretizado em 20 elementos e para o mesmo modelo discretizado em 80 elementos, respectivamente, para deslocamentos, velocidades e acelerações são apresentadas nas figuras a seguir.

Para o deslocamento, tem-se:

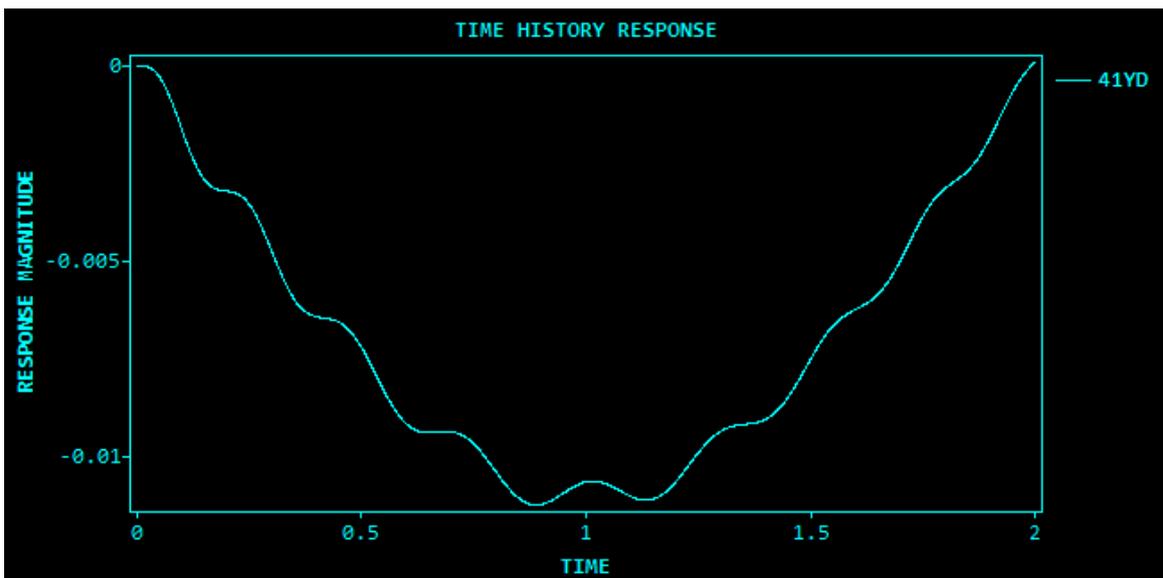
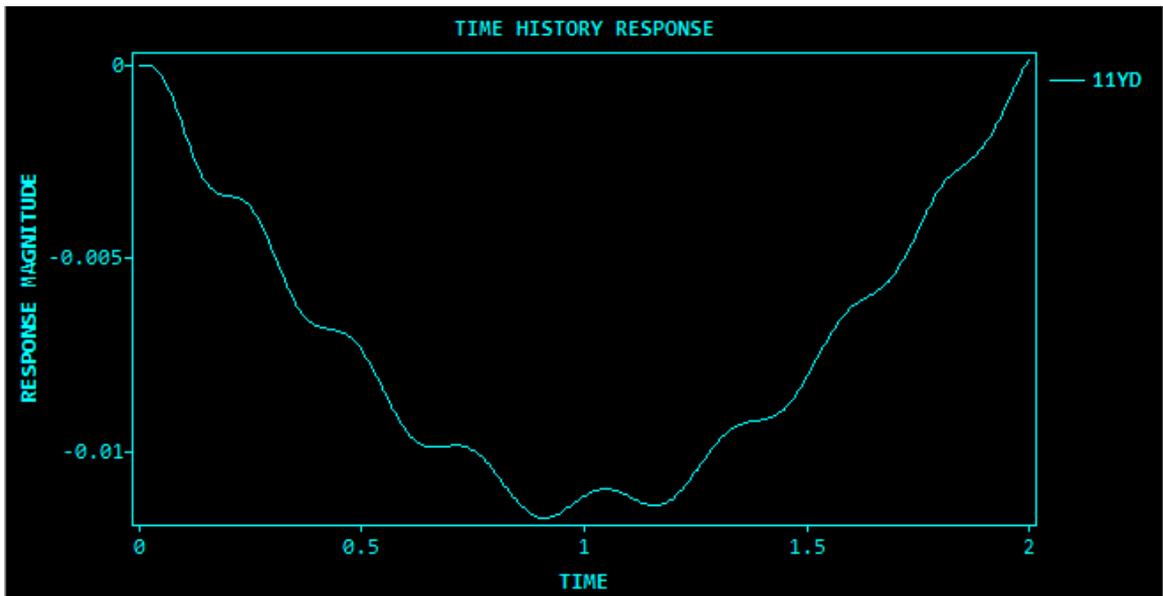


Figura 4.15 – Comparação dos deslocamentos verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente

Para a velocidade, tem-se:

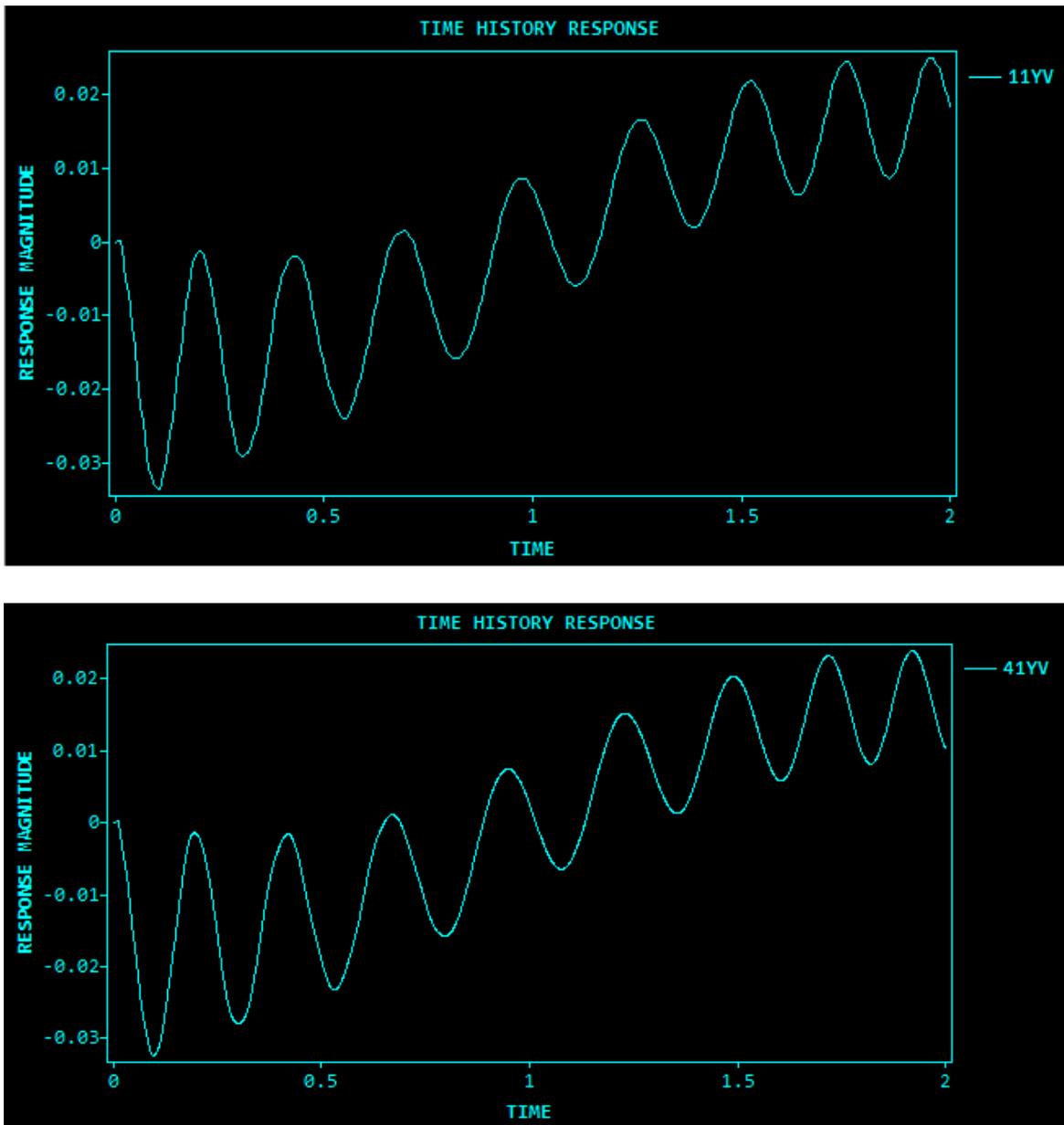


Figura 4.16 – Comparação das velocidades verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente

Para a aceleração, tem-se:

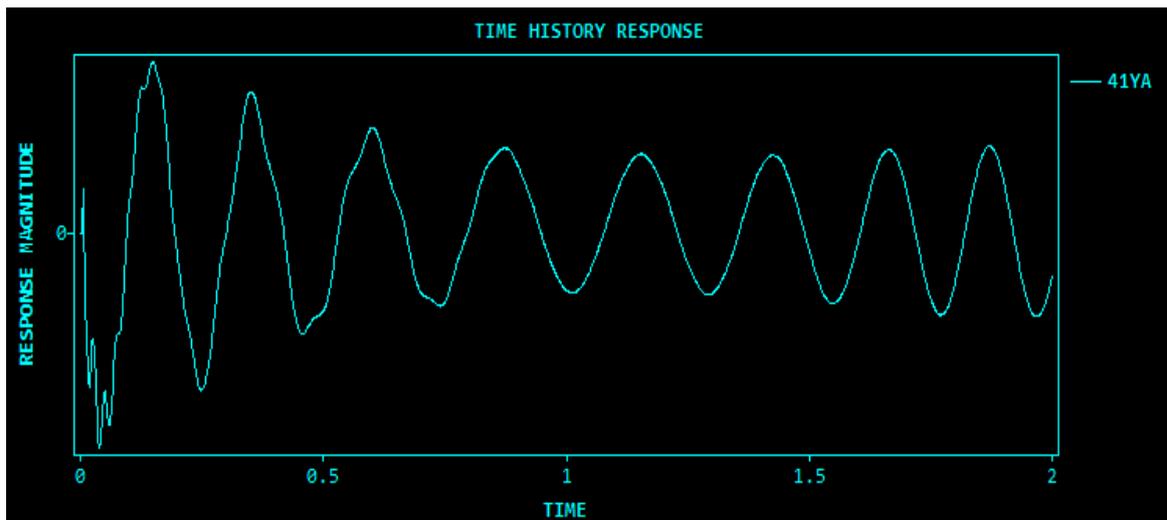
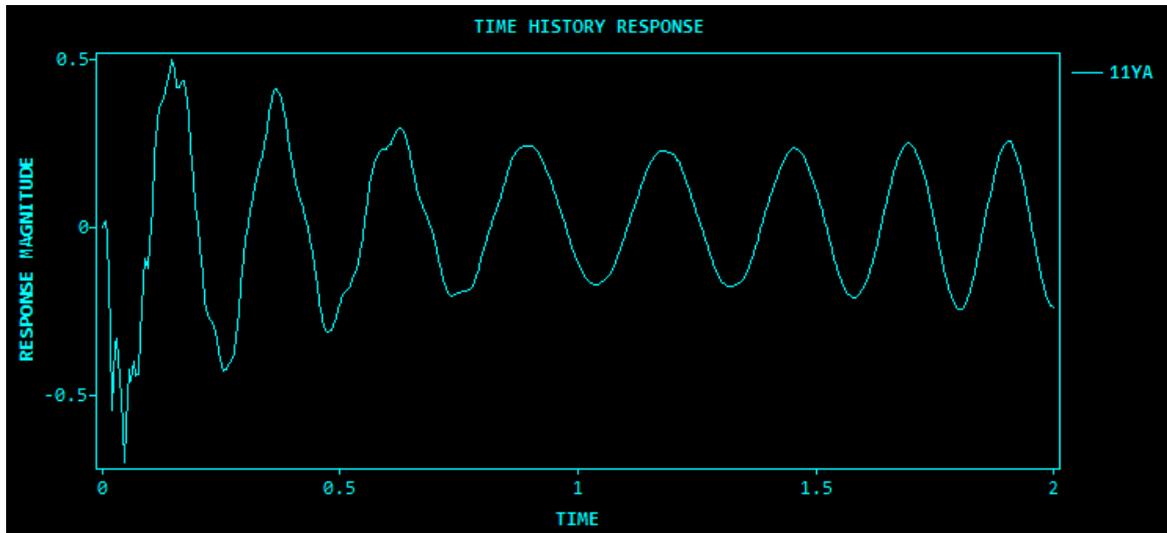


Figura 4.17 – Comparação das acelerações verticais centrais com efeitos inerciais para os modelos de viga biapoiada com 20 e 80 elementos, respectivamente

4.4. Validação para o problema de múltiplas massas móveis

Para a validação do problema de múltiplas massas móveis, considerou-se o veículo como duas massas com distância de 40 metros uma da outra. Desta forma, é possível observar e validar as respostas da estrutura sem que haja interferência do efeito dinâmico gerado por uma massa com o efeito da outra. Os gráficos se mantêm referentes às respostas obtidas para a direção vertical do nó central da estrutura. No estudo de caso poderão ser observadas as respostas para um número maior de veículos assim como condições de ressonância.

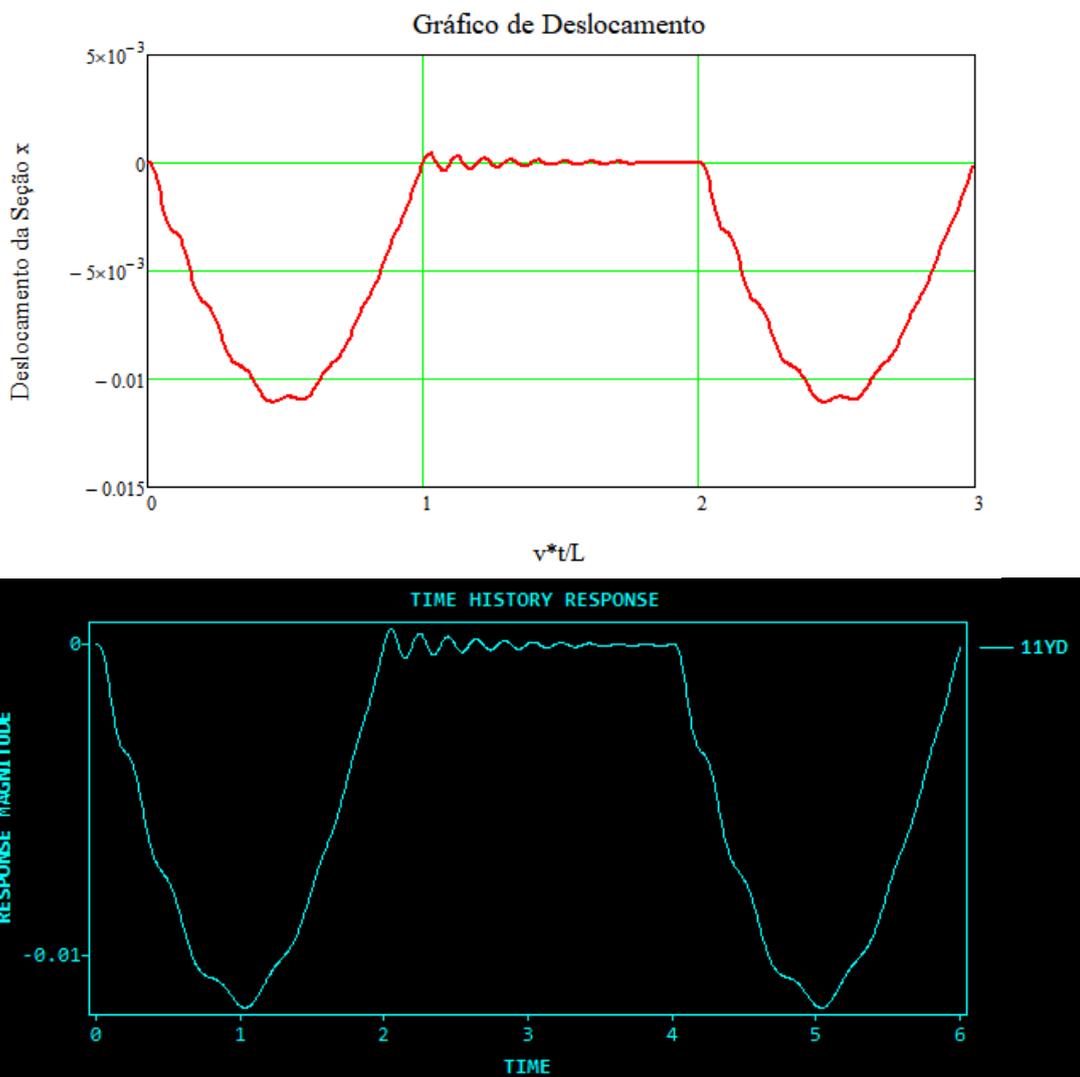


Figura 4.18 – Deslocamento vertical analítico e numérico com efeitos inerciais para duas massas móveis

Soluções do histórico no tempo para a velocidade vertical do nó central:

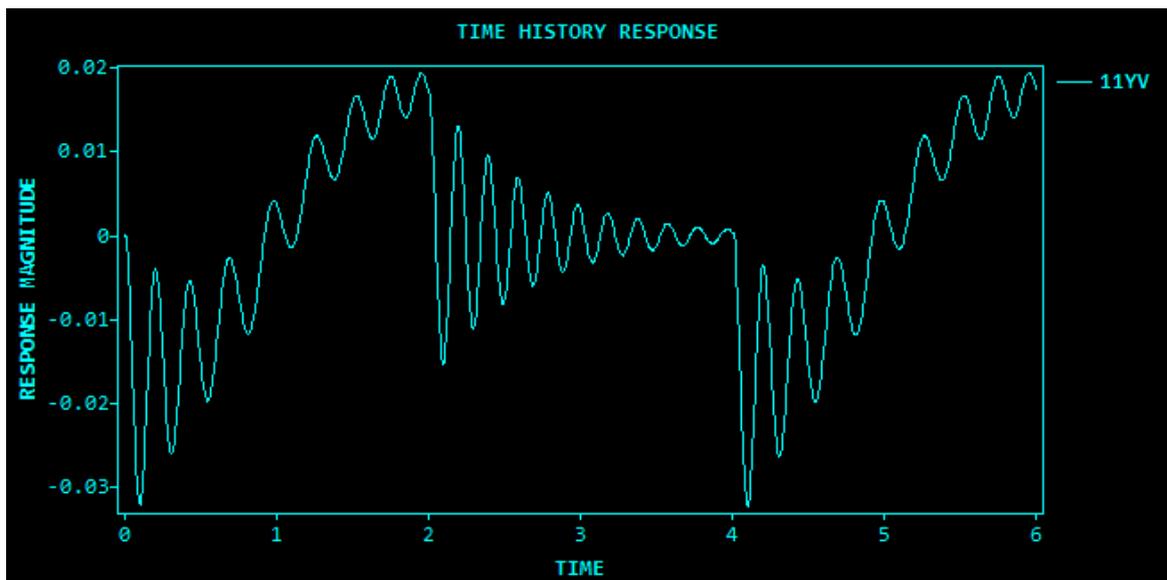
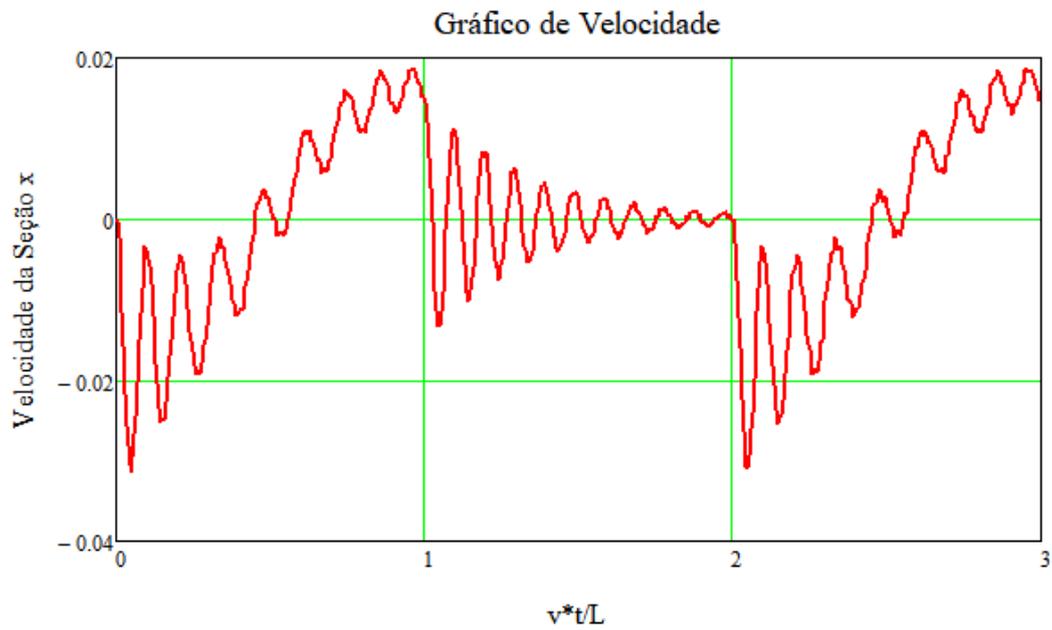


Figura 4.19 – Velocidade vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para duas massas móveis

Soluções do histórico no tempo para a aceleração vertical do nó central:

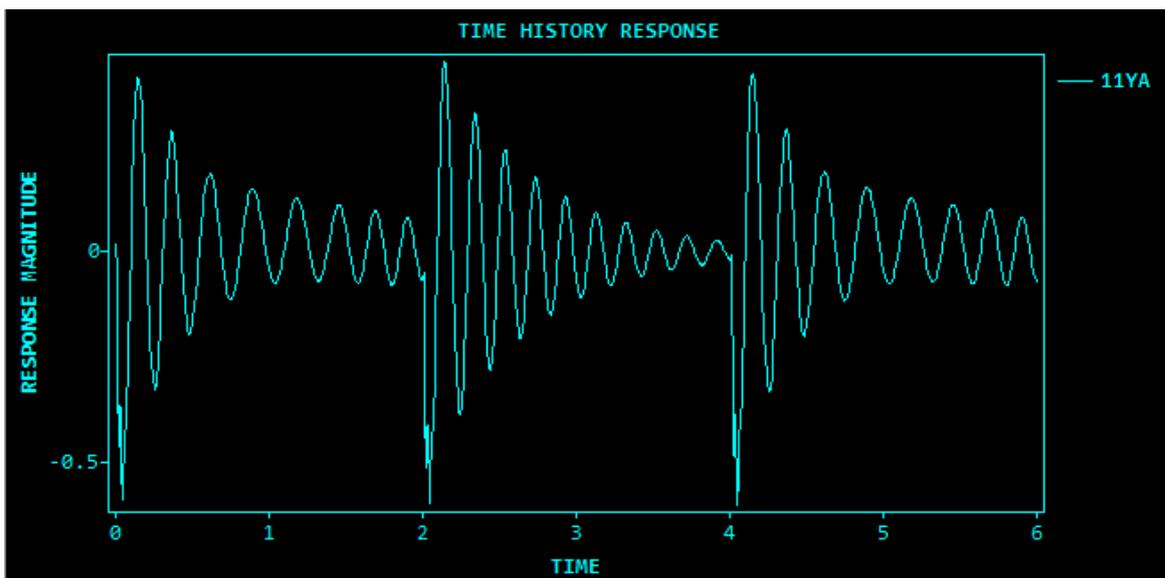
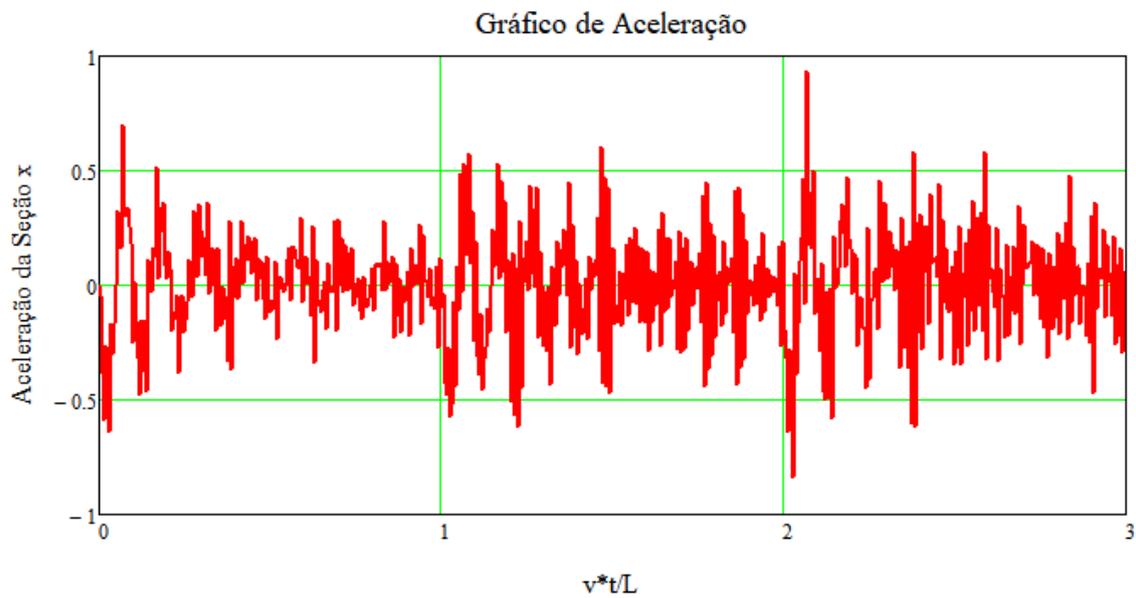


Figura 4.20 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais para duas massas móveis

Para comparações feitas com a redução da contribuição de modos superiores na solução analítica tem-se:

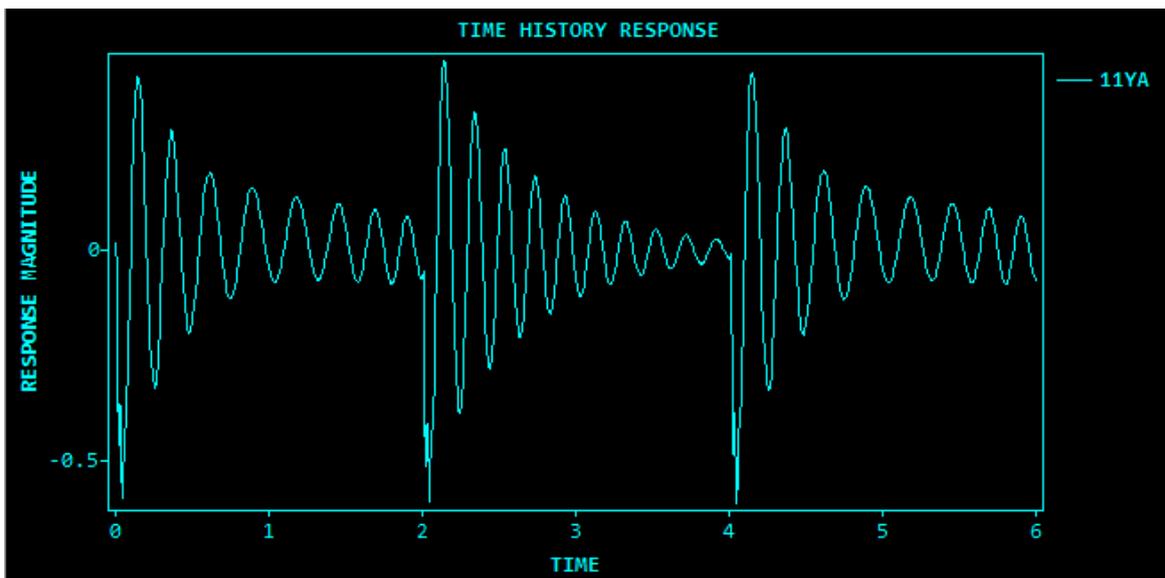
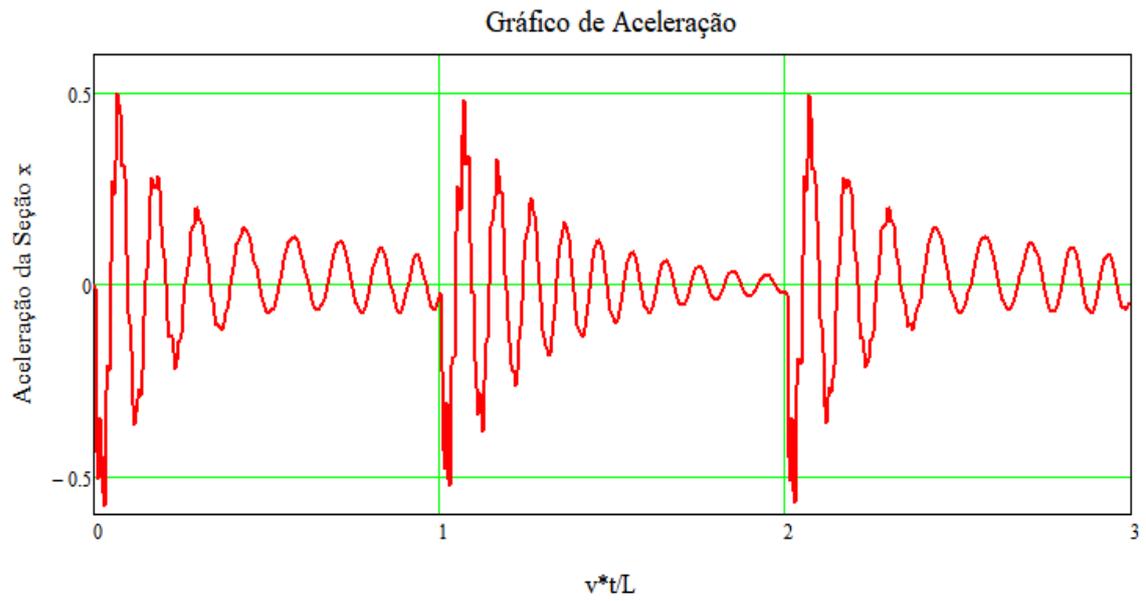


Figura 4.21 – Aceleração vertical analítica e numérica com efeitos inerciais sem contribuição de modos superiores

Percebe-se, compara-se e valida-se o comportamento e influência da resposta estrutural sob passagem de múltiplas massas móveis. Conforme mencionado, uma análise estendendo-se a um maior número de cargas/massas será apresentada no estudo de caso (capítulo 5).

4.4.1. Ressonância

Adota-se uma condição forçada de ressonância da viga em questão para fins de validação. Para isso, utilizam-se as equações (2.32), (2.33) e (2.51) de forma a se obter o espaçamento entre eixos do veículo (d) necessário para gerar a condição de ressonância. Efetua-se a análise para um veículo com múltiplos eixos com espaçamento d entre eles. A resposta em termos de deslocamentos verticais do nó central da viga é mostrada na Figura 4.22

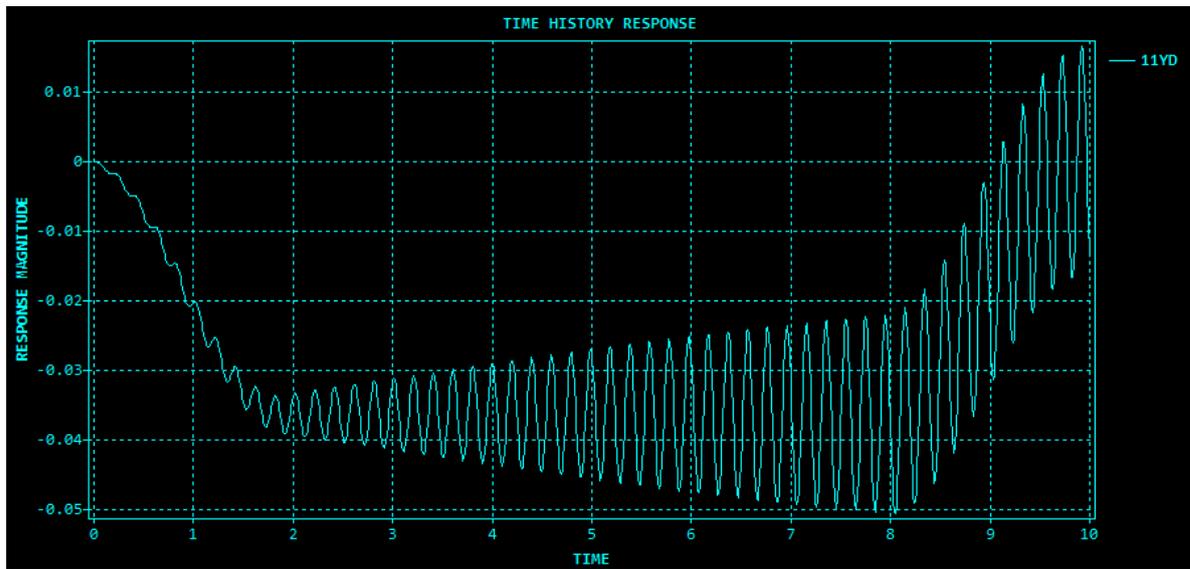


Figura 4.22 – Resposta ressonante para os deslocamentos verticais do nó central para viga simplesmente apoiada discretizada em 20 elementos

4.5. Validação para o problema numérico de autovalor generalizado

Apresenta-se a validação para a solução numérica do problema de autovalor generalizado. Para a tarefa, utilizou-se o Sistema de Análise de Estruturas *SALT*¹⁴. Foi analisada a mesma viga simplesmente apoiada dos exemplos anteriores. Compararam-se as primeiras frequências naturais obtidas, assim como seus respectivos modos de vibração. Para o primeiro modo de vibração têm-se para o programa *SALT* e *LOADYN*, respectivamente:

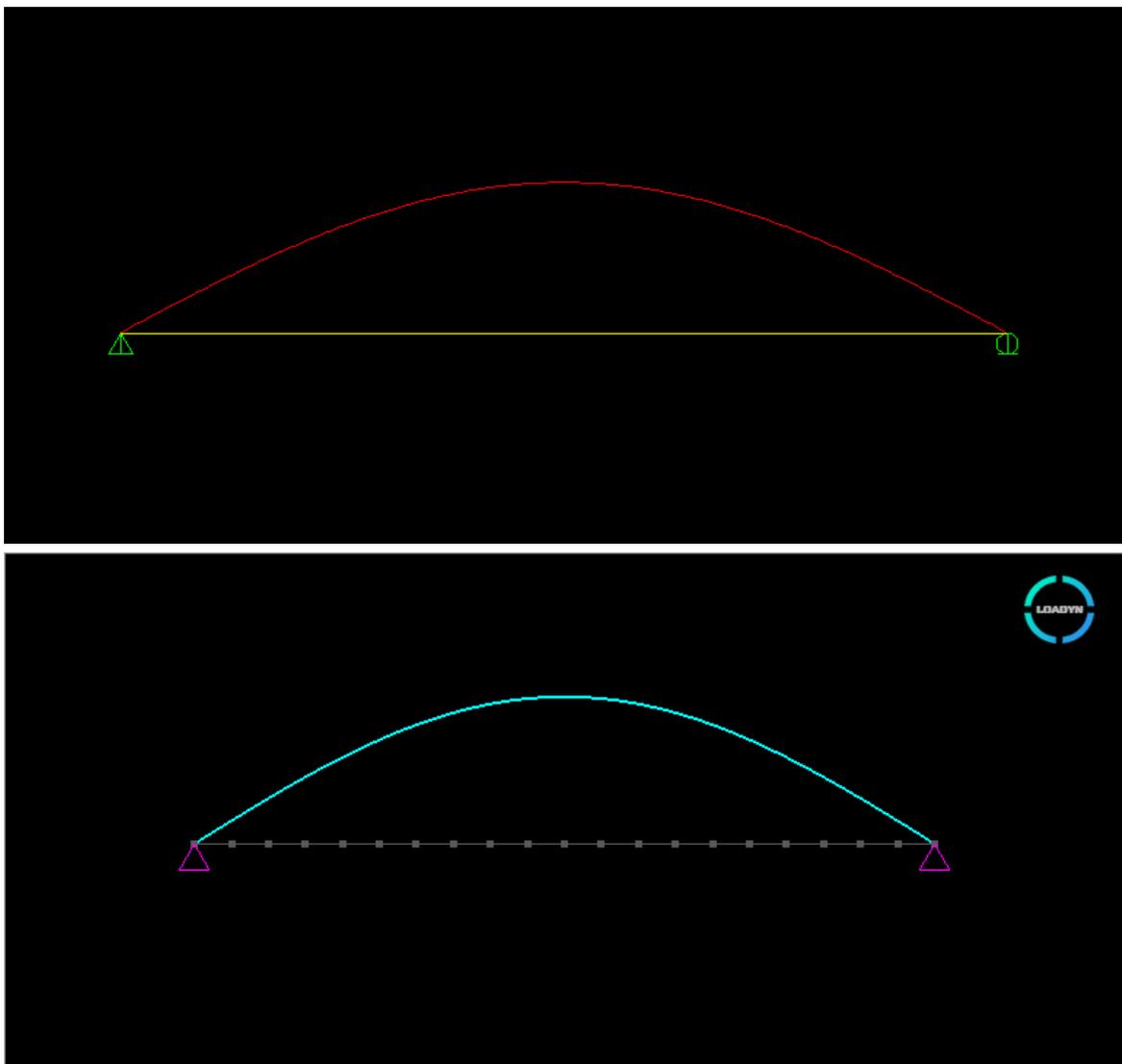


Figura 4.23 – Modo 1, frequências naturais - $f=5.11$ Hz e $f=5.10$ Hz, respectivamente

Segundo modo de vibração:

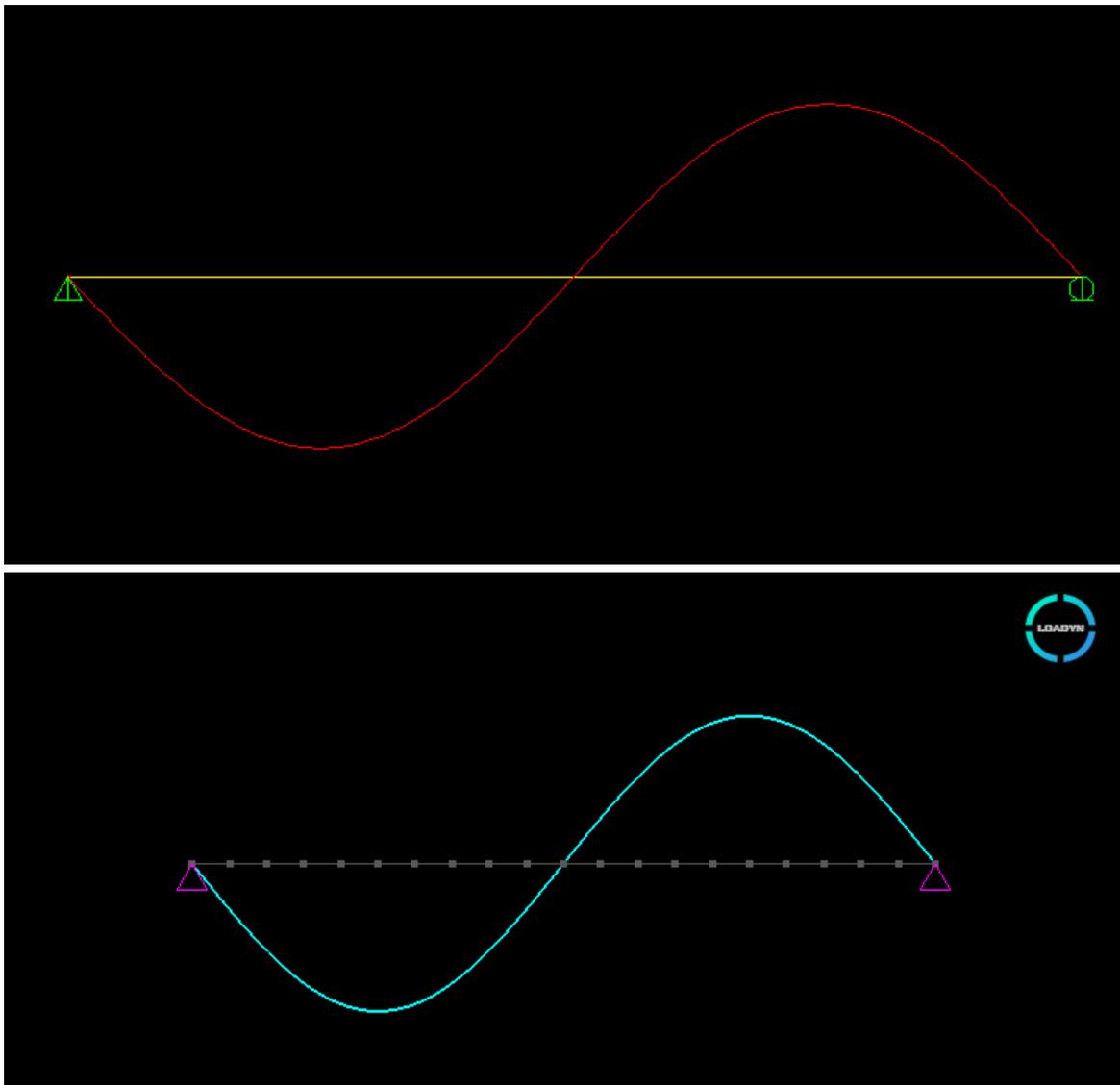


Figura 4.24 – Modo 2, frequências naturais - $f=20.4 \text{ Hz}$ e $f=20.3 \text{ Hz}$, respectivamente

Terceiro modo de vibração:

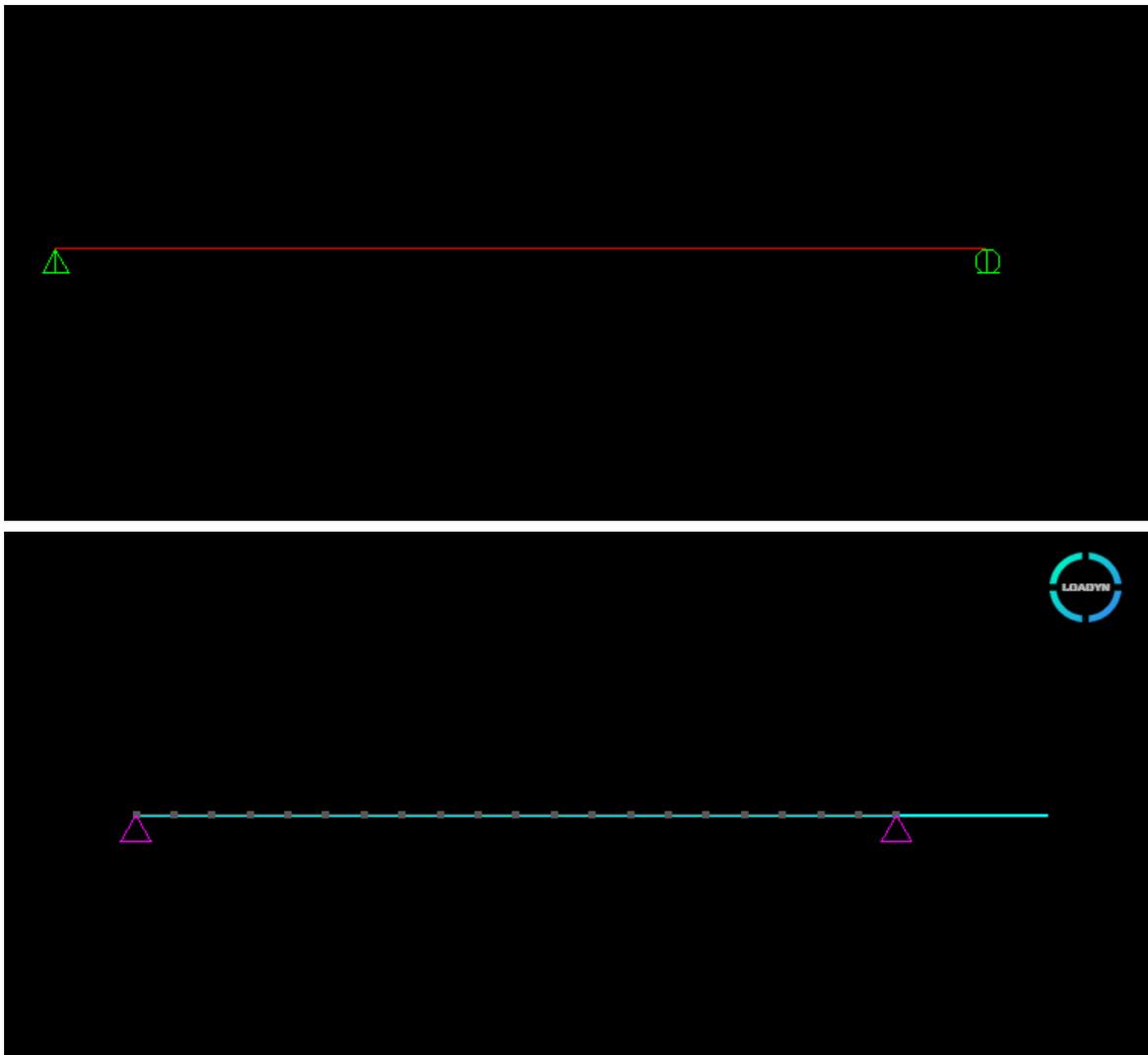


Figura 4.25 – Modo 3, frequências naturais - $f=41.4 \text{ Hz}$ e $f=41.4 \text{ Hz}$, respectivamente

Observa-se na figura 4.25 o comportamento referente ao modo de vibração axial da viga simplesmente apoiada.

Quarto modo de vibração:

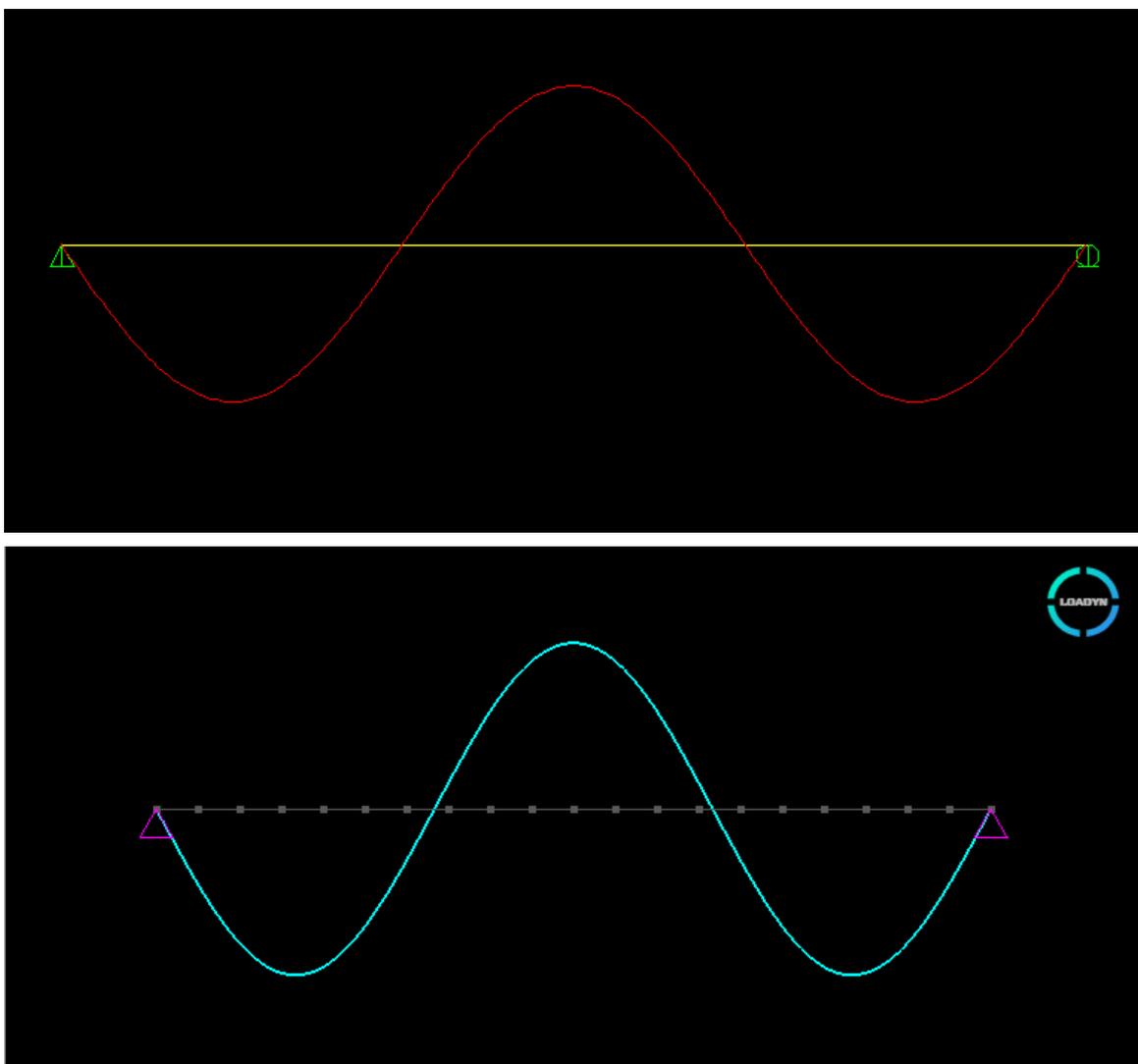


Figura 4.26 – Modo 4, frequências naturais - $f=46.01\text{ Hz}$ e $f=45.2\text{ Hz}$, respectivamente

Quinto modo de vibração:

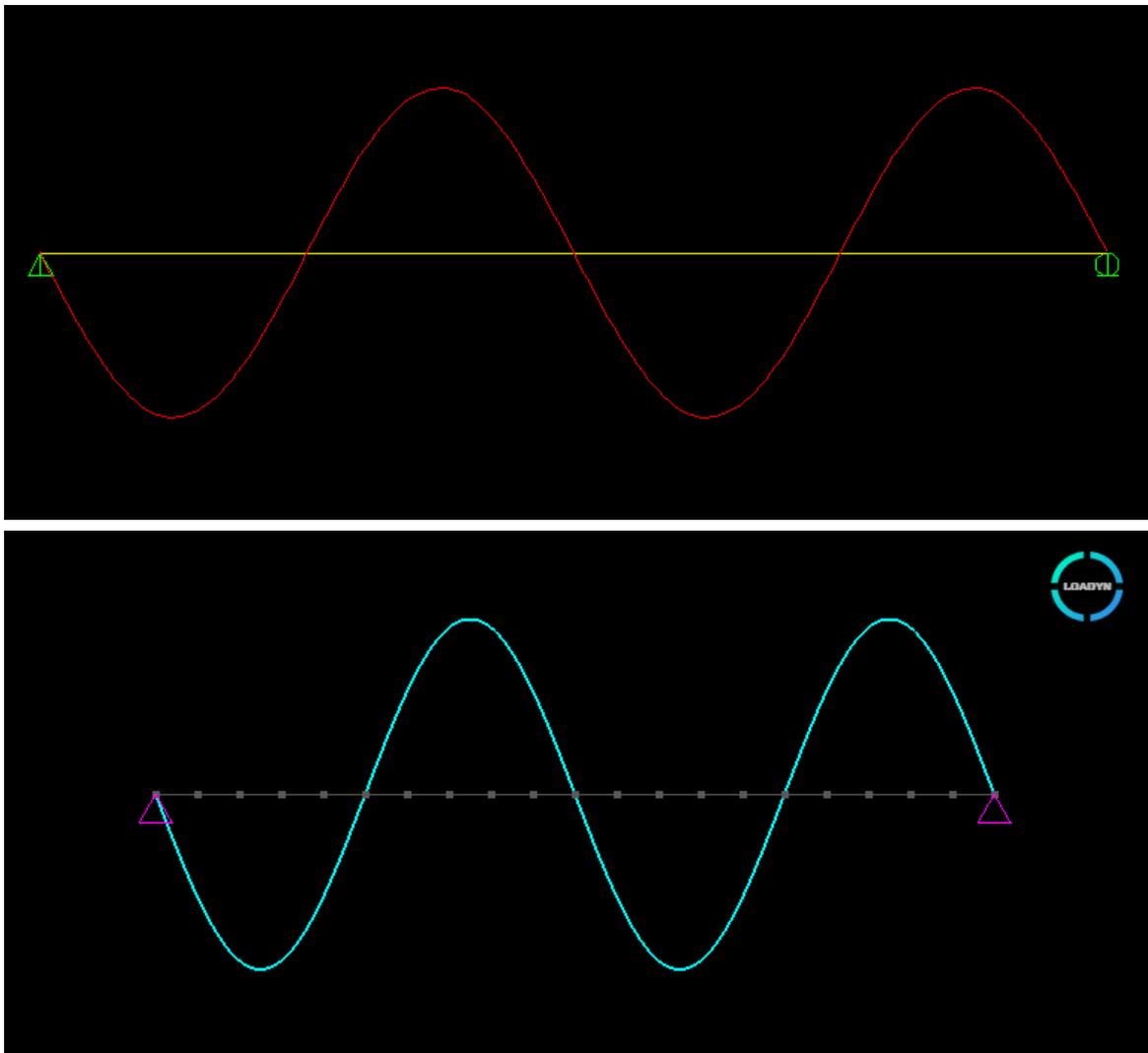


Figura 4.27 – Modo 5, frequências naturais - $f=81.8 \text{ Hz}$ e $f=79.4 \text{ Hz}$, respectivamente

As frequências comparadas não apresentam diferenças significativas, principalmente as referentes a modos fundamentais, como mostrado na Figura 4.28. Os programas utilizados para comparação adotam diferentes algoritmos numéricos para a obtenção da solução do problema de autovalores, o que explica, em parte, as diferenças numéricas encontradas. As formas dos modos de vibração também são objeto de comparação.

COMPARAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS			
	f (Hz)		
Modos	SALT	LOADYN	Diferença (%)
Modo 1	5,11	5,1	0,20
Modo 2	20,4	20,3	0,49
Modo 3	41,4	41,4	0,00
Modo 4	46,01	45,2	1,76
Modo 5	81,8	79,4	2,93

Figura 4.28 – Comparação das frequências naturais obtidas pelos programas

5. APLICAÇÃO DO PROGRAMA LOADYN

5.1. Estudo de caso

Neste capítulo apresenta-se, por fim, o programa *LOADYN* de maneira formal através de um estudo de caso. Analisa-se a estrutura de uma ponte com vãos contínuos submetida a diferentes carregamentos móveis¹⁵. Avaliam-se os resultados obtidos de maneira a comparar a influência dos tipos de carregamentos considerados no comportamento da estrutura. As unidades de base utilizadas pelo programa são: kN (quilonewton), t (tonelada), s (segundo) e m (metro).

5.1.1. Modelo estrutural

O esquema longitudinal do modelo estrutural analisado, assim como as seções transversais dos seus elementos estruturais são apresentados nas Figura 5.1 e Figura 5.2, respectivamente.

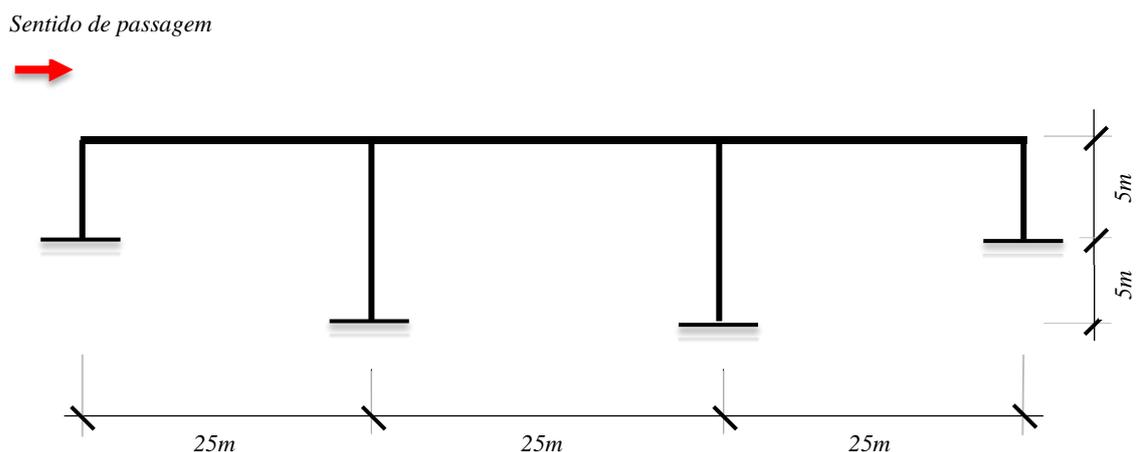
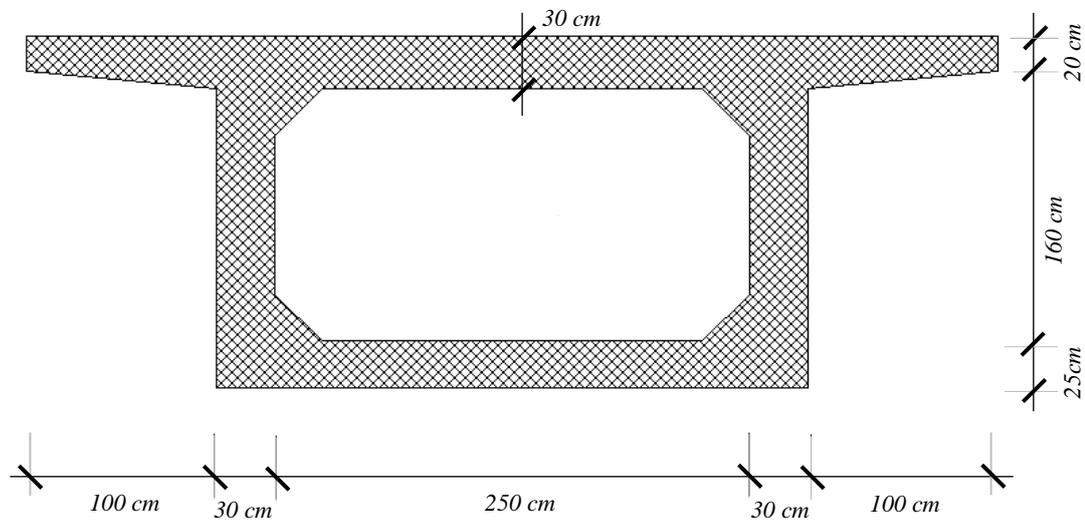


Figura 5.1 – Esquema do modelo estrutural

¹⁵ O arquivo de entrada do modelo utilizado será apresentado em anexo.

SEÇÃO TRANSVERSAL DO TABULEIRO



SEÇÃO TRANSVERSAL DOS PILARES

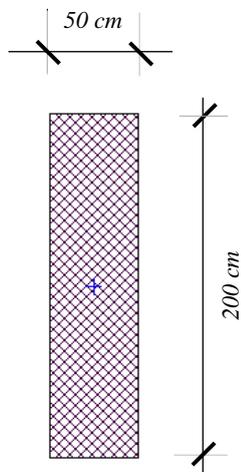


Figura 5.2 – Seções transversais dos elementos estruturais

A seguir dá-se início à análise propriamente dita e realiza-se a entrada de dados através do editor do próprio programa, que permite a entrada de dados do modelo, assim como a definição dos parâmetros para a análise em questão. As Figura 5.3 e Figura 5.4 apresentam os dados mecânicos e geométricos da estrutura (em kN e m) e o modelo estrutural pré-processado, respectivamente.

MATERIAL PROPERTIES				
Num	E	Poisson	Alpha	Gamma
1	28E+06	0.2	1E-05	25.0
0				

SECTION PROPERTIES						
Num	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	3.1	0	0	2.96	5.16	1.51
2	1	0	0	0.07	0.333	0.021
0						

Figura 5.3 – Propriedades mecânicas e geométricas do modelo

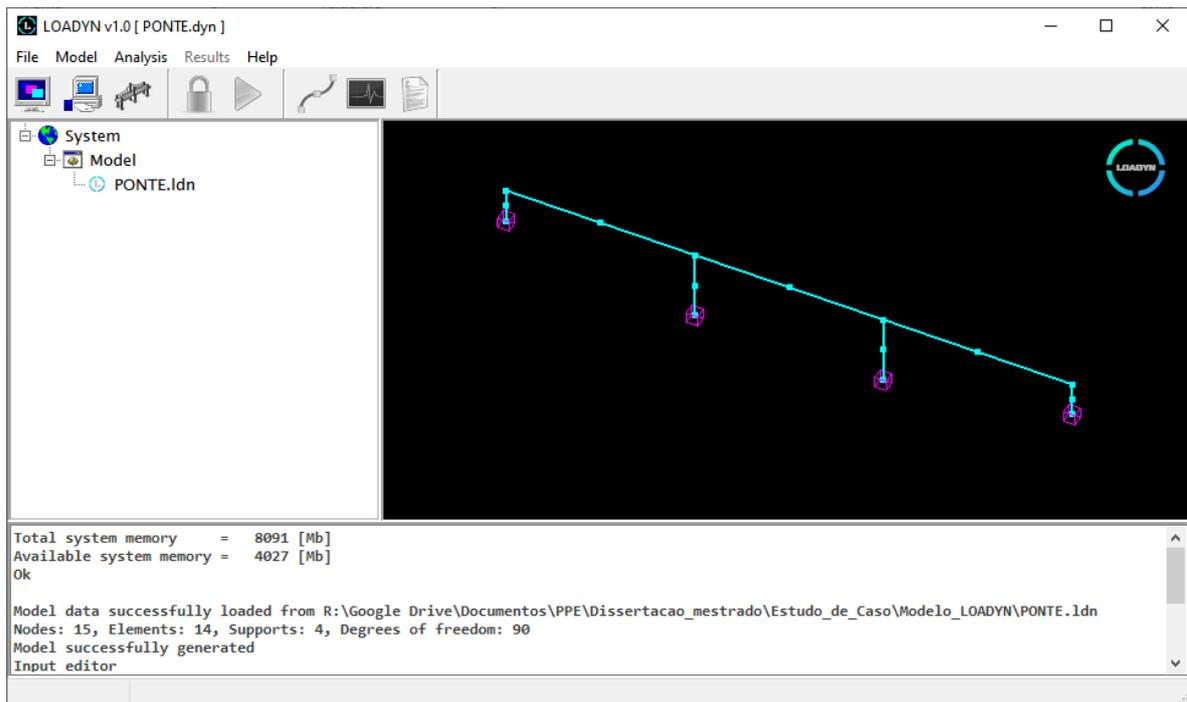


Figura 5.4 – Modelo estrutural

O modelo foi discretizado em dois elementos para cada vão e cada pilar.

5.1.2. Análise modal

Efetua-se uma análise modal para obtenção das frequências naturais relevantes da estrutura usadas como dado de entrada para o cálculo do amortecimento de Rayleigh. Os parâmetros para a análise modal e as formas de alguns dos modos de vibração, em escala amplificada, são mostrados nas Figura 5.6 e Figura 5.7, respectivamente. Parte do relatório da análise modal é apresentada na Figura 5.8.

```
DYNAMIC EIGENPROBLEM
Number of modes      Tolerance      Max iterations
                   10                1E-12          40
0
```

Figura 5.5 – Parâmetros para análise modal

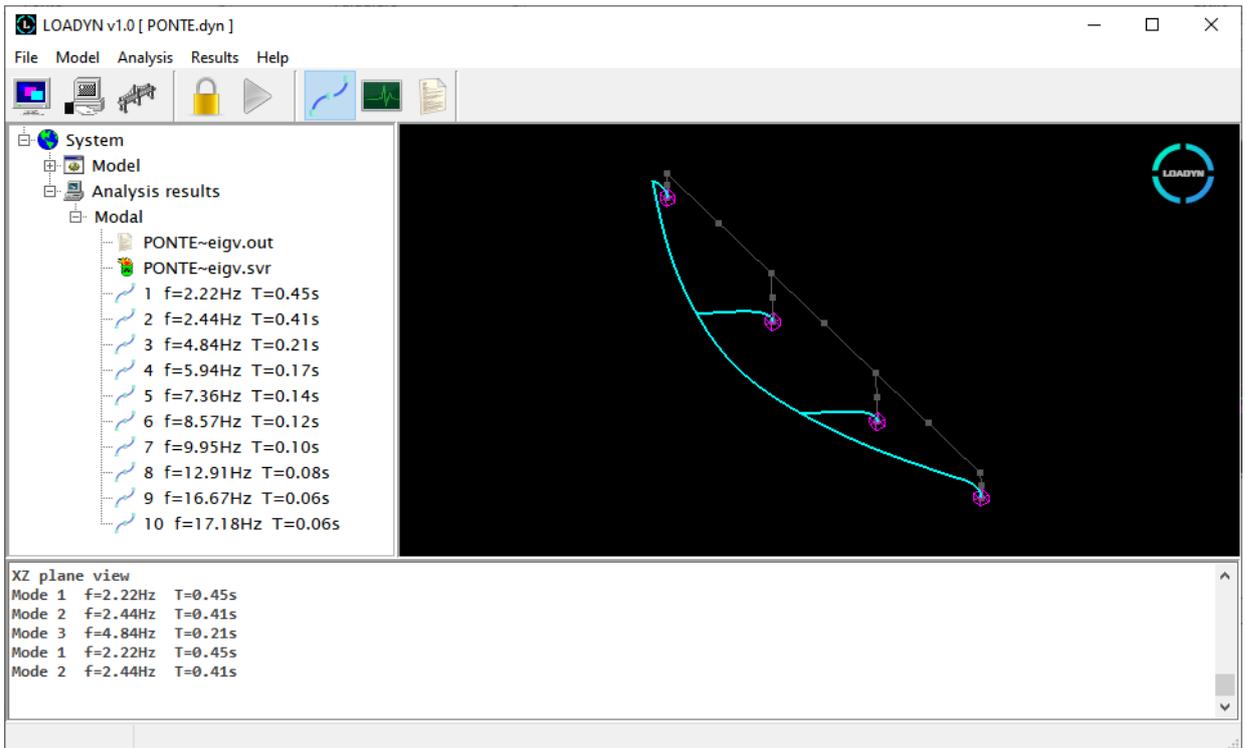
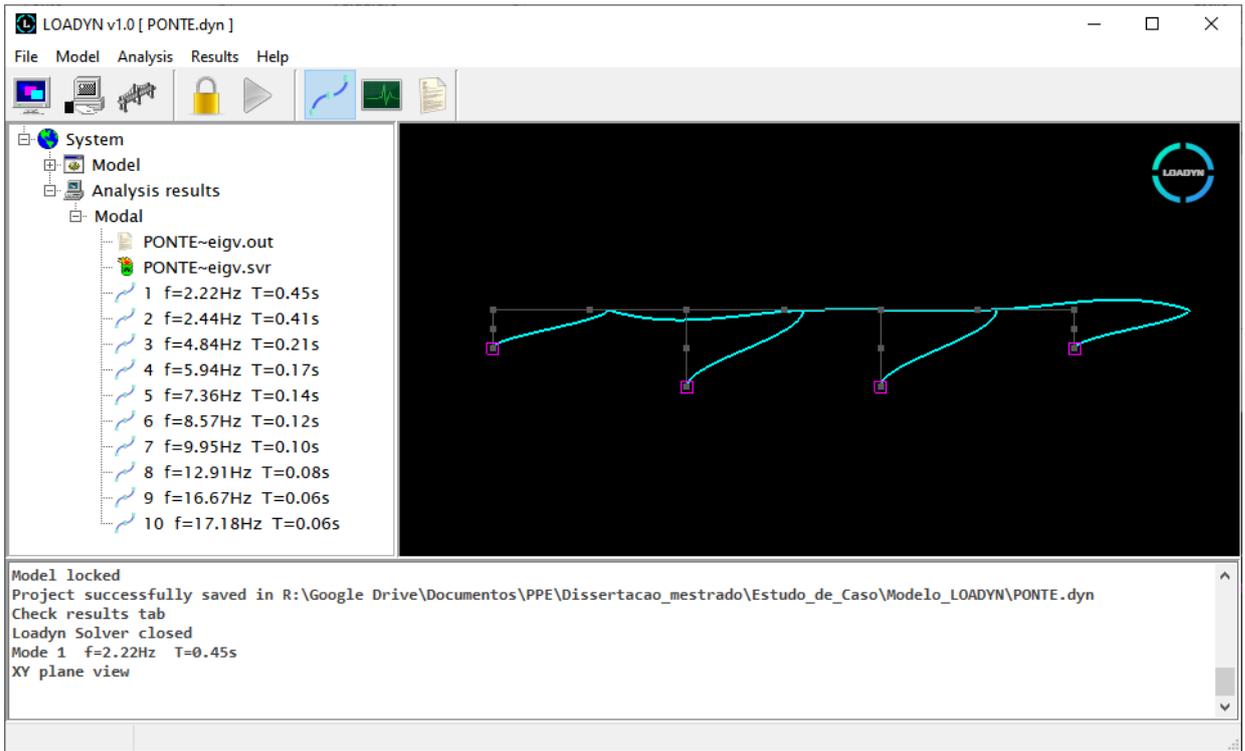


Figura 5.6 – Primeiro e segundo modos de vibração

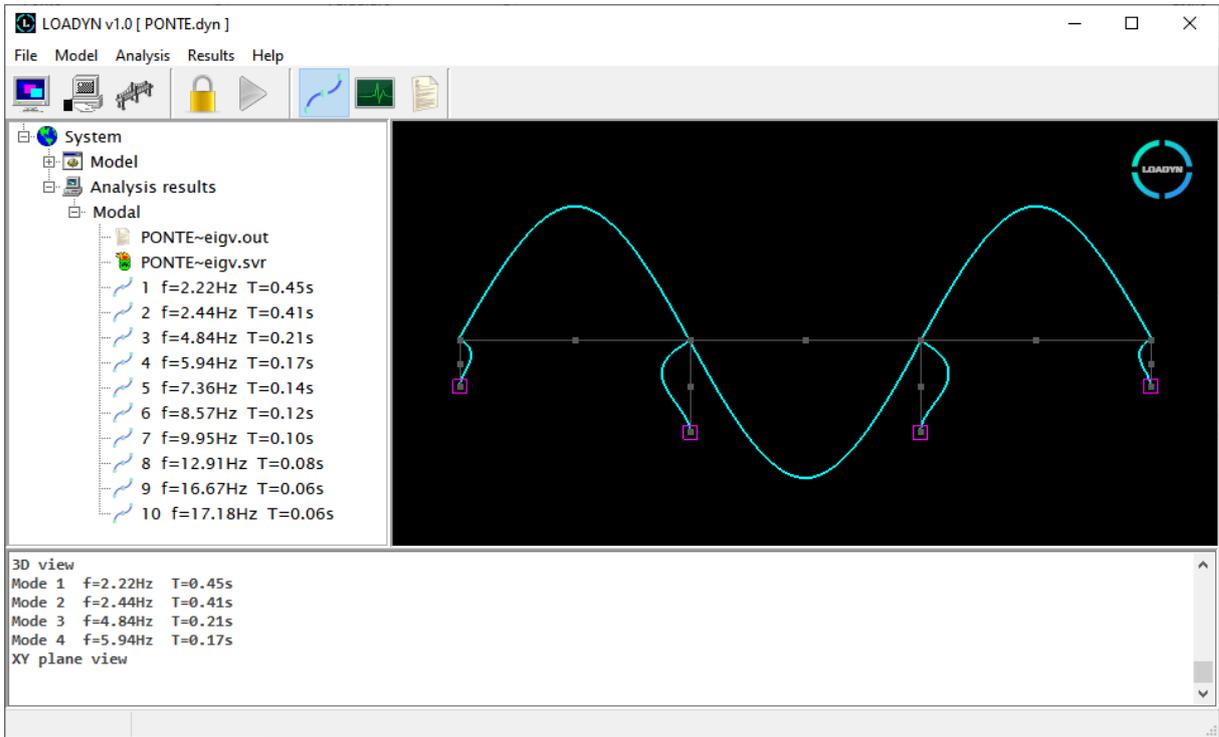
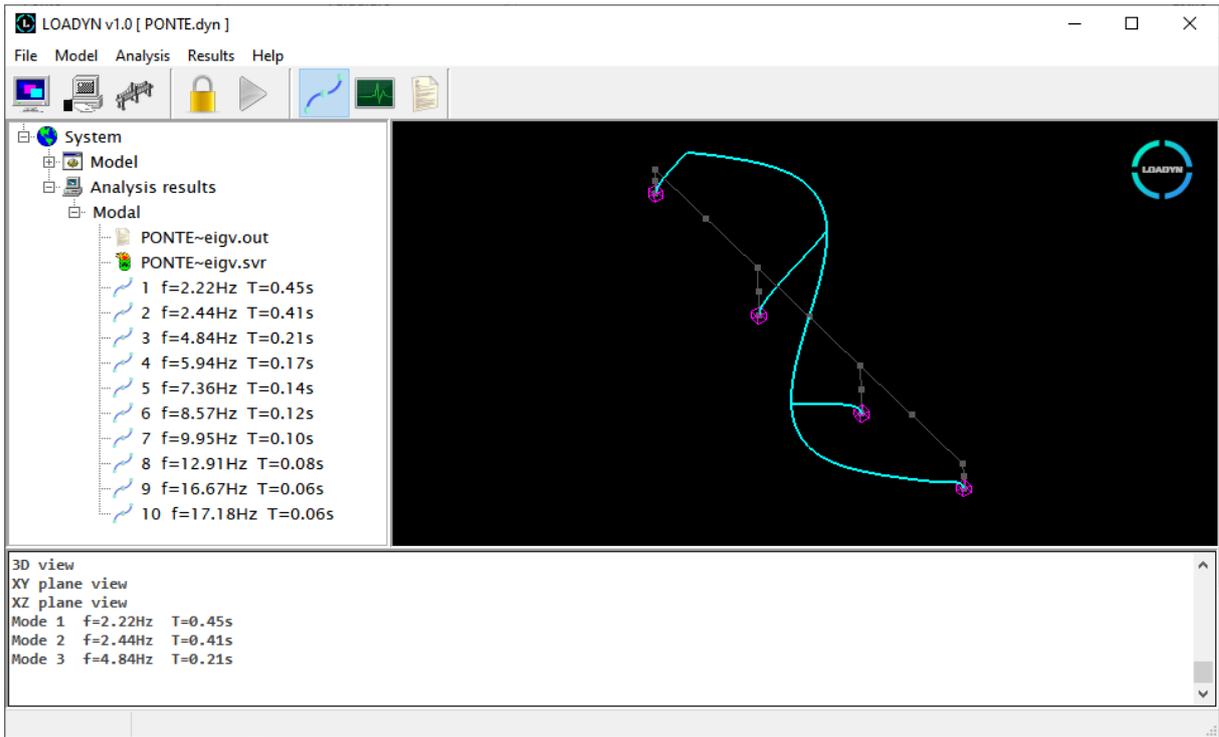


Figura 5.7 – Terceiro e quarto modos de vibração

```

NATURAL FREQUENCIES AND PERIODS

  MODE      EIGENVALUES      OMEGA      FREQUENCY      PERIOD
  -----      (rad2/sec2)      (rad/sec)      (hertz)      (sec)
  -----
    1         193.737         13.919         2.215         0.4514
    2         234.286         15.306         2.436         0.4105
    3         926.230         30.434         4.844         0.2065
    4        1393.267         37.326         5.941         0.1683
    5        2138.331         46.242         7.360         0.1359
    6        2897.843         53.832         8.568         0.1167
    7        3912.380         62.549         9.955         0.1005
    8        6582.508         81.133        12.913         0.0774
    9       10972.705        104.751        16.672         0.0600
   10       11653.198        107.950        17.181         0.0582

CONVERGENCE ACHIEVED ON STEP : 9

RIGID BODY MODES FOUND : 0

```

Figura 5.8 – Seção do relatório modal

5.1.3. Análise de massas móveis

Realizada a análise modal e determinadas as frequências naturais relevantes para o problema, pode-se efetuar a análise de massas móveis. A princípio, adotou-se um veículo com 6 eixos com espaçamento de 5m entre eixos com velocidade de passagem de 10 m/s. As propriedades da análise podem ser verificadas na Figura 5.9.

```

RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES
Omega i      Omega j      Damp. ratio
  13.9        37.3         0.05
0

TRAFFIC SEQUENCE
Elements
  1 2 3 4 5 6
Entry node
  1 1 1 1 1 1
0

VEHICLE PROPERTIES
Load magnitude      No of loads      Axle dist      Speed      Acceleration
  -1000              6                 5             10         0
0

MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES
Iterations          Delta t          Inertial effect
  1000              0.01             1
0

```

Figura 5.9 – Parâmetros de entrada para análise de massa móvel

A Figura 5.10 mostra o histórico no tempo dos deslocamentos verticais dos nós centrais do primeiro (2YD), segundo (4YD) e terceiro vão (6YD).

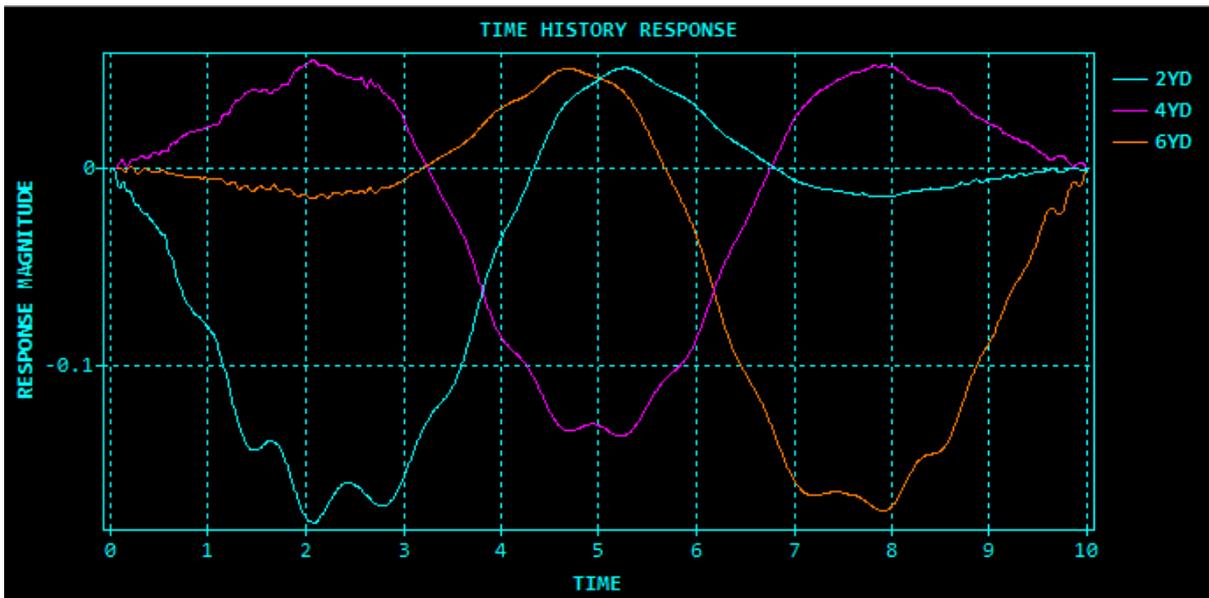


Figura 5.10 – Histórico no tempo dos deslocamentos (m)

A Figura 5.11 mostra o histórico no tempo das velocidades verticais dos nós centrais do primeiro (2YV), segundo (4YV) e terceiro vão (6YV).

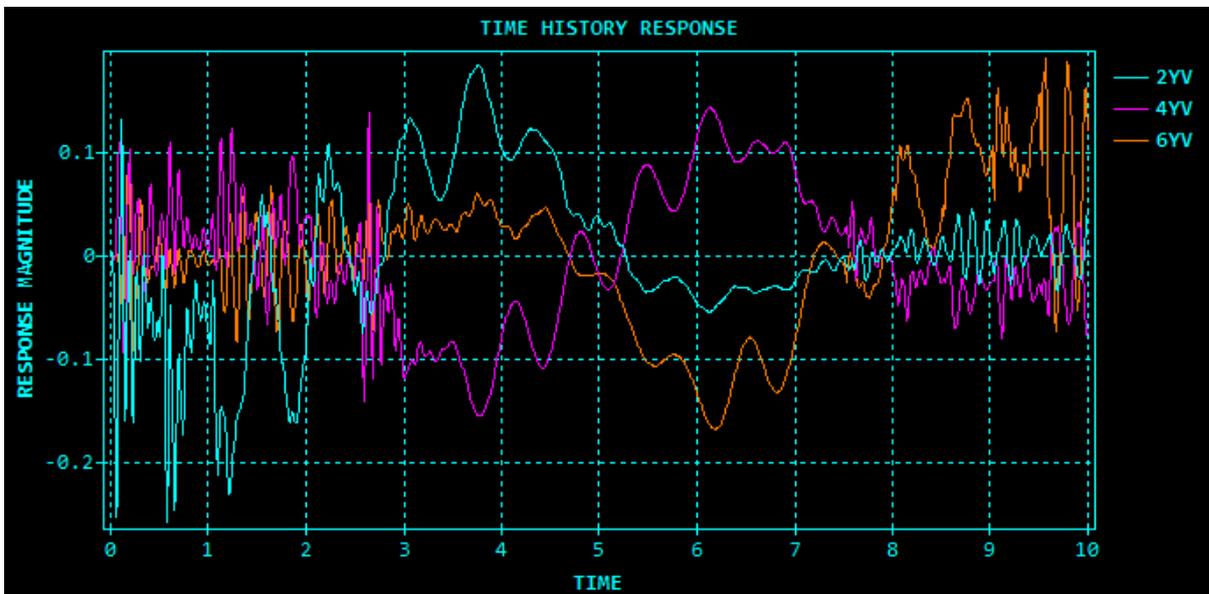


Figura 5.11 – Histórico no tempo das velocidades (m/s)

A Figura 5.12 mostra o histórico no tempo das acelerações verticais dos nós centrais do primeiro (2YA), segundo (4YA) e terceiro vão (6YA).

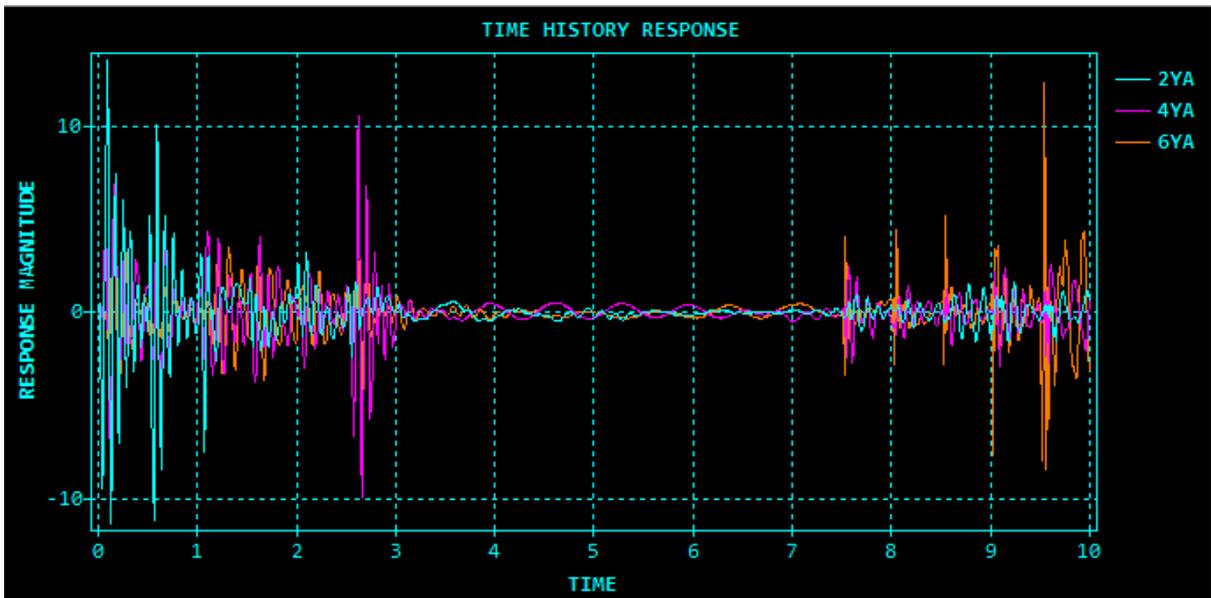


Figura 5.12 – Histórico no tempo das acelerações (m/s²)

A Figura 5.13 mostra o histórico no tempo das rotações ao redor do eixo z dos nós centrais do primeiro (2RZD), segundo (4RZD) e terceiro vão (6RZD).

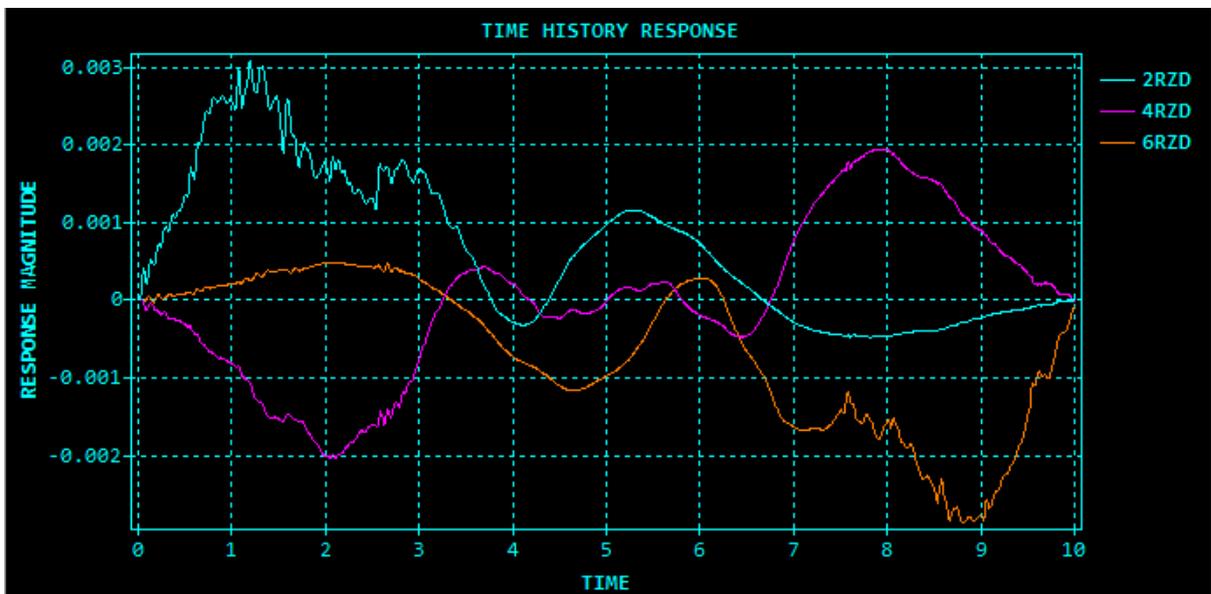


Figura 5.13 – Histórico no tempo das rotações (rad)

A Figura 5.14 apresenta o histórico no tempo dos momentos fletores dos nós centrais do primeiro (1JM), segundo (3JM) e terceiro vão (5JM).

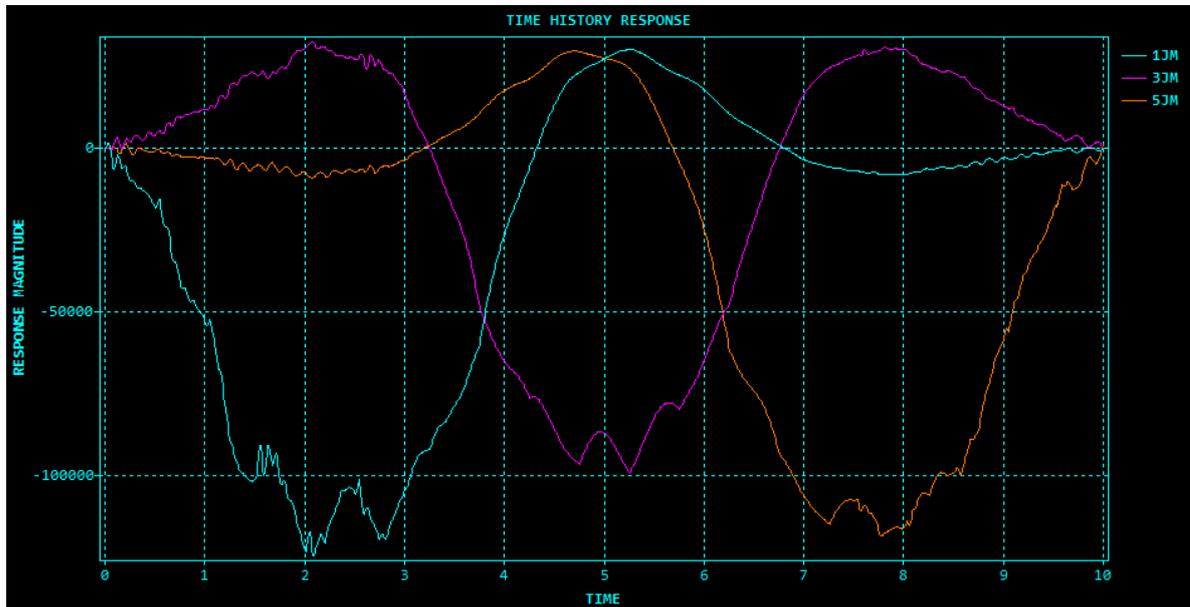


Figura 5.14 – Histórico no tempo dos momentos fletores (kN.m)

Os relatórios completos das análises são apresentados nos anexos deste trabalho.

5.1.4. Análise de cargas móveis

Efetua-se uma análise de cargas móveis para fins comparativos com a análise de massas móveis. No item anterior, considera-se o acoplamento das massas dos veículos à massa da estrutura e conseqüentemente as forças inercias geradas por elas. Neste item, desconsideram-se as massas dos veículos e por conseqüência, as forças de inércia geradas também são desconsideradas. A Figura 5.15 mostra o histórico no tempo dos deslocamentos verticais dos nós centrais do primeiro (2YD), segundo (4YD) e terceiro vão (6YD).

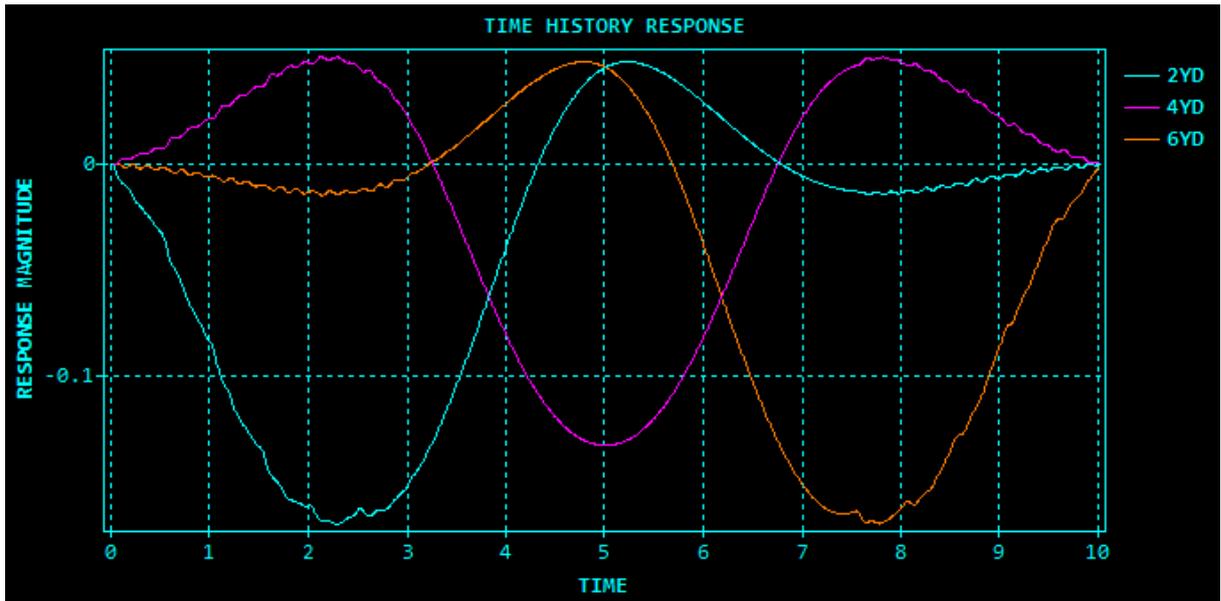


Figura 5.15 – Histórico no tempo dos deslocamentos (m)

A Figura 5.16 mostra o histórico no tempo das velocidades verticais dos nós centrais do primeiro (2YV), segundo (4YV) e terceiro vão (6YV).

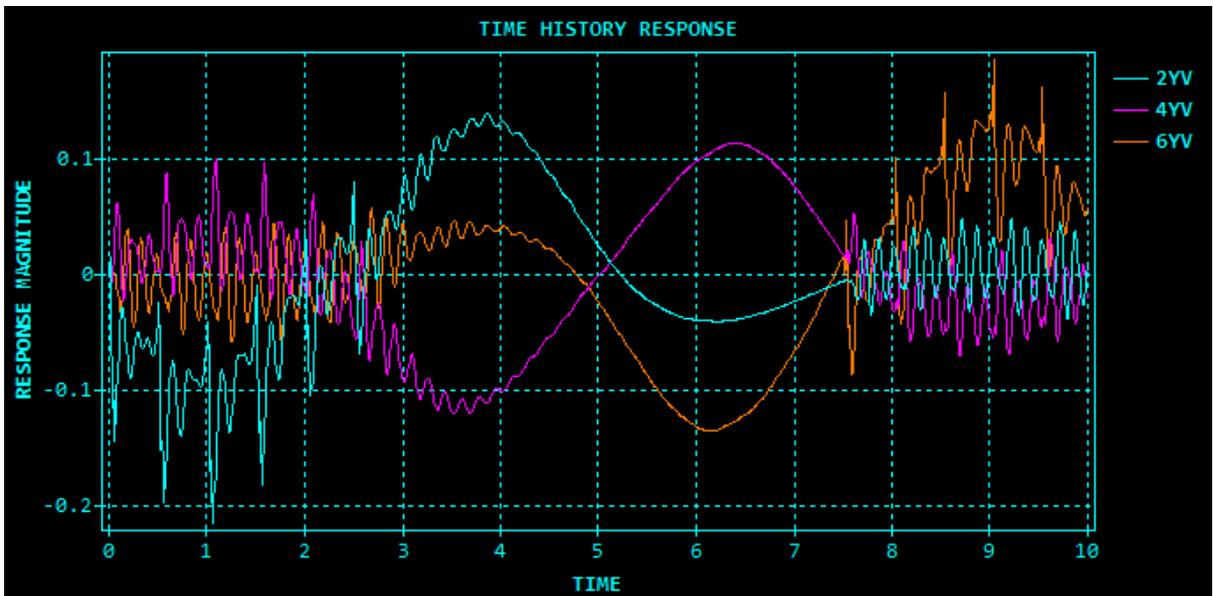


Figura 5.16 – Histórico no tempo das velocidades (m/s)

A Figura 5.17 mostra o histórico no tempo das acelerações verticais dos nós centrais do primeiro (2YA), segundo (4YA) e terceiro vão (6YA).

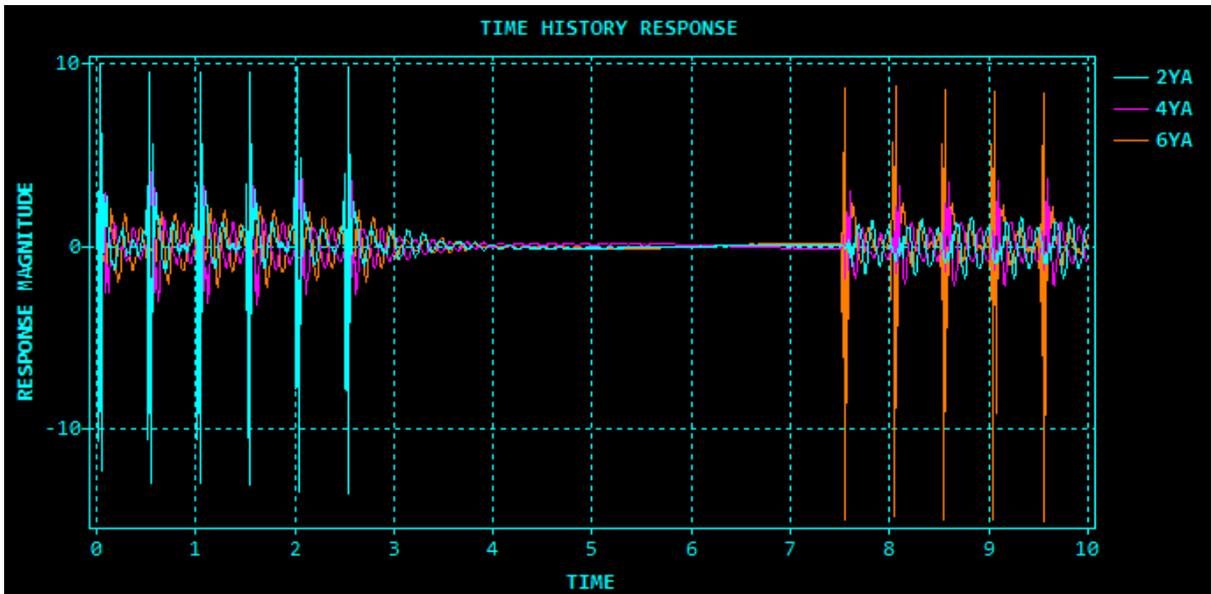


Figura 5.17 – Histórico no tempo das acelerações (m/s²)

A Figura 5.18 mostra o histórico no tempo das rotações ao redor do eixo z dos nós centrais do primeiro (2RZD), segundo (4RZD) e terceiro vão (6RZD).

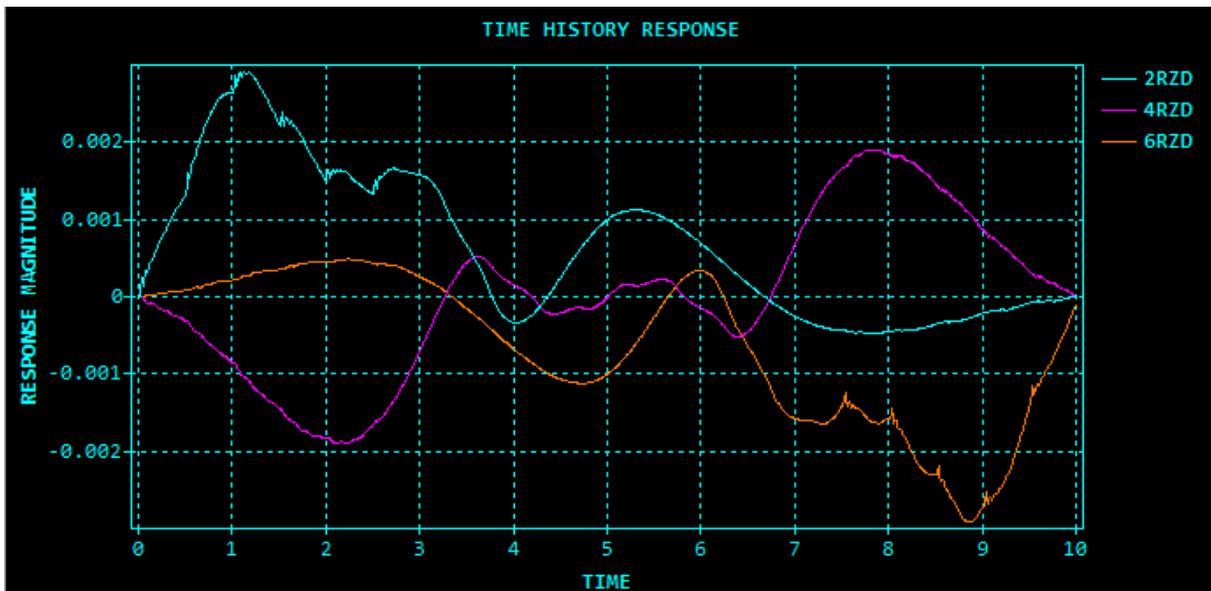


Figura 5.18 – Histórico no tempo das rotações (rad)

A Figura 5.19 apresenta o histórico no tempo dos momentos fletores dos nós centrais do primeiro (1JM), segundo (3JM) e terceiro vão (5JM).

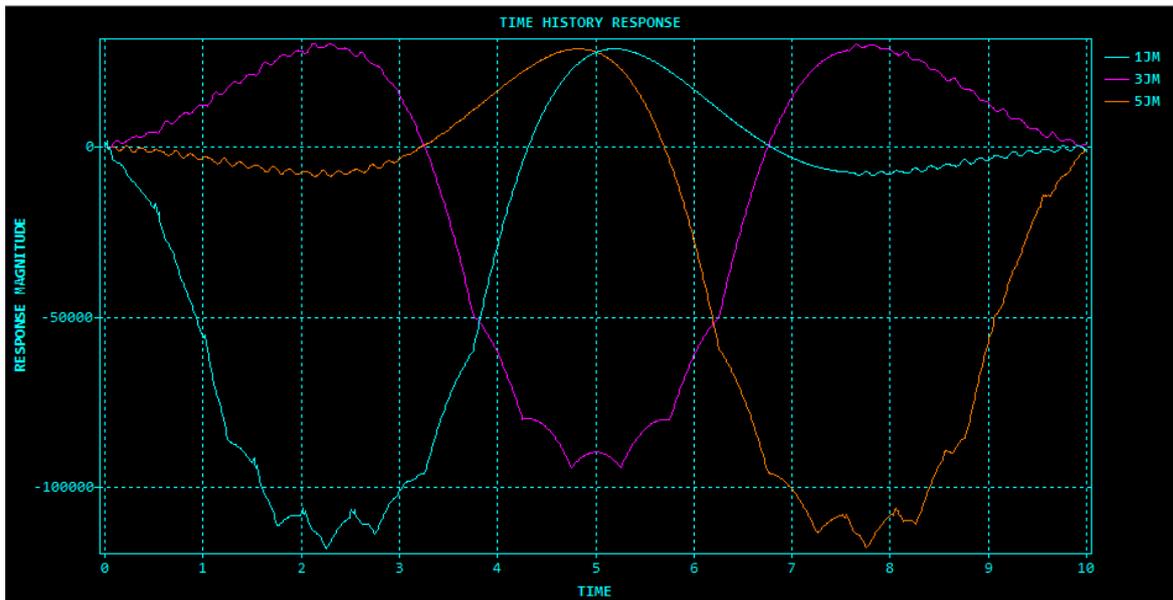


Figura 5.19 – Histórico no tempo dos momentos fletores (kN.m)

5.1.5. Influência da massa do veículo na resposta estrutural

Para evidenciar a pouca influência da massa do veículo na resposta dinâmica estrutural quando a relação massa do veículo / massa da estrutura é relativamente baixa, reduziu-se esta relação em 10 vezes. Plotam-se as respostas em termos dos mesmos deslocamentos verticais dos itens anteriores para comparação visual.

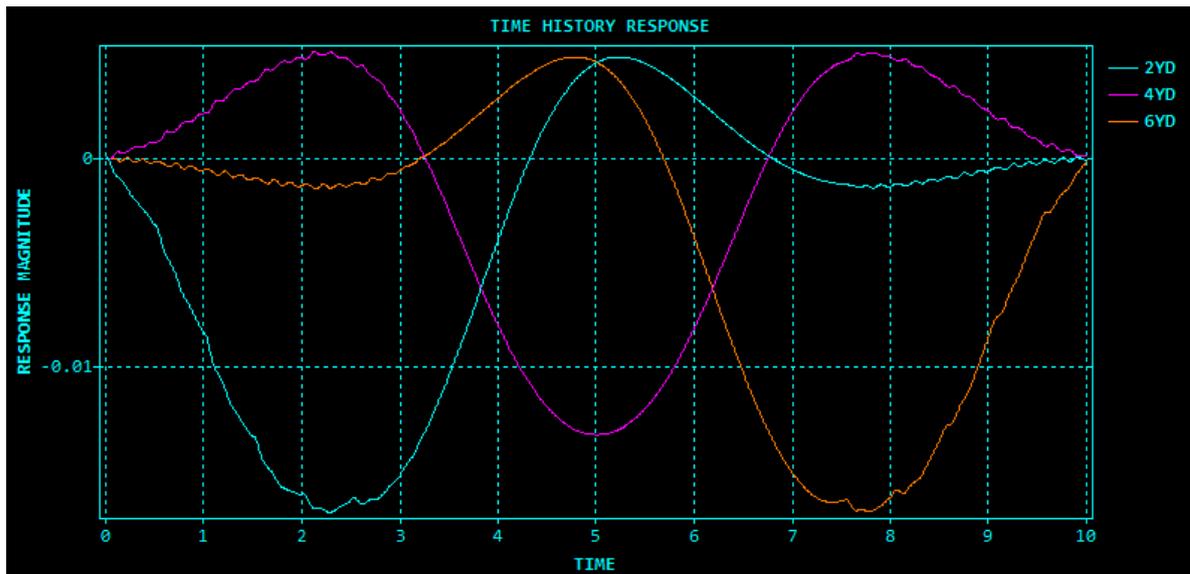


Figura 5.20 – Histórico no tempo dos deslocamentos para cargas móveis (m)

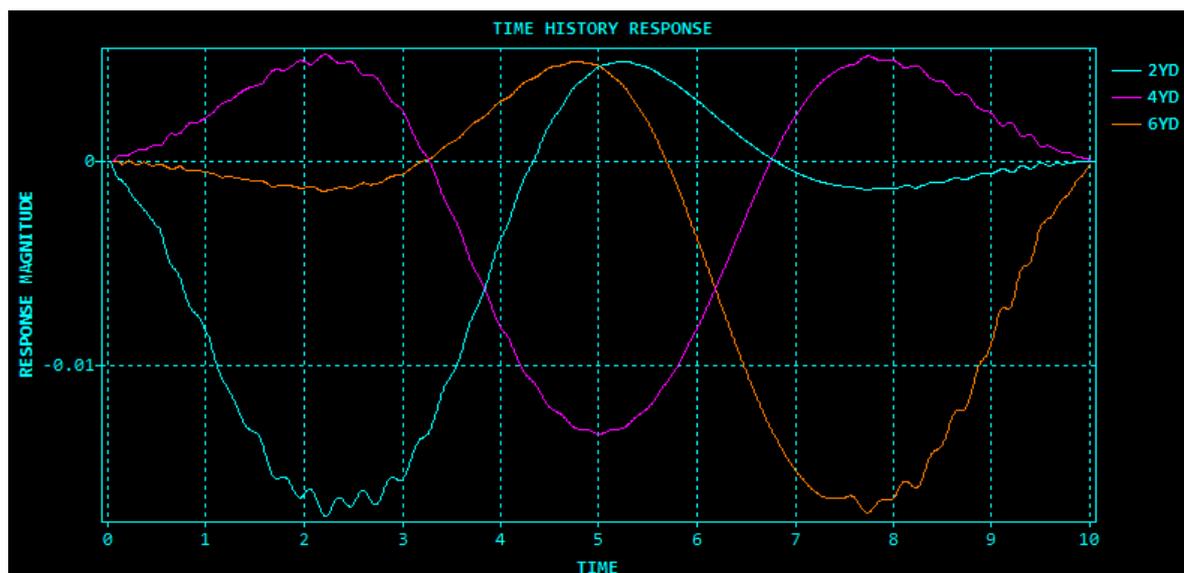


Figura 5.21 – Histórico no tempo dos deslocamentos para massas móveis (m)

Observa-se que, neste caso, a influência da massa do veículo na resposta da estrutura diminui consideravelmente. Demonstra-se que para a presente relação massa do veículo / massa da estrutura, uma análise de massas móveis gera resultados com variações pequenas em relação a uma análise de cargas móveis. Estas variações tendem a ser desprezíveis e até mesmo nulas à medida que se diminui a razão entre as massas dos sistemas.

5.1.6. Determinação das velocidades críticas

Sabe-se que os fatores que possuem maiores contribuições na resposta são: relação entre as massas do veículo/estrutura e velocidade de passagem. A influência das massas dos veículos na resposta do problema aumenta à medida que a velocidade de passagem do veículo se aproxima das velocidades críticas de ressonância da estrutura.

Realiza-se uma análise para a obtenção das velocidades críticas de ressonância da estrutura sob passagem do mesmo veículo. Gera-se um gráfico para um intervalo de velocidade de passagem variando de 10 m/s a 150 m/s e os respectivos deslocamentos verticais absolutos máximos do nó central, sendo possível detectar velocidades críticas por simples inspeção visual da solução.

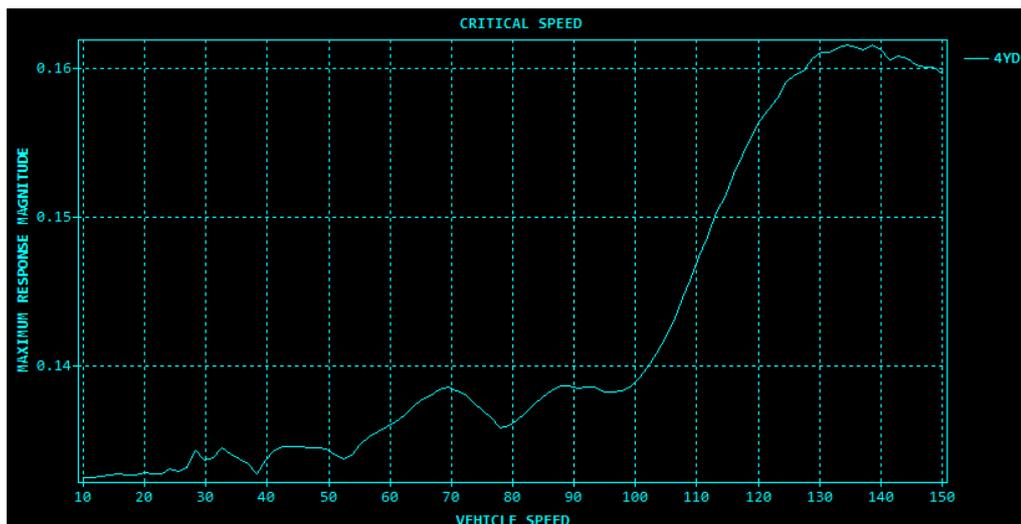


Figura 5.22 – Velocidades críticas para cargas móveis

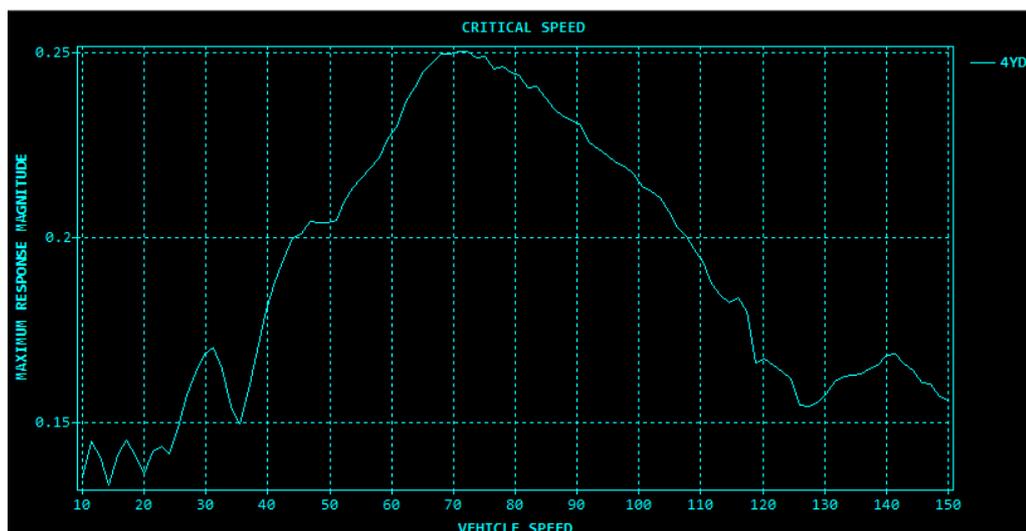


Figura 5.23 – Velocidades críticas para massas móveis

As Figura 5.22 e Figura 5.23 mostram os gráficos de deslocamentos verticais absolutos máximos em função da velocidade de passagem do veículo para o nó central da estrutura, considerando cargas e massas móveis, respectivamente. A antecipação do pico de velocidade crítica para a análise de massas móveis é condizente com a teoria. Esta defasagem se justifica pela adição de massa à estrutura devido ao acoplamento com os veículos, o que caracteriza uma diminuição das frequências naturais da mesma e que por sua vez, terá suas respostas amplificadas quando submetida a uma velocidade de passagem menor. Ainda, observa-se que a influência da consideração da massa dos veículos principalmente em condições de velocidades críticas é alta como mostrado na Figura 5.23. Para este caso estudado, esta consideração gerou deslocamentos máximos absolutos maiores do que os gerados pela análise

de cargas móveis (sem consideração das massas do veículo) também em condições de velocidades críticas como mostrado na Figura 5.22.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1. Conclusões

A necessidade de análises específicas vem crescendo de forma concomitante à tecnologia. O problema dinâmico em pontes induzido pelo movimento de veículos é estudado desde os primórdios da engenharia, apesar de poder ser considerado tema relativamente novo no Brasil.

É comum que se utilizem artifícios capazes de simular de forma simplificada o problema pelo projetista, o que leva a resultados mais próximos à segurança. Uma possibilidade é levar em consideração as forças de inércia geradas pelo veículo na estrutura através das forças de contato e do acoplamento dos sistemas, o que proporciona não só esforços e deslocamentos mais realistas, mas também projetos mais econômicos.

O objetivo desta dissertação de mestrado foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional, validada com modelos analíticos simples e com pacotes comerciais de elementos finitos, capaz de solucionar o problema das massas móveis e obter a resposta estrutural através de forças de contato e do acoplamento da matriz de massa do veículo à da estrutura.

Foram apresentados os diferentes modelos físicos normalmente utilizados neste tipo de análise e suas diferenças. Constatou-se que a utilização de modelos de massa suspensa possui influência desprezível na resposta estrutural. A relevância deste modelo está presente em análises de conforto de passageiros, o que foge do escopo desta dissertação. Assim, foram utilizados os modelos de massa e carga móvel para os estudos realizados no presente trabalho.

Resolveu-se o problema do acoplamento dos sistemas (veículo e estrutura) através das forças de contato. A solução numérica obtida por esta abordagem permite que a complexidade do sistema do veículo utilizado seja limitada apenas pela quantidade de recursos computacionais disponíveis. Como mencionado, para esta dissertação os veículos foram modelados como cargas e/ou massas pontuais, tendo em vista sua maior influência na resposta estrutural.

A implementação computacional do programa LOADYN foi feita de maneira a tirar vantagem do alto índice de esparsidade dos sistemas algébricos tratados. Sendo assim, foi

necessário que os códigos criados fossem capazes de suportar e trabalhar com matrizes armazenadas em forma de perfil, como, por exemplo, o *sparse solver*. O que gera menores tempos de processamento e requer menor quantidade de memória para armazenamento.

A compreensão das propriedades dinâmicas da estrutura é fundamental para um bom entendimento do problema dinâmico. Por isso, adicionou-se análise modal ao programa. O algoritmo implementado para a resolução do problema de autovalor generalizado é capaz de lidar com sistemas singulares, tornando possível a obtenção de modos de corpo rígido e modos elásticos para estruturas não restringidas.

A análise do modelo de ponte possibilitou a verificação do programa em condições que simulam análises preliminares reais feitas em estágios iniciais de projetos de pontes. O tempo de processamento foi satisfatório tendo em vista a natureza do problema e o poder computacional atual. Os resultados obtidos se mostraram condizentes com o esperado.

Comparou-se o comportamento do modelo computacional simulando a passagem de cargas e massas móveis. Constatou-se que para uma baixa relação entre massas dos sistemas, não existe variação significativa nas respostas da estrutura. Esta variação aumenta à medida que a relação entre as massas dos sistemas cresce e à medida que a velocidade de passagem aumenta. Ressalta-se que, principalmente, quando se atingem velocidades críticas de passagem a variação entre respostas perde o caráter desprezível e assume relevância significativa. Observou-se que as piores condições dinâmicas ocorrem em momentos de entrada e saída do veículo da estrutura.

Mostrou-se também, através de representação gráfica, a diferença existente nos valores de velocidades críticas máximas ao se tratar de cargas e massas móveis. Observou-se uma redução no valor da velocidade crítica máxima apresentada para o problema de massas móveis quando comparados ao problema de cargas móveis, o que conforme explicado, condiz com a teoria.

A resolução do problema de massas móveis requer um processamento, via de regra, levemente maior quando comparada à resolução do problema de cargas móveis. Porém, ao se levar em consideração o atual poder computacional disponível, a pequena economia em tempo e processamento de máquina, neste caso, não justificaria uma possível perda de acurácia em detrimento de soluções mais próximas ao modelo real.

6.2. Sugestões e aprimoramentos futuros

As suposições atribuídas aos modelos matemáticos e computacionais que descrevem um problema físico permitem a consideração de hipóteses simplificadoras. Estas geram soluções também simplificadas dentro da tolerância admitida para cada problema.

O problema abordado nesta dissertação engloba diferentes temas e possui um vasto campo de investigações possíveis. Neste trabalho, foi dado enfoque apenas à análise das respostas do sistema estrutural. De forma análoga, algumas considerações são feitas caso se queira estudar o comportamento do veículo, por exemplo, em uma análise de conforto ao usuário.

As irregularidades existentes nos trilhos ao longo das pontes podem ser simuladas no problema através de funções ruído ou funções de densidade espectral. Condições de salto também podem ser adicionadas ao problema e facilmente identificadas na presença de forças de contato negativas, indicando a ausência de contato com a estrutura. Outra consideração possível na análise seria a de se levar em conta as forças centrífugas geradas em condições de curva e as forças de Coriolis em casos específicos.

No mesmo contexto, também existe interesse em análises capazes de combinar o problema discutido no presente trabalho com carregamento sísmico de forma concomitante. Busca-se, principalmente, mitigar possíveis riscos de descarrilamento. Ressalta-se que a ferramenta aqui desenvolvida não se restringe à análise de estruturas submetidas a trens de alta velocidade somente.

Pretende-se aprimorar o programa através da implementação de apoios elásticos, articulações nas barras, ligações elásticas, elementos de casca, não linearidade física e geométrica, entre outros.

Por fim, observou-se que a consideração de esforços dinâmicos em pontes pela norma leva a resultados conservadores quando comparados com os resultados obtidos pela análise numérica desenvolvida. Em casos específicos, a metodologia aqui desenvolvida contribuiria com resultados capazes de representar o problema de forma mais realista e precisa, e possivelmente para projetos mais econômicos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7187**. Rio de Janeiro: Projeto de Pontes de Concreto Armado e de Concreto protendido - Procedimento, 2021.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996.

BATHE, K.-J.; NOH, G. For direct time integrations: A comparison of the Newmark and Bathe schemes. **Computers and Structures**, 2019. 12.

BOLOTIN, V. V. **The Dynamic Stability of Elastic Systems**. HoldenDay, Inc. San Francisco, California, U.S.A. 1964.

CEPEDA, F. K. R.; CASTILLO, F. G. **Análisis dinámico de estructuras sometidas a acciones de trenes de alta velocidad**. Universidad Politécnica de Madrid - Grupo de Mecánica Computacional. Madrid, p. 100. 2005.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures. Theory and application to earthquake engineering**. 4^a. ed. [S.l.]: Prentice-Hall.

FELIPPA, C. A. **Introduction to finite element methods**. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. Boulder, Colorado, p. 612. 2004.

FRYBA, L. **Vibration of Solids and Structures under Moving Loads**. Noordhoff International Publishing, Groningen. The Netherlands. 1972.

FRYBA, L. **Dynamics of Railway Bridges**. Academia Praha. República Tcheca, p. 332. 1996.

GERE, J. M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos materiais**. 7. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

GUPTA, R. K. **Dynamic loading of highway bridges**. ASCE. [S.l.], p. 337–393. 1980.

HOFFMAN, J. D. **Numerical methods for engineers and scientists**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

INGLIS, C. E. **A mathematical treatise on vibration in railway bridges**. Cambridge. 1934.

JR, W. W. **Computer Programs for Structural Analysis**. [S.l.]: Van Nostrand , 1967.

KOLOUSEK, V. **Dynamic in Engineering Structures**. Praga. 1973.

LAZARUS. **The professional Free Pascal RAD IDE**. <https://www.lazarus-ide.org/>.

- LIMA, S. S. **Análise de Estruturas com Computadores**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2017.
- LIMA, S. S.; SANTOS, S. H. C. **Análise dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, v. 1, 2008.
- LIMA, S. S.; SORIANO, H. L. Structured Types in Pascal for Structural Analysis. **Computers & Structures**, Great Britain, v. 45, n. 4, p. 799-800, September 1991.
- LIMA, S. S.; SORIANO, H. L.; REIS, F. J. C. **Considerações Quanto à Determinação do Coeficiente de Impacto em Pontes**. V Congresso de Engenharia Civil. Juiz de Fora, p. 7. 2002.
- MARTHA, L. F. **Análise Matricial de Estruturas com Orientação a Objetos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- MATHWORKS. **MATLAB**. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- NEWMARK, N. M.; CHAN, S. P. **A comparison of numerical methods for analyzing the dynamic response of structures**. The Office of Naval Research Department of the Navy; the Department of Civil Engineering University of Illinois. Urbana, Illinois, p. 96. 1952.
- ÖCHSNER, A.; MERKEL, M. **One-dimensional finite elements**. 2. ed. Germany: Springer.
- PESTEREV, A. V. **On asymptotics of the solution of the moving oscillator problem**. [S.l.]. 2003.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1968.
- PTC. **Mathcad**. <https://www.mathcad.com>.
- RAMALHO, M. A. **Sistema para Análise de Estruturas Considerando Interação com Meio Elástico**. Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, p. 401. 1990.
- SALT. **Sistema de Análise de Estruturas**. <https://saltserver.org/>.
- SHREINER, D. et al. **OpenGL Programming Guide**. 8. ed. Michigan: Pearson Education Inc., 2013.
- SHREINER, D. **OpenGL programming guide**. [S.l.]: [s.n.].
- SORIANO, H. L. **Elementos finitos**. Ciência Moderna. Rio de Janeiro, p. 411. 2009.
- SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- STOKES, G. G. **Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges**. Cambridge. [S.l.]. 1849.
- TIMOSHENKO, S. P. Y. D. H. **Vibration problems in engineering**. Nova York. 1955.

VALERIANO, R. **Métodos aproximados em mecânica aplicada - Problemas de valores de contorno**. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Escola Politécnica. Rio de Janeiro. 2018.

WATSON, R. W. **Algorithms and Application of Sparse Matrix Assembly and Equation Solvers for Aeroacoustics**. NTRS - NASA Technical Reports Server. [S.l.], p. 10. 2001.

WILLIS, R. **Experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over bars with different velocities**. Londres. 1849.

YANG, Y. B.; YAU, J. D.; WU, Y. S. **Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With Applications to High-Speed Railways**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.

YAU, J. D. **Dynamic response of bridges travelled by trains — Analytical and numerical approaches**. National Taiwan University. Taipei, Taiwan, R.O.C. 1996.

ZIMMERMANN, H. **As vibrações de uma viga com uma carga em movimento (em tradução livre)**. [S.l.]. 1896.

8. ANEXO A – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA VIGA SOB CARGA MÓVEL AMORTECIDA

DESLOCAMENTOS

```

u_amort(x,t) := for i ∈ 1..n
|
|  ω ←  $\frac{i \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}$ 
|
|  ωd ← ω · √(1 - ξ2)
|
|  Ω ←  $\frac{i \cdot \pi \cdot v}{L}$ 
|
|  S ←  $\frac{\Omega}{\omega}$ 
|
|  somatorio ←  $\frac{2 \cdot p \cdot L^3}{(E \cdot I \cdot i^4 \cdot \pi^4)} \cdot \left[ (1 - S^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) - 2 \cdot \xi \cdot S \cdot \cos(\Omega \cdot t) + e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ 2 \cdot \xi \cdot S \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + \frac{S}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot (2 \cdot \xi^2 + S^2 - 1) \cdot \sin(\omega_d \cdot t) \right] \right] \cdot \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$ 
|
|  resposta ← resposta + somatorio
|
return resposta

```

VELOCIDADES

```

v_amort(x,t) := for i ∈ 1..n
  ω ←  $\frac{i \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}$ 
  ωd ← ω · √(1 - ξ2)
  Ω ←  $\frac{i \cdot \pi \cdot v}{L}$ 
  S ←  $\frac{\Omega}{\omega}$ 
  somatorio ←  $\frac{2 \cdot L^3 \cdot p \cdot \left[ e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \omega_d \cdot \sin(t \cdot \omega_d) - \frac{S \cdot \omega_d \cdot \cos(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t) \cdot (S^2 - 1) + \xi \cdot \omega \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + \frac{S \cdot \sin(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] - 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right]}{\pi^4 \cdot E \cdot I \cdot i^4 \cdot \left[ (S^2 - 1)^2 + 4 \cdot S^2 \cdot \xi^2 \right]}$ 
  resposta ← resposta + somatorio
return resposta

```

ACELERAÇÕES

```

a_amort(x,t) := for i ∈ 1..n
  ω ←  $\frac{i \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}$ 
  ωd ← ω · √(1 - ξ2)
  Ω ←  $\frac{i \cdot \pi \cdot v}{L}$ 
  S ←  $\frac{\Omega}{\omega}$ 
  somatorio ←  $\frac{2 \cdot L^3 \cdot p \cdot \left[ \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \cdot (S^2 - 1) - e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \omega_d^2 \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + \frac{S \cdot \omega_d^2 \cdot \sin(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + \xi^2 \cdot \omega^2 \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + \frac{S \cdot \sin(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \omega_d \cdot \sin(t \cdot \omega_d) - \frac{S \cdot \omega_d \cdot \cos(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]}{\pi^4 \cdot E \cdot I \cdot i^4 \cdot \left[ (S^2 - 1)^2 + 4 \cdot S^2 \cdot \xi^2 \right]}$ 
  resposta ← resposta + somatorio
return resposta

```

MOMENTO FLETOR

```

m_amort(x,t) := for i ∈ 1..n
  ω ←  $\frac{i \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}$ 
  ωd ← ω · √(1 - ξ2)
  Ω ←  $\frac{i \cdot \pi \cdot v}{L}$ 
  S ←  $\frac{\Omega}{\omega}$ 
  somatorio ←  $\frac{2 \cdot L \cdot p \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{L}\right) \cdot \left[ \sin(\Omega \cdot t) \cdot (S^2 - 1) - e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + \frac{S \cdot \sin(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]}{\pi^2 \cdot i^2 \cdot \left[ (S^2 - 1)^2 + 4 \cdot S^2 \cdot \xi^2 \right]}$ 
  resposta ← resposta + somatorio
return resposta

```

ESFORÇO CORTANTE

```

c_amort(x,t) := for i ∈ 1..n
  ω ←  $\frac{2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m}}$ 
  ωd ← ω · √(1 - ξ2)
  Ω ←  $\frac{i \cdot \pi \cdot v}{L}$ 
  S ←  $\frac{\Omega}{\omega}$ 
  somatorio ←  $\frac{2 \cdot p \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot i \cdot x}{L}\right) \cdot \left[ \sin(\Omega \cdot t) \cdot (S^2 - 1) - e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[ 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(t \cdot \omega_d) + \frac{S \cdot \sin(t \cdot \omega_d) \cdot (S^2 + 2 \cdot \xi^2 - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] + 2 \cdot S \cdot \xi \cdot \cos(\Omega \cdot t) \right]}{\pi \cdot i \cdot \left[ (S^2 - 1)^2 + 4 \cdot S^2 \cdot \xi^2 \right]}$ 
  resposta ← resposta + somatorio
return resposta

```

9. ANEXO B – ARQUIVOS DO MODELO USADO NA VALIDAÇÃO DO PROGRAMA

Loadyn v1.0
Input data file

MODEL NAME: VIGA_20_ELEMENTOS
ANALYSIS TYPE: MOVING MASSES

M O D E L

NODAL COORDINATES

Node	X	Y	Z
1	0.0	0.0	0.0
2	1.0	0.0	0.0
3	2.0	0.0	0.0
4	3.0	0.0	0.0
5	4.0	0.0	0.0
6	5.0	0.0	0.0
7	6.0	0.0	0.0
8	7.0	0.0	0.0
9	8.0	0.0	0.0
10	9.0	0.0	0.0
11	10.0	0.0	0.0
12	11.0	0.0	0.0
13	12.0	0.0	0.0
14	13.0	0.0	0.0
15	14.0	0.0	0.0
16	15.0	0.0	0.0
17	16.0	0.0	0.0
18	17.0	0.0	0.0
19	18.0	0.0	0.0
20	19.0	0.0	0.0
21	20.0	0.0	0.0

0

BOUNDARY CONDITIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	1	1	1	1	1	0
21	0	1	1	1	1	0

0

MATERIAL PROPERTIES

Num	E	Poisson	Alpha	Gamma
1	28E+06	0.2	1E-05	25.0

0

SECTION PROPERTIES

Num	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	0.34	0	0	1	0.05241	0.05241

0

ELEMENT PROPERTIES

Num	Nodei	Nodej	Material	Section	Gamma_ang
1	1	2	1	1	0.
2	2	3	1	1	0.
3	3	4	1	1	0.

4	4	5	1	1	0.
5	5	6	1	1	0.
6	6	7	1	1	0.
7	7	8	1	1	0.
8	8	9	1	1	0.
9	9	10	1	1	0.
10	10	11	1	1	0.
11	11	12	1	1	0.
12	12	13	1	1	0.
13	13	14	1	1	0.
14	14	15	1	1	0.
15	15	16	1	1	0.
16	16	17	1	1	0.
17	17	18	1	1	0.
18	18	19	1	1	0.
19	19	20	1	1	0.
20	20	21	1	1	0.

0

 MOVING MASSES ANALYSIS

RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES

Omega i	Omega j	Damp. ratio
32	72	0.05

0

TRAFFIC SEQUENCE

Elements

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Entry node	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

0

VEHICLE PROPERTIES

Load magnitude	No of loads	Axle dist	Speed	Acceleration
-100	1	0	10	0

0

MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES

Iterations	Delta t	Inertial effect
400	0.005	0

0

 MODAL ANALYSIS

DYNAMIC EIGENPROBLEM

Number of modes	Tolerance	Max iterations
15	1E-12	40

0

----- E N D O F F I L E -----

ARQUIVO DE SAÍDA

LOADYN v1.0 File: <C:\Users\Rafael\VIGA20EL~mvnmss.out>
 09-05-21 17:03:17

 ANALYSIS TYPE: MOVING MASSES
 MODEL NAME: VIGA_20_ELEMENTOS

M O D E L D A T A

```

-----
Nodes:                                                    21
-----
Elements:                                                20
-----
Supports:                                                2
-----

```

NODAL COORDINATES

Node	X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.000	0.000
3	2.000	0.000	0.000
4	3.000	0.000	0.000
5	4.000	0.000	0.000
6	5.000	0.000	0.000
7	6.000	0.000	0.000
8	7.000	0.000	0.000
9	8.000	0.000	0.000
10	9.000	0.000	0.000
11	10.000	0.000	0.000
12	11.000	0.000	0.000
13	12.000	0.000	0.000
14	13.000	0.000	0.000
15	14.000	0.000	0.000
16	15.000	0.000	0.000
17	16.000	0.000	0.000
18	17.000	0.000	0.000
19	18.000	0.000	0.000
20	19.000	0.000	0.000
21	20.000	0.000	0.000

SUPPORTS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	1	1	1	1	1	0
21	0	1	1	1	1	0

MATERIAL PROPERTIES

No	E	G	Poisson	Alpha	Gamma	Density
1	2.800E+007	1.167E+007	2.000E-001	1.000E-005	25.000	2.549

SECTION PROPERTIES

No	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	3.400E-001	0.000E+000	0.000E+000	1.000E+000	5.241E-002	5.241E-002

ELEMENT PROPERTIES

No	Node i	Node j	Material	Section	Gamma_ang	Length
1	1	2	1	1	0.000	1.000
2	2	3	1	1	0.000	1.000
3	3	4	1	1	0.000	1.000
4	4	5	1	1	0.000	1.000
5	5	6	1	1	0.000	1.000
6	6	7	1	1	0.000	1.000
7	7	8	1	1	0.000	1.000
8	8	9	1	1	0.000	1.000
9	9	10	1	1	0.000	1.000
10	10	11	1	1	0.000	1.000
11	11	12	1	1	0.000	1.000
12	12	13	1	1	0.000	1.000
13	13	14	1	1	0.000	1.000
14	14	15	1	1	0.000	1.000
15	15	16	1	1	0.000	1.000
16	16	17	1	1	0.000	1.000
17	17	18	1	1	0.000	1.000

18	18	19	1	1	0.000	1.000
19	19	20	1	1	0.000	1.000
20	20	21	1	1	0.000	1.000

M O V I N G M A S S E S
D Y N A M I C A N A L Y S I S D A T A

```

-----
Iterations:                                     400
-----
Delta t:                                       5.000000000000001E-003
-----
Damping ratio:                               5.000000000000003E-002
-----
Damping frequency(wi):                       32.000
-----
Damping frequency(wj):                       72.000
-----
Load magnitude:                              -100.00
-----
Number of loads:                             1
-----
Axel distance:                              0.00
-----
Vehicle speed:                               10.00
-----
Vehicle acceleration:                        0.00
-----
Inertial effect:                             NO
-----
Traffic sequence:
                                           1 = Element 1
                                           2 = Element 2
                                           3 = Element 3
                                           4 = Element 4
                                           5 = Element 5
                                           6 = Element 6
                                           7 = Element 7
                                           8 = Element 8
                                           9 = Element 9
                                           10 = Element 10
                                           11 = Element 11
                                           12 = Element 12
                                           13 = Element 13
                                           14 = Element 14
                                           15 = Element 15
                                           16 = Element 16
                                           17 = Element 17
                                           18 = Element 18
                                           19 = Element 19
                                           20 = Element 20
-----

```

MAX ABSOLUTE NODAL DISPLACEMENTS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0017585
2	0.0000000	0.0017523	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0017399
3	0.0000000	0.0034674	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0016841
4	0.0000000	0.0051081	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0015911
5	0.0000000	0.0066372	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0014616
6	0.0000000	0.0080177	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0012961
7	0.0000000	0.0092139	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0010962
8	0.0000000	0.0101891	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0008857
9	0.0000000	0.0109085	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006607
10	0.0000000	0.0113388	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0004314

11	0.000000	0.0114496	0.000000	0.000000	0.000000	0.0002187
12	0.000000	0.0112408	0.000000	0.000000	0.000000	0.0004343
13	0.000000	0.0108277	0.000000	0.000000	0.000000	0.0006555
14	0.000000	0.0101467	0.000000	0.000000	0.000000	0.0008898
15	0.000000	0.0091999	0.000000	0.000000	0.000000	0.0011008
16	0.000000	0.0080227	0.000000	0.000000	0.000000	0.0012833
17	0.000000	0.0066519	0.000000	0.000000	0.000000	0.0014559
18	0.000000	0.0051258	0.000000	0.000000	0.000000	0.0015915
19	0.000000	0.0034824	0.000000	0.000000	0.000000	0.0016890
20	0.000000	0.0017608	0.000000	0.000000	0.000000	0.0017477
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0017673

MAX ABSOLUTE NODAL VELOCITIES

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0063421
2	0.000000	0.0063300	0.000000	0.000000	0.000000	0.0062205
3	0.000000	0.0121846	0.000000	0.000000	0.000000	0.0054809
4	0.000000	0.0172792	0.000000	0.000000	0.000000	0.0047088
5	0.000000	0.0215850	0.000000	0.000000	0.000000	0.0039521
6	0.000000	0.0250853	0.000000	0.000000	0.000000	0.0032667
7	0.000000	0.0278253	0.000000	0.000000	0.000000	0.0025843
8	0.000000	0.0298445	0.000000	0.000000	0.000000	0.0018898
9	0.000000	0.0311950	0.000000	0.000000	0.000000	0.0012846
10	0.000000	0.0319083	0.000000	0.000000	0.000000	0.0012630
11	0.000000	0.0320065	0.000000	0.000000	0.000000	0.0011327
12	0.000000	0.0313885	0.000000	0.000000	0.000000	0.0015225
13	0.000000	0.0300614	0.000000	0.000000	0.000000	0.0020757
14	0.000000	0.0280495	0.000000	0.000000	0.000000	0.0025484
15	0.000000	0.0253923	0.000000	0.000000	0.000000	0.0029666
16	0.000000	0.0221454	0.000000	0.000000	0.000000	0.0035193
17	0.000000	0.0183799	0.000000	0.000000	0.000000	0.0039975
18	0.000000	0.0141810	0.000000	0.000000	0.000000	0.0043840
19	0.000000	0.0096460	0.000000	0.000000	0.000000	0.0046683
20	0.000000	0.0048812	0.000000	0.000000	0.000000	0.0048422
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0049008

MAX ABSOLUTE NODAL ACCELERATIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.000000	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.5287617
2	0.000000	0.3655978	0.000000	0.000000	0.000000	0.2162870
3	0.000000	0.4751770	0.000000	0.000000	0.000000	0.2304777
4	0.000000	0.4415122	0.000000	0.000000	0.000000	0.1979670
5	0.000000	0.4776950	0.000000	0.000000	0.000000	0.1089724
6	0.000000	0.5210372	0.000000	0.000000	0.000000	0.1237108
7	0.000000	0.5440130	0.000000	0.000000	0.000000	0.0936586
8	0.000000	0.5480091	0.000000	0.000000	0.000000	0.1174860
9	0.000000	0.5312954	0.000000	0.000000	0.000000	0.1205275
10	0.000000	0.5318092	0.000000	0.000000	0.000000	0.1021479
11	0.000000	0.5872349	0.000000	0.000000	0.000000	0.1228685
12	0.000000	0.6084041	0.000000	0.000000	0.000000	0.1233919
13	0.000000	0.6299474	0.000000	0.000000	0.000000	0.1078189
14	0.000000	0.6433432	0.000000	0.000000	0.000000	0.1217604
15	0.000000	0.6156830	0.000000	0.000000	0.000000	0.1123511
16	0.000000	0.5619862	0.000000	0.000000	0.000000	0.0849546
17	0.000000	0.5143873	0.000000	0.000000	0.000000	0.1079717
18	0.000000	0.4325543	0.000000	0.000000	0.000000	0.1165484
19	0.000000	0.3147508	0.000000	0.000000	0.000000	0.1346980
20	0.000000	0.1662667	0.000000	0.000000	0.000000	0.1600722
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.1694105

MAX SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	-0.000	98.209	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
21	0.000	99.891	-0.000	-0.000	-0.000	0.000

MIN SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
21	0.000	-1.642	-0.000	-0.000	-0.000	0.000

MAX ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	0.000	95.500	0.000	0.000	0.000	0.008
	2	0.000	1.311	0.000	0.000	0.000	95.503
2	2	0.000	89.941	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.000	6.340	0.000	0.000	0.000	179.917
3	3	0.000	85.112	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.000	10.525	0.000	0.000	0.000	255.337
4	4	0.000	79.783	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.000	15.014	0.000	0.000	0.000	319.304
5	5	0.000	75.130	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	0.000	20.438	0.000	0.000	0.000	376.131
6	6	0.000	69.817	0.000	0.000	0.000	0.148
	7	0.000	24.848	0.000	0.000	0.000	419.007
7	7	0.000	65.139	0.000	0.000	0.000	0.430
	8	0.000	30.288	0.000	0.000	0.000	457.111
8	8	0.000	59.902	0.000	0.000	0.000	0.769
	9	0.000	34.888	0.000	0.000	0.000	479.210
9	9	0.000	55.067	0.000	0.000	0.000	1.294
	10	0.000	40.139	0.000	0.000	0.000	497.858
10	10	0.000	49.971	0.000	0.000	0.000	1.635
	11	0.000	45.024	0.000	0.000	0.000	499.930
11	11	0.000	44.950	0.000	0.000	0.000	2.254
	12	0.000	50.043	0.000	0.000	0.000	498.223
12	12	0.000	39.995	0.000	0.000	0.000	2.741
	13	0.000	55.171	0.000	0.000	0.000	480.933
13	13	0.000	34.822	0.000	0.000	0.000	3.695
	14	0.000	60.017	0.000	0.000	0.000	458.182
14	14	0.000	29.970	0.000	0.000	0.000	4.803
	15	0.000	65.304	0.000	0.000	0.000	422.126
15	15	0.000	24.709	0.000	0.000	0.000	5.433
	16	0.000	70.052	0.000	0.000	0.000	378.592
16	16	0.000	19.915	0.000	0.000	0.000	5.568
	17	0.000	75.406	0.000	0.000	0.000	323.481
17	17	0.000	14.633	0.000	0.000	0.000	5.212
	18	0.000	80.116	0.000	0.000	0.000	259.474
18	18	0.000	9.863	0.000	0.000	0.000	4.392
	19	0.000	85.459	0.000	0.000	0.000	185.144
19	19	0.000	4.623	0.000	0.000	0.000	3.174
	20	0.000	90.169	0.000	0.000	0.000	101.178
20	20	0.000	1.657	0.000	0.000	0.000	1.662
	21	0.000	95.437	0.000	0.000	0.000	7.397

MIN ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-7.404
	2	0.000	-95.500	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2	0.000	-6.340	0.000	0.000	0.000	-102.915
	3	0.000	-89.916	0.000	0.000	0.000	0.000
3	3	0.000	-9.414	0.000	0.000	0.000	-181.030
	4	0.000	-85.112	0.000	0.000	0.000	0.000
4	4	0.000	-15.014	0.000	0.000	0.000	-262.132

		5	0.000	-79.783	0.000	0.000	0.000	0.000
5		5	0.000	-19.704	0.000	0.000	0.000	-318.821
		6	0.000	-75.130	0.000	0.000	0.000	-0.153
6		6	0.000	-24.745	0.000	0.000	0.000	-380.714
		7	0.000	-69.817	0.000	0.000	0.000	-0.435
7		7	0.000	-29.758	0.000	0.000	0.000	-418.083
		8	0.000	-65.139	0.000	0.000	0.000	-0.775
8		8	0.000	-34.669	0.000	0.000	0.000	-459.201
		9	0.000	-59.902	0.000	0.000	0.000	-1.298
9		9	0.000	-39.740	0.000	0.000	0.000	-478.285
		10	0.000	-55.067	0.000	0.000	0.000	-1.641
10		10	0.000	-44.702	0.000	0.000	0.000	-498.087
		11	0.000	-49.971	0.000	0.000	0.000	-2.258
11		11	0.000	-49.719	0.000	0.000	0.000	-498.840
		12	0.000	-44.950	0.000	0.000	0.000	-2.741
12		12	0.000	-54.797	0.000	0.000	0.000	-497.399
		13	0.000	-39.995	0.000	0.000	0.000	-3.693
13		13	0.000	-59.726	0.000	0.000	0.000	-479.499
		14	0.000	-34.822	0.000	0.000	0.000	-4.802
14		14	0.000	-64.912	0.000	0.000	0.000	-457.249
		15	0.000	-29.970	0.000	0.000	0.000	-5.432
15		15	0.000	-69.766	0.000	0.000	0.000	-420.026
		16	0.000	-24.709	0.000	0.000	0.000	-5.569
16		16	0.000	-75.015	0.000	0.000	0.000	-376.824
		17	0.000	-19.915	0.000	0.000	0.000	-5.215
17		17	0.000	-79.825	0.000	0.000	0.000	-320.266
		18	0.000	-14.633	0.000	0.000	0.000	-4.397
18		18	0.000	-85.079	0.000	0.000	0.000	-256.125
		19	0.000	-9.863	0.000	0.000	0.000	-3.182
19		19	0.000	-89.867	0.000	0.000	0.000	-180.203
		20	0.000	-4.623	0.000	0.000	0.000	-1.672
20		20	0.000	-95.072	0.000	0.000	0.000	-95.337
		21	0.000	-1.657	0.000	0.000	0.000	-0.005

End of file.

10. ANEXO C – ARQUIVOS DO MODELO USADO NO ESTUDO DE CASO

LoaDyn v1.0

Input data file

MODEL NAME: PONTE

ANALYSIS TYPE: MOVING MASSES

M O D E L

NODAL COORDINATES

Node	X	Y	Z
1	0.0	0.0	0.0
2	12.5	0.0	0.0
3	25.0	0.0	0.0
4	37.5	0.0	0.0
5	50.0	0.0	0.0
6	62.5	0.0	0.0
7	75.0	0.0	0.0
8	0.0	-2.5	0.0
9	0.0	-5.0	0.0
10	25.0	-5.0	0.0
11	25.0	-10.0	0.0
12	50.0	-5.0	0.0
13	50.0	-10.0	0.0
14	75.0	-2.5	0.0
15	75.0	-5.0	0.0

0

BOUNDARY CONDITIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
9	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1

0

MATERIAL PROPERTIES

Num	E	Poisson	Alpha	Gamma
1	28E+06	0.2	1E-05	25.0

0

SECTION PROPERTIES

Num	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	3.1	0	0	2.96	5.16	1.51
2	1	0	0	0.07	0.333	0.021

0

ELEMENT PROPERTIES

Num	Nodei	Nodej	Material	Section	Gamma_ang
1	1	2	1	1	0.
2	2	3	1	1	0.
3	3	4	1	1	0.
4	4	5	1	1	0.
5	5	6	1	1	0.
6	6	7	1	1	0.
7	8	1	1	2	0.
8	9	8	1	2	0.
9	10	3	1	2	0.
10	11	10	1	2	0.
11	12	5	1	2	0.
12	13	12	1	2	0.
13	14	7	1	2	0.
14	15	14	1	2	0.

0

MOVING MASSES ANALYSIS

RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES

Omega i	Omega j	Damp. ratio
13.9	37.3	0.05

0

TRAFFIC SEQUENCE

Elements

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Entry node

1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---

0

VEHICLE PROPERTIES

Load magnitude	No of loads	Axle dist	Speed	Acceleration
-1000	6	5	10	0

0

MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES

Iterations	Delta t	Inertial effect
1000	0.01	1

NODAL COORDINATES

Node	X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000
2	12.500	0.000	0.000
3	25.000	0.000	0.000
4	37.500	0.000	0.000
5	50.000	0.000	0.000
6	62.500	0.000	0.000
7	75.000	0.000	0.000
8	0.000	-2.500	0.000
9	0.000	-5.000	0.000
10	25.000	-5.000	0.000
11	25.000	-10.000	0.000
12	50.000	-5.000	0.000
13	50.000	-10.000	0.000
14	75.000	-2.500	0.000
15	75.000	-5.000	0.000

SUPPORTS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
9	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1

MATERIAL PROPERTIES

No	E	G	Poisson	Alpha	Gamma	Density
1	2.800E+007	1.167E+007	2.000E-001	1.000E-005	25.000	2.549

SECTION PROPERTIES

No	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	3.100E+000	0.000E+000	0.000E+000	2.960E+000	5.160E+000	1.510E+000
2	1.000E+000	0.000E+000	0.000E+000	7.000E-002	3.330E-001	2.100E-002

ELEMENT PROPERTIES

No	Node i	Node j	Material	Section	Gamma_ang	Length
1	1	2	1	1	0.000	12.500
2	2	3	1	1	0.000	12.500
3	3	4	1	1	0.000	12.500
4	4	5	1	1	0.000	12.500
5	5	6	1	1	0.000	12.500
6	6	7	1	1	0.000	12.500
7	8	1	1	2	0.000	2.500
8	9	8	1	2	0.000	2.500
9	10	3	1	2	0.000	5.000
10	11	10	1	2	0.000	5.000
11	12	5	1	2	0.000	5.000
12	13	12	1	2	0.000	5.000
13	14	7	1	2	0.000	2.500
14	15	14	1	2	0.000	2.500

M O V I N G M A S S E S

D Y N A M I C A N A L Y S I S D A T A

```

-----
Iterations:                                     1000
-----
Delta t:                                       1.000000000000000E-002
-----
Damping ratio:                               5.000000000000003E-002
-----
Damping frequency(wi):                       13.900
-----
Damping frequency(wj):                       37.300
-----
Load magnitude:                              -1000.00
-----
Number of loads:                             6
-----
Axel distance:                               5.00
-----
Vehicle speed:                               10.00
-----
Vehicle acceleration:                         0.00
-----
Inertial effect:                             YES
-----
Traffic sequence:
                                           1 = Element 1
                                           2 = Element 2
                                           3 = Element 3
                                           4 = Element 4
                                           5 = Element 5
                                           6 = Element 6
-----

```

MAX ABSOLUTE NODAL DISPLACEMENTS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0023951	0.0005313	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0022625
2	0.0023702	0.0173461	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002955
3	0.0023431	0.0017704	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0014522
4	0.0023240	0.0133335	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0001937
5	0.0023044	0.0017655	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0014359
6	0.0022848	0.0171838	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002884
7	0.0022698	0.0004884	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0022456
8	0.0011366	0.0002660	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006686
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
10	0.0028706	0.0008852	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006888
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0028260	0.0008828	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006758
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	0.0011983	0.0002442	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0007057

15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
----	----------	----------	----------	----------	----------	----------

MAX ABSOLUTE NODAL VELOCITIES

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0046791	0.0153226	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0063360
2	0.0046799	0.0196642	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0029640
3	0.0047178	0.0055125	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0027791
4	0.0047545	0.0146012	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0010957
5	0.0047042	0.0044910	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0030279
6	0.0047908	0.0248987	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0021046
7	0.0047553	0.0224431	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0070718
8	0.0059618	0.0075986	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0024666
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
10	0.0049597	0.0028314	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0010476
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.0054462	0.0023601	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0013779
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	0.0052549	0.0111563	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0021163
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

MAX ABSOLUTE NODAL ACCELERATIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0553973	3.6781464	0.0000000	0.0000000	0.0000000	1.5668303
2	0.0523602	1.7822752	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7059683
3	0.0520936	0.9459180	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3831493
4	0.0522513	0.4368706	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2131359
5	0.0569944	0.8488893	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3914041
6	0.0838052	1.2676821	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.7961680
7	0.1235756	9.5510594	0.0000000	0.0000000	0.0000000	4.0719039
8	1.1390658	1.7760804	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.3742147
9	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
10	0.4333166	0.5140380	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.2030537
11	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
12	0.2595133	0.4514016	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.1842291
13	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
14	1.6665667	4.6098328	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.8267090
15	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

MAX SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
9	221.830	3077.420	-0.000	-0.000	-0.000	128.029
11	43.400	4957.063	-0.000	-0.000	-0.000	243.602
13	64.676	4943.435	-0.000	-0.000	-0.000	143.475
15	72.961	2739.566	-0.000	-0.000	-0.000	344.523

MIN SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
9	-74.138	-249.806	-0.000	-0.000	-0.000	-327.070
11	-65.195	-489.349	-0.000	-0.000	-0.000	-146.711
13	-42.684	-497.051	-0.000	-0.000	-0.000	-239.946

15 -205.550 -251.543 -0.000 -0.000 -0.000 -122.918

MAX ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	213.065	2749.336	0.000	0.000	0.000	847.564
	2	73.416	1078.012	0.000	0.000	0.000	12012.501
2	2	197.307	493.826	0.000	0.000	0.000	2897.250
	3	72.151	3375.977	0.000	0.000	0.000	1919.944
3	3	133.437	3069.848	0.000	0.000	0.000	10312.405
	4	27.696	575.291	0.000	0.000	0.000	9488.936
4	4	136.464	576.705	0.000	0.000	0.000	3105.656
	5	25.557	3086.342	0.000	0.000	0.000	1956.127
5	5	197.144	3326.309	0.000	0.000	0.000	10387.696
	6	70.791	497.890	0.000	0.000	0.000	11944.135
6	6	202.688	1035.083	0.000	0.000	0.000	2896.731
	7	72.175	2729.709	0.000	0.000	0.000	240.048
7	8	2970.964	74.084	0.000	0.000	0.000	266.287
	1	249.802	221.633	0.000	0.000	0.000	242.584
8	9	2979.682	74.130	0.000	0.000	0.000	128.019
	8	249.803	221.827	0.000	0.000	0.000	59.761
9	10	4957.075	64.556	0.000	0.000	0.000	70.767
	3	488.986	43.274	0.000	0.000	0.000	405.113
10	11	4957.105	65.130	0.000	0.000	0.000	243.478
	10	489.079	43.387	0.000	0.000	0.000	86.420
11	12	4943.402	42.554	0.000	0.000	0.000	85.106
	5	496.714	64.451	0.000	0.000	0.000	282.780
12	13	4943.408	42.672	0.000	0.000	0.000	143.457
	12	496.823	64.632	0.000	0.000	0.000	70.722
13	14	2735.005	205.451	0.000	0.000	0.000	59.501
	7	251.524	72.907	0.000	0.000	0.000	777.204
14	15	2734.956	205.563	0.000	0.000	0.000	344.476
	14	251.526	72.963	0.000	0.000	0.000	264.174

MIN ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	-73.416	-249.393	0.000	0.000	0.000	-241.693
	2	-213.065	-493.911	0.000	0.000	0.000	-2896.932

2	2	-72.151	-1064.183	0.000	0.000	0.000	-12036.600
	3	-197.307	-90.612	0.000	0.000	0.000	-10418.834
3	3	-27.696	-398.010	0.000	0.000	0.000	-1930.102
	4	-133.437	-583.742	0.000	0.000	0.000	-3101.025
4	4	-25.557	-583.053	0.000	0.000	0.000	-9484.433
	5	-136.464	-404.848	0.000	0.000	0.000	-10313.471
5	5	-70.791	-91.829	0.000	0.000	0.000	-1941.179
	6	-197.144	-1089.422	0.000	0.000	0.000	-2897.151
6	6	-72.175	-492.974	0.000	0.000	0.000	-11963.928
	7	-202.688	-250.930	0.000	0.000	0.000	-930.776
7	8	-249.802	-221.633	0.000	0.000	0.000	-59.760
	1	-2970.964	-74.084	0.000	0.000	0.000	-819.997
8	9	-249.803	-221.827	0.000	0.000	0.000	-327.072
	8	-2979.682	-74.130	0.000	0.000	0.000	-266.226
9	10	-488.986	-43.274	0.000	0.000	0.000	-86.374
	3	-4957.075	-64.556	0.000	0.000	0.000	-286.900
10	11	-489.079	-43.387	0.000	0.000	0.000	-146.698
	10	-4957.105	-65.130	0.000	0.000	0.000	-70.751
11	12	-496.714	-64.451	0.000	0.000	0.000	-70.706
	5	-4943.402	-42.554	0.000	0.000	0.000	-406.270
12	13	-496.823	-64.632	0.000	0.000	0.000	-239.913
	12	-4943.408	-42.672	0.000	0.000	0.000	-85.094
13	14	-251.524	-72.907	0.000	0.000	0.000	-264.186
	7	-2735.005	-205.451	0.000	0.000	0.000	-241.769
14	15	-251.526	-72.963	0.000	0.000	0.000	-122.919
	14	-2734.956	-205.563	0.000	0.000	0.000	-59.489

End of file.

11. ANEXO D – GUIA DO USUÁRIO – PROGRAMA LOADYN

LOADYN

USER GUIDE
v1.0



2021

128



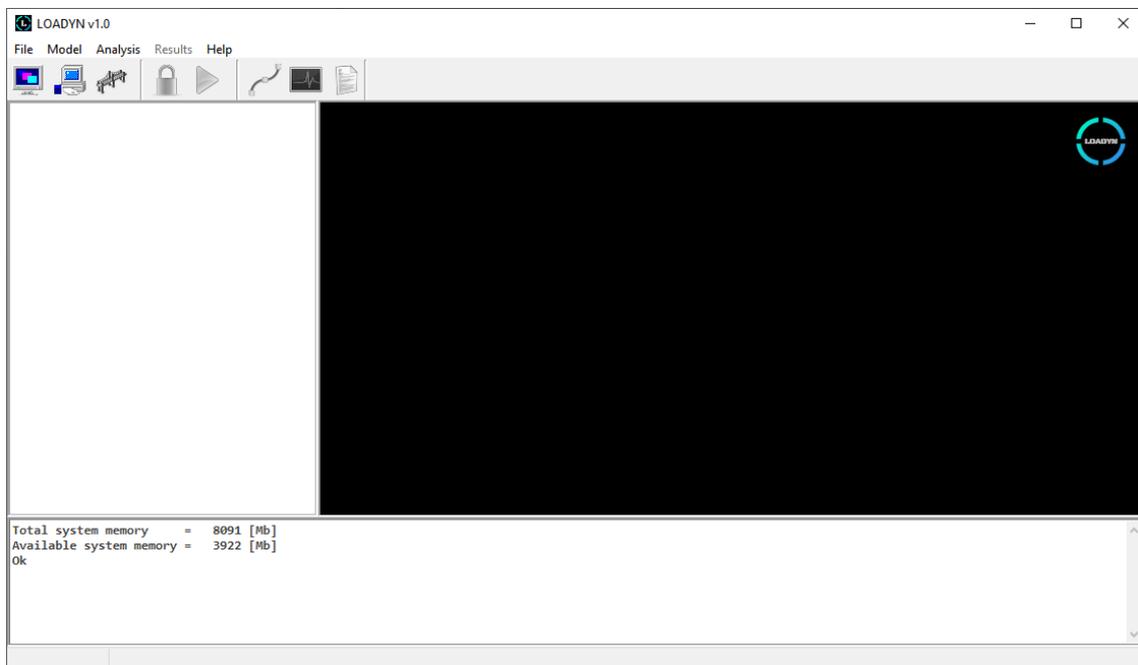
CONTENTS

1. ABOUTLOADYN.....	3
2. INPUT.....	3
2.1. INPUT EDITOR.....	3
2.2. LDN FILE.....	<i>Erro! Indicador não definido.</i>
3. RUNNING THE ANALYSIS.....	10
3.1. LINEAR STATIC ANALYSIS.....	10
3.2. MODAL ANALYSIS.....	17
3.3. MOVING MASSES/LOADS DYNAMIC ANALYSIS.....	28
3.4. CRITICAL SPEED ANALYSIS.....	38
4. LOADYN.....	45



1. ABOUT LOADYN

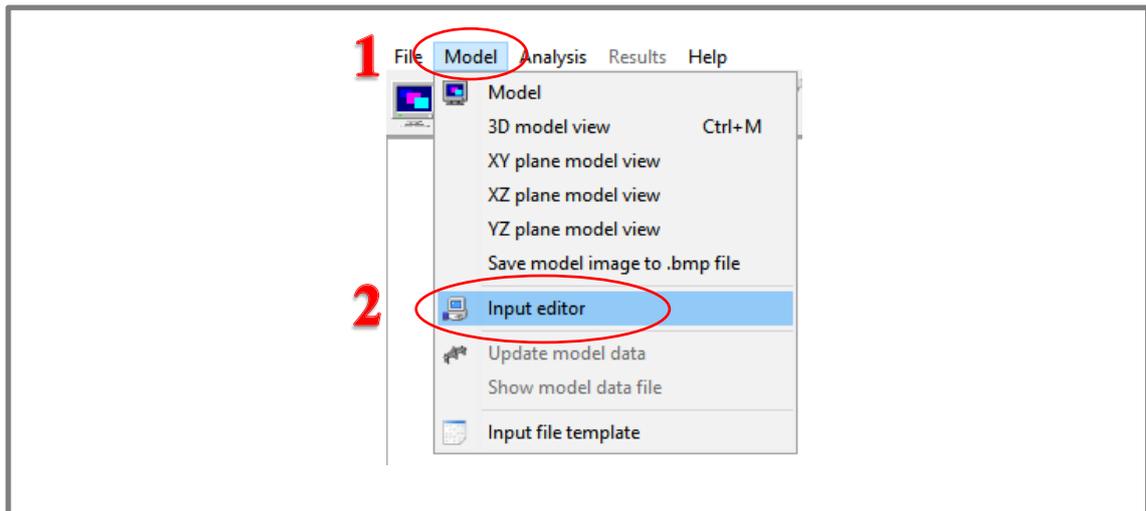
LOADYN v1.0 is a civil engineering software developed for static, dynamic and modal analysis of 3D frame structural systems. The LOADYNSolver is a built-in 64-bit finite element based engine that drives the analysis procedures. The solver uses sophisticated techniques when storing and processing the system data in order to improve solution time and space required. LOADYNSolver optimizes analysis by creating threads within the 64-bit processor which independently executes heavy tasks without performance loss. The user interface is shown below:



2. INPUT

2.1. INPUT EDITOR

The input editor tool is a text input environment within LOADYN's GUI that allows model and analysis data entry. To access the input editor follow [1]Model > [2]Input editor.

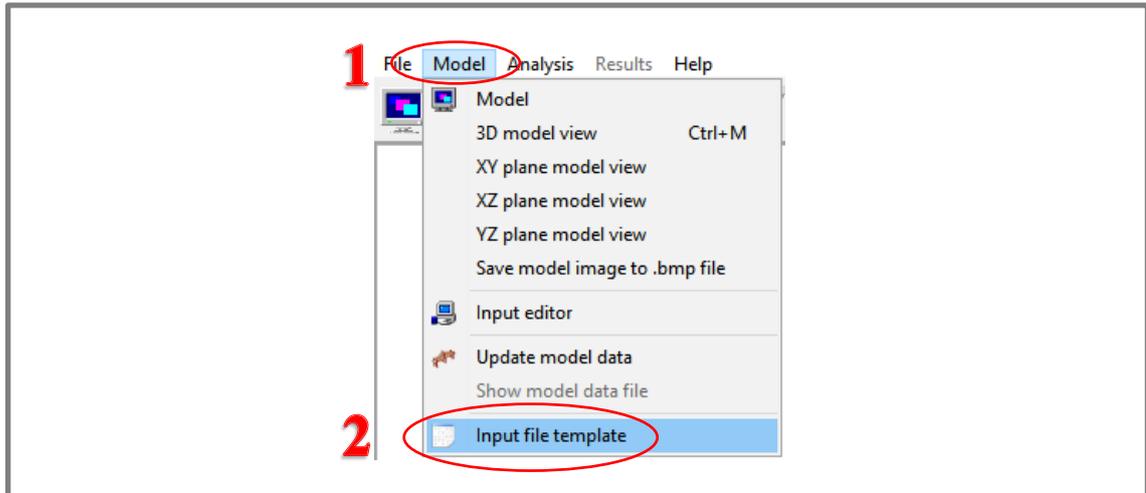


```
LOADYN v1.0
Input data file

MODEL NAME:
ANALYSIS TYPE:

----- END OF FILE -----
```

The user may start typing if the input data structure is already known. A input template can be generated otherwise. In order to generate a input template follow [1]Model > [2]Input file template.



```

LOADYN v1.0
Input data file

MODEL NAME:
ANALYSIS TYPE:

*****
M O D E L
*****

NODAL COORDINATES
Node      X      Y      Z

0

BOUNDARY CONDITIONS
Node      Dx      Dy      Dz      Rx      Ry      Rz

0

MATERIAL PROPERTIES
Num      E      Poisson      Alpha      Gamma

0

SECTION PROPERTIES
Num      Ax      Ay      Az      Ix      Iy      Iz

0

ELEMENT PROPERTIES
Num      Nodei      Nodej      Material      Section      Gamma_ang

0

```

2.2. LDN FILE

The .LDN file is an external text based file. It is used to input model and analysis data directly from the file. The TOWER.LDN file is presented as an example.



LoaDyn v1.0
 Input data file

MODEL NAME: TOWER
 ANALYSIS TYPE:

 M O D E L

NODAL COORDINATES

Node	X	Y	Z
1	1.3750	3.0000	1.3750
2	-1.3750	3.0000	1.3750
3	-1.3750	3.0000	-1.3750
4	1.3750	3.0000	-1.3750
5	1.2500	6.0000	1.2500
6	-1.2500	6.0000	1.2500
7	-1.2500	6.0000	-1.2500
8	1.2500	6.0000	-1.2500
9	1.1250	9.0000	1.1250
10	-1.1250	9.0000	1.1250
11	-1.1250	9.0000	-1.1250
12	1.1250	9.0000	-1.1250
13	1.0000	12.0000	1.0000
14	-1.0000	12.0000	1.0000
15	-1.0000	12.0000	-1.0000
16	1.0000	12.0000	-1.0000
17	1.5000	0.0000	1.5000
18	-1.5000	0.0000	1.5000
19	-1.5000	0.0000	-1.5000
20	1.5000	0.0000	-1.5000

0

BOUNDARY CONDITIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
17	1	1	1	1	1	1
18	1	1	1	1	1	1
19	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1

0

MATERIAL PROPERTIES

Num	E	Poisson	Alpha	Gamma
1	21000	0.2	1E-05	25.0

0

SECTION PROPERTIES

Num	Ax	Ay	Az	Ix	Iy	Iz
1	1.613	0	0	1.0	0.0542	0.0542

0

ELEMENT PROPERTIES

Num	Nodei	Nodej	Material	Section	Gamma_ang
1	1	2	1	1	0
2	2	3	1	1	0
3	3	4	1	1	0
4	4	1	1	1	0
5	5	6	1	1	0
6	6	7	1	1	0
7	7	8	1	1	0
8	8	5	1	1	0
9	9	10	1	1	0
10	10	11	1	1	0



11	11	12	1	1	0
12	12	9	1	1	0
13	13	14	1	1	0
14	14	15	1	1	0
15	15	16	1	1	0
16	16	13	1	1	0
17	1	6	1	1	0
18	2	5	1	1	0
19	1	5	1	1	0
20	2	7	1	1	0
21	3	6	1	1	0
22	2	6	1	1	0
23	3	8	1	1	0
24	4	7	1	1	0
25	3	7	1	1	0
26	4	5	1	1	0
27	1	8	1	1	0
28	4	8	1	1	0
29	5	10	1	1	0
30	6	9	1	1	0
31	5	9	1	1	0
32	6	11	1	1	0
33	7	10	1	1	0
34	6	10	1	1	0
35	7	12	1	1	0
36	8	11	1	1	0
37	7	11	1	1	0
38	8	9	1	1	0
39	5	12	1	1	0
40	8	12	1	1	0
41	9	14	1	1	0
42	10	13	1	1	0
43	9	13	1	1	0
44	10	15	1	1	0
45	11	14	1	1	0
46	10	14	1	1	0
47	11	16	1	1	0
48	12	15	1	1	0
49	11	15	1	1	0
50	12	13	1	1	0
51	9	16	1	1	0
52	12	16	1	1	0
53	17	2	1	1	0
54	1	18	1	1	0
55	1	17	1	1	0
56	18	3	1	1	0
57	2	19	1	1	0
58	2	18	1	1	0
59	19	4	1	1	0
60	3	20	1	1	0
61	3	19	1	1	0
62	20	1	1	1	0
63	4	17	1	1	0
64	4	20	1	1	0

0

L I N E A R S T A T I C A N A L Y S I S

NODAL LOADS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
4	25	0	0	0	0	0

0



```
*****
      M O V I N G   M A S S E S   A N A L Y S I S
*****

RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES
Omega i   Omega j   Damp. Ratio

0

TRAFFIC SEQUENCE
Elements

0

VEHICLE PROPERTIES
Load magnitude   No of loads   Axle dist   Speed   Acceleration

0

MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES
Iterations       Delta t       Inertial effect

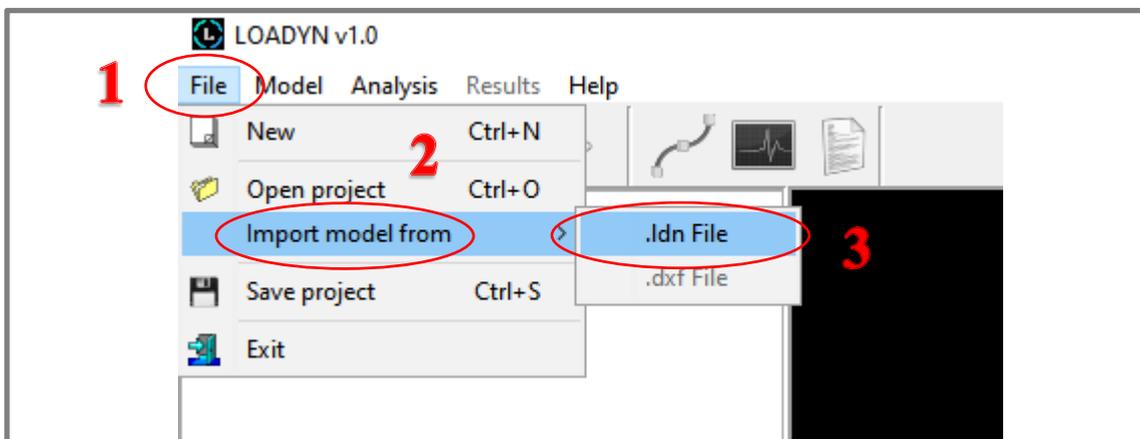
0

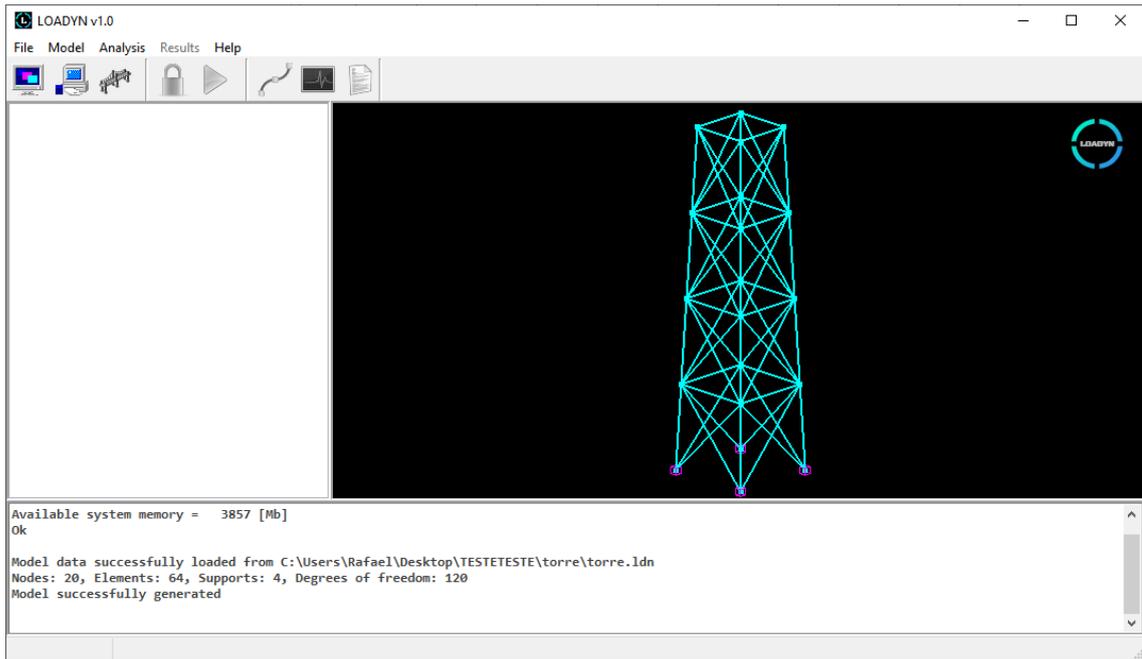
*****
      M O D A L   A N A L Y S I S
*****
DYNAMIC EIGENPROBLEM
Number of modes   Tolerance   Max iterations
                15           1E-12           20

0

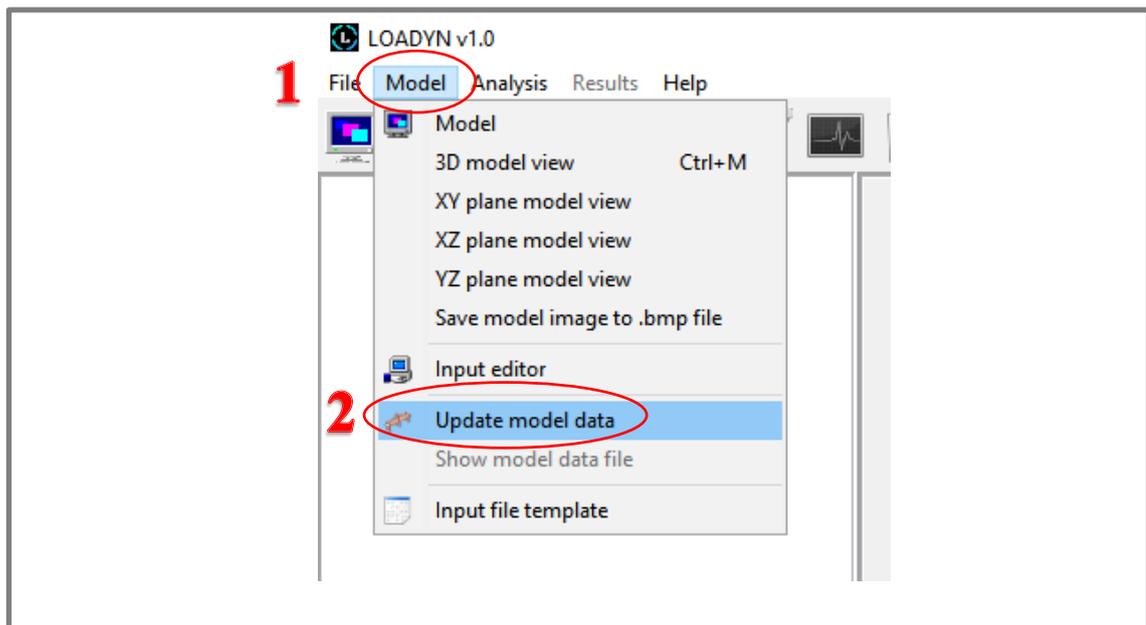
----- E N D   O F   F I L E -----
```

To import the input file follow [1]File > [2]Import model from > [3].ldn file, select .ldn file and open.





Once the model has been successfully generated, the user **must** update its information in order to perform any analysis. Open the input editor to check the data and to enable the [Update model data] option. Follow [1]Model > [2]Update model data.



The user should check for error messages.



3. RUNNING THE ANALYSIS

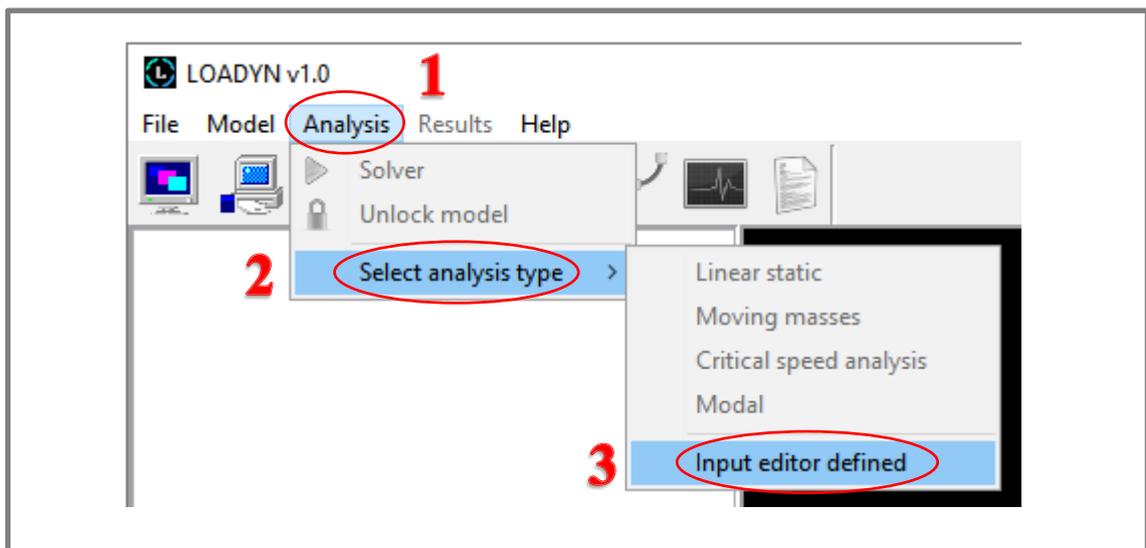
The user must select the analysis type to be executed. The only option available on LOADYN v1.0 is [Input editor defined], meaning that the analysis type must be defined within the **Input editor** environment as shown below.

```
LoaDyn v1.0
Input data file

MODEL NAME:   TOWER
ANALYSIS TYPE:
```

The user must update the model data after performing any change.

[1]Analysis > [2]Select analysis type > [3]Input editor defined.



3.1. LINEAR STATIC ANALYSIS

For linear static analysis: Type [LINEAR STATIC] in the analysis type field.

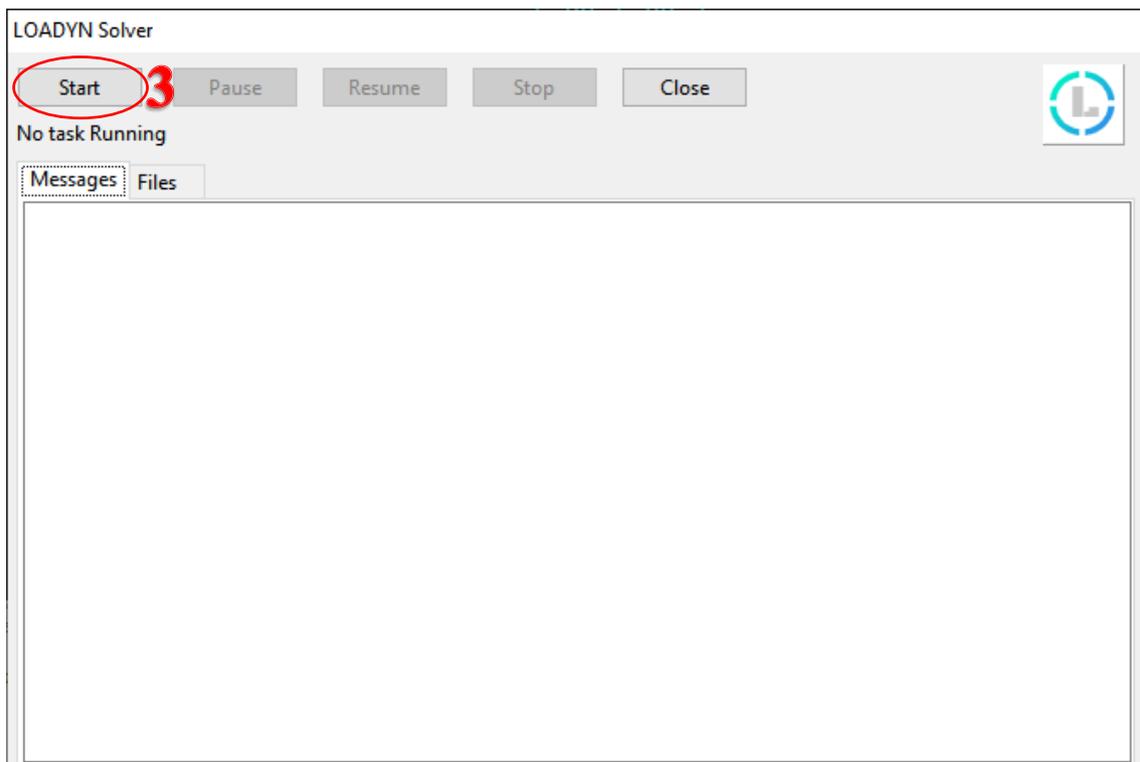
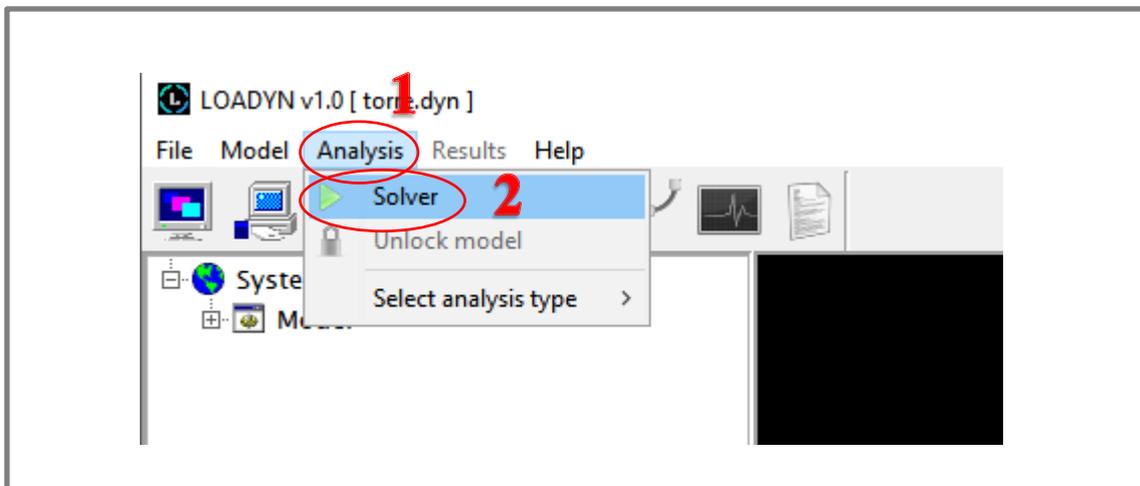
```
LoaDyn v1.0
Input data file

MODEL NAME:   TOWER
ANALYSIS TYPE: LINEAR STATIC
```

Define the linear static analysis parameters:

```
*****  
                L I N E A R   S T A T I C   A N A L Y S I S  
*****  
  
NODAL LOADS  
Node      Fx      Fy      Fz      Mx      My      Mz  
13        25      0       0       0       0       0  
0
```

Once the analysis data has been defined, the user may proceed to run the LOADYNSolver. [1]Analysis > [2]Solver > [3]Start.

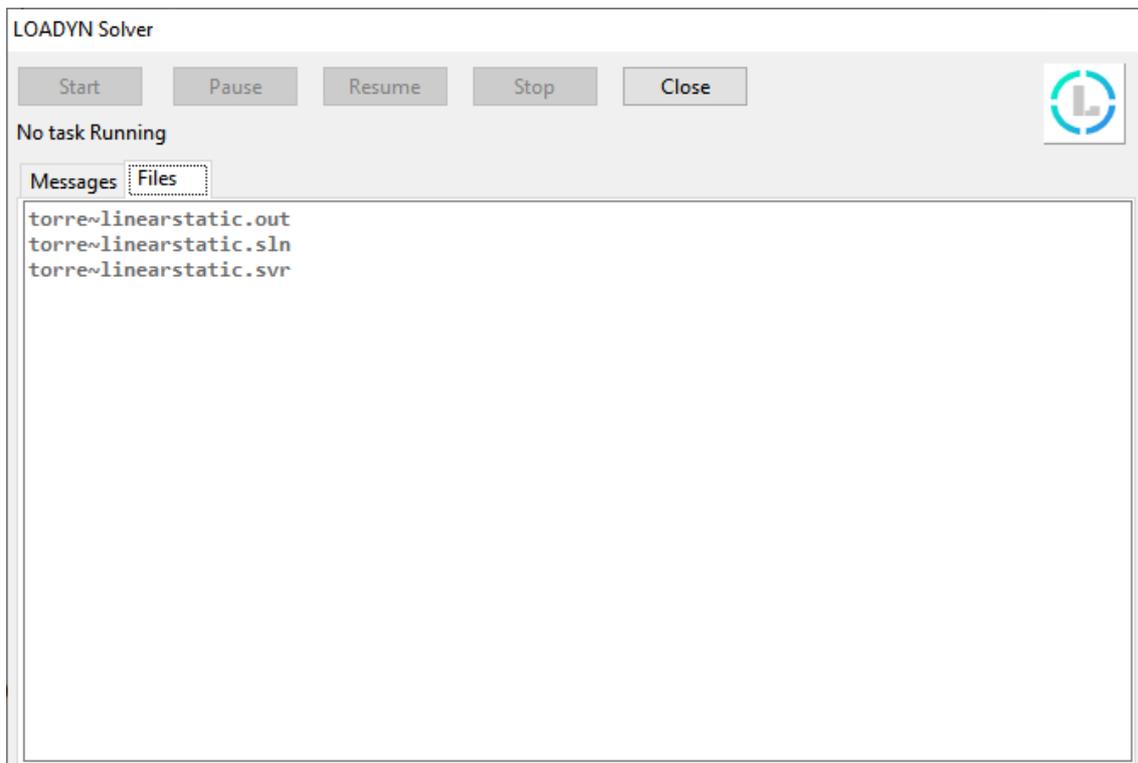




Scroll up to read the analysis reports and check for error messages once the analysis is complete.



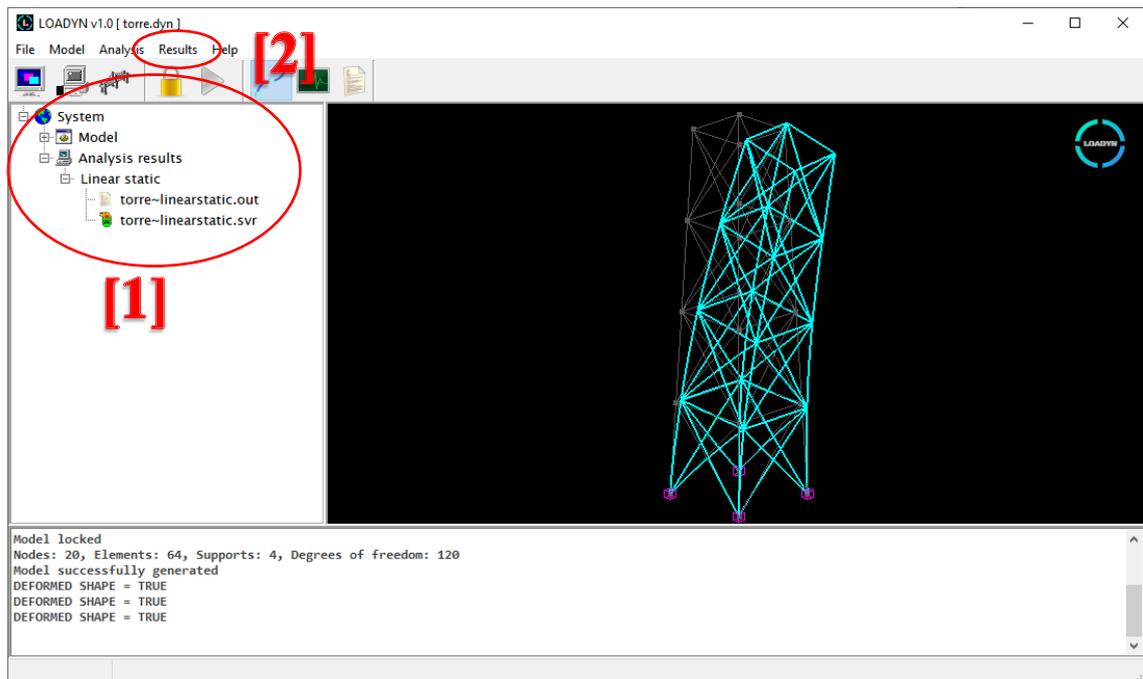
Click on the **files** tab to see the solution files list.



The solver window can now be closed.



The main window is now locked and shows the post-processed model.



[1] MAIN TREE:

~LINEARSTATIC.OUT = Analysis results file.

```
LINEAR STATIC
ANALYSIS DATA

NODAL DISPLACEMENTS
```

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0042653	-0.0027213	0.0001668	-0.0001095	0.0004470	-0.0022104
2	0.0042654	0.0027213	-0.0001667	0.0001101	0.0004470	-0.0022108
3	0.0035344	0.0027125	0.0009353	0.0000460	0.0001301	-0.0020527
4	0.0035344	-0.0027126	-0.0009353	-0.0000464	0.0001301	-0.0020523
5	0.0143067	-0.0046481	-0.0004200	-0.0000698	0.0007758	-0.0039707
6	0.0143052	0.0046480	0.0004195	0.0000711	0.0007720	-0.0039703
7	0.0127527	0.0045775	0.0010857	0.0000642	0.0005051	-0.0037943
8	0.0127525	-0.0045774	-0.0010847	-0.0000648	0.0005022	-0.0037923
9	0.0289900	-0.0055563	-0.0008156	-0.0000243	0.0010929	-0.0052286
10	0.0290230	0.0055634	0.0008221	0.0000427	0.0010741	-0.0051969
11	0.0263563	0.0053407	0.0011467	0.0000628	0.0009434	-0.0049674
12	0.0263539	-0.0053446	-0.0011523	-0.0000441	0.0009573	-0.0049885
13	0.0470707	-0.0054334	-0.0008461	0.0000567	0.0014539	-0.0056897
14	0.0464106	0.0053347	0.0009277	-0.0000296	0.0013358	-0.0055470
15	0.0421925	0.0051327	0.0009950	0.0000023	0.0012553	-0.0053097
16	0.0422129	-0.0051307	-0.0009277	0.0000227	0.0013519	-0.0053765
17	0.0000000	-0.0000000	0.0000000	-0.0000000	0.0000000	-0.0000000
18	0.0000000	0.0000000	-0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000
19	0.0000000	0.0000000	0.0000000	-0.0000000	-0.0000000	-0.0000000
20	0.0000000	-0.0000000	-0.0000000	0.0000000	-0.0000000	-0.0000000



SUPPORT REACTIONS							
Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz	
17	-7.838	47.007	-9.134	1.713	-3.629	4.947	
18	-7.837	-47.007	9.134	-1.713	-3.631	4.948	
19	-4.662	-47.144	-12.539	0.564	1.000	3.827	
20	-4.663	47.144	12.539	-0.563	0.999	3.826	

ELEMENT FORCES							
Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	0.002	0.418	-1.026	0.699	1.411	0.575
	2	-0.002	-0.418	1.026	-0.699	1.411	0.575
2	2	13.574	0.147	-0.041	0.503	0.188	0.228
	3	-13.574	-0.147	0.041	-0.503	-0.075	0.175
3	3	-0.000	-0.144	0.994	0.294	-1.366	-0.198
	4	0.000	0.144	-0.994	-0.294	-1.366	-0.198
4	4	-13.576	0.147	-0.041	0.503	-0.075	0.175
	1	13.576	-0.147	0.041	-0.503	0.188	0.228
5	5	-0.020	0.551	-0.957	0.493	1.199	0.689
	6	0.020	-0.551	0.957	-0.493	1.195	0.689
6	6	9.027	0.209	-0.038	0.616	0.169	0.265
	7	-9.027	-0.209	0.038	-0.616	-0.074	0.259
7	7	0.003	-0.287	0.797	0.452	-0.994	-0.360
	8	-0.003	0.287	-0.797	-0.452	-0.997	-0.358
8	8	-9.007	0.209	-0.038	0.624	-0.077	0.259
	5	9.007	-0.209	0.038	-0.624	0.172	0.263
9	9	0.496	0.730	-0.960	0.260	1.089	0.838
	10	-0.496	-0.730	0.960	-0.260	1.070	0.805
10	10	4.887	0.409	0.476	0.892	-0.469	0.450
	11	-4.887	-0.409	-0.476	-0.892	-0.602	0.471
11	11	0.037	-0.618	0.193	0.416	-0.224	-0.684
	12	-0.037	0.618	-0.193	-0.416	-0.210	-0.706
12	12	-5.069	0.346	0.395	0.934	-0.513	0.399
	9	5.069	-0.346	-0.395	-0.934	-0.376	0.379
13	13	-11.180	0.800	-1.734	-0.377	1.802	0.881
	14	11.180	-0.800	1.734	0.377	1.667	0.719
14	14	1.139	0.298	2.778	1.038	-2.732	0.280
	15	-1.139	-0.298	-2.778	-1.038	-2.824	0.317
15	15	-0.346	-0.722	-1.169	-0.089	1.114	-0.684
	16	0.346	0.722	1.169	0.089	1.224	-0.760
16	16	-1.382	0.381	3.503	1.370	-3.561	0.401
	13	1.382	-0.381	-3.503	-1.370	-3.445	0.362
17	1	9.111	-0.022	-0.286	-0.396	0.488	-0.547
	6	-9.111	0.022	0.286	0.396	0.652	0.461
18	2	-9.118	0.022	-0.286	-0.404	0.489	0.547
	5	9.118	-0.022	0.286	0.404	0.653	-0.461
19	1	26.112	-0.092	-0.441	-1.164	1.116	-0.621
	5	-26.112	0.092	0.441	1.164	0.211	0.343
20	2	-7.117	-0.448	-0.168	-2.379	0.662	-0.860
	7	7.117	0.448	0.168	2.379	0.006	-0.929

...



~LINEARSTATIC.SVR = Solver transcript file.

```
L O A D Y N   S O L V E R

LOADYN v1.0
C:\Users\Rafael\Desktop\TESTETESTE\torre\torre.dyn
Starting task                                     15-05-21 - 01:56:48
Total system memory..... = [Mb] 8091
Available system memory..... = [Mb] 3805
Model name..... = TORRE
Analysis type..... = LINEAR STATIC
Number of nodes..... = 20
Number of supports..... = 4
Number of materials..... = 1
Number of sections..... = 1
Number of elements..... = 64
Reading nodal loads ...
End of input phase                               01:56:48

S O L U T I O N   P R O C E S S

Memory allocated for SKS pointer array..... = [Kb] 0.5
Assembling SKS pointer array ...
Memory allocated for SKS linear stiffness matrix = [Kb] 41.8
Global SKS linear stiffness matrix assembly
Merging 64 elements ...
Applying boundary conditions ...
Memory allocated for nodal loads vector..... = [Kb] 0.9
Assembling nodal loads vector ...
Cholesky sparse solver
Non zero terms of the linear equations system... = 5352
Triangularization ...
Substitution ...
Retro-substitution ...
Solution size = 0.9 [Kb]
End of solution process                           01:56:48

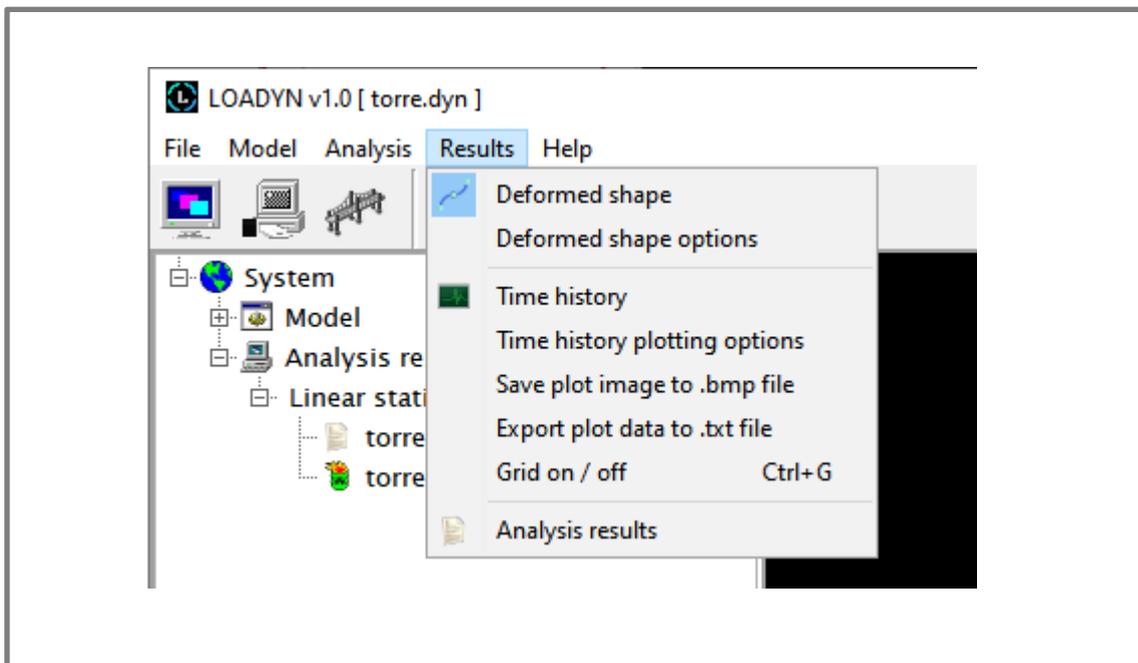
R E S U L T S

Generating output file ...
Calculating support reactions ...
Calculating element forces ...
Results file created
Generating solution binary files ...
Solution binary file created
Allocated memory successfully released

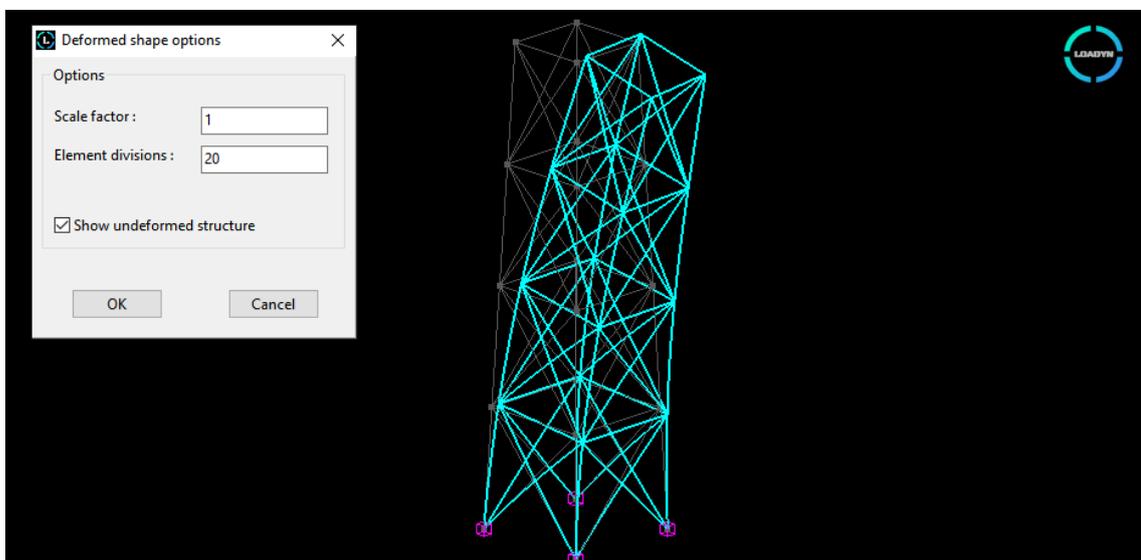
. . .
```

[2] RESULTS TAB

Show results options.



To change the structural deformed shape options follow: [1]Results > [2]Deformed shape options.



Change the scale factor and/or the number of divisions per element and press **OK**.

If another analysis needs to be executed, the current model must be unlocked by clicking on the following shortcut icon  or by accessing the **analysis** menu tab.



3.2. MODAL ANALYSIS

For modal analysis: Type [MODAL] in the analysis type field.

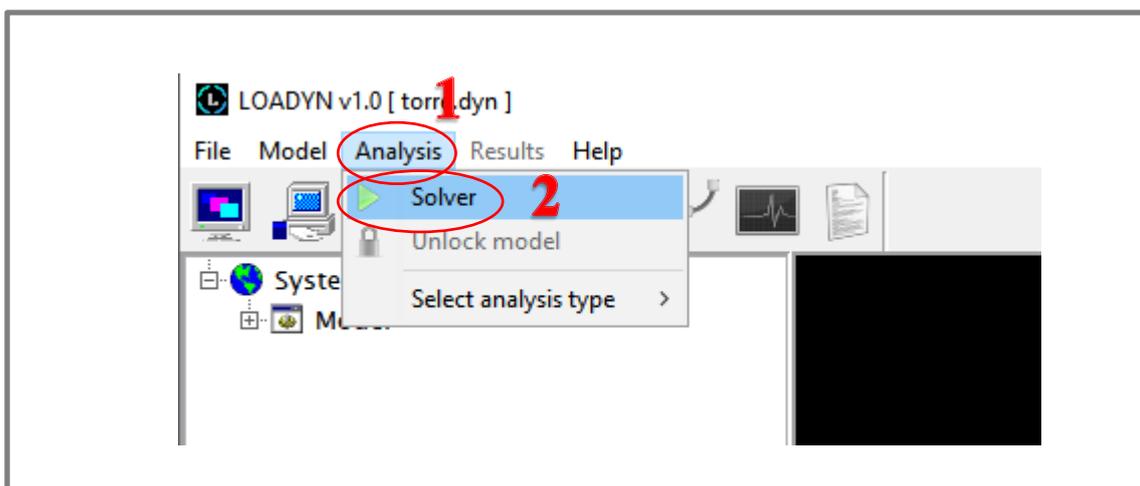
```
LoaDyn v1.0
Input data file

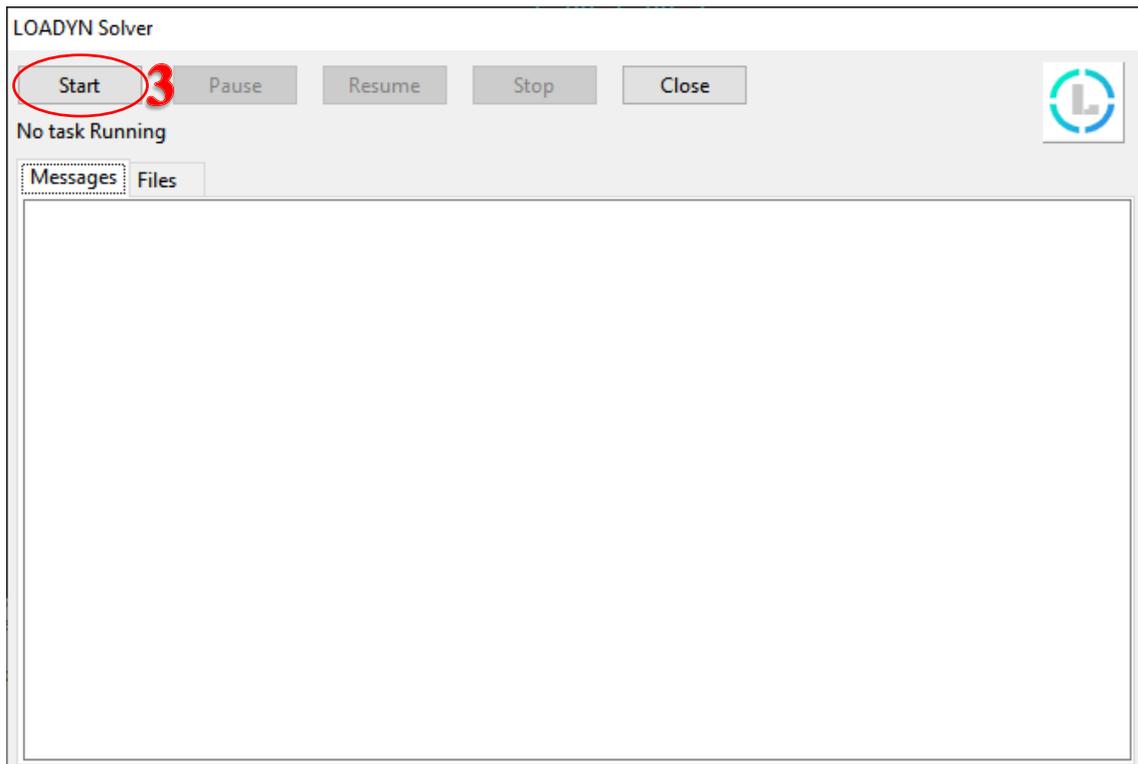
MODEL NAME:   TORRE
ANALYSIS TYPE: MODAL
```

Define the modal analysis parameters:

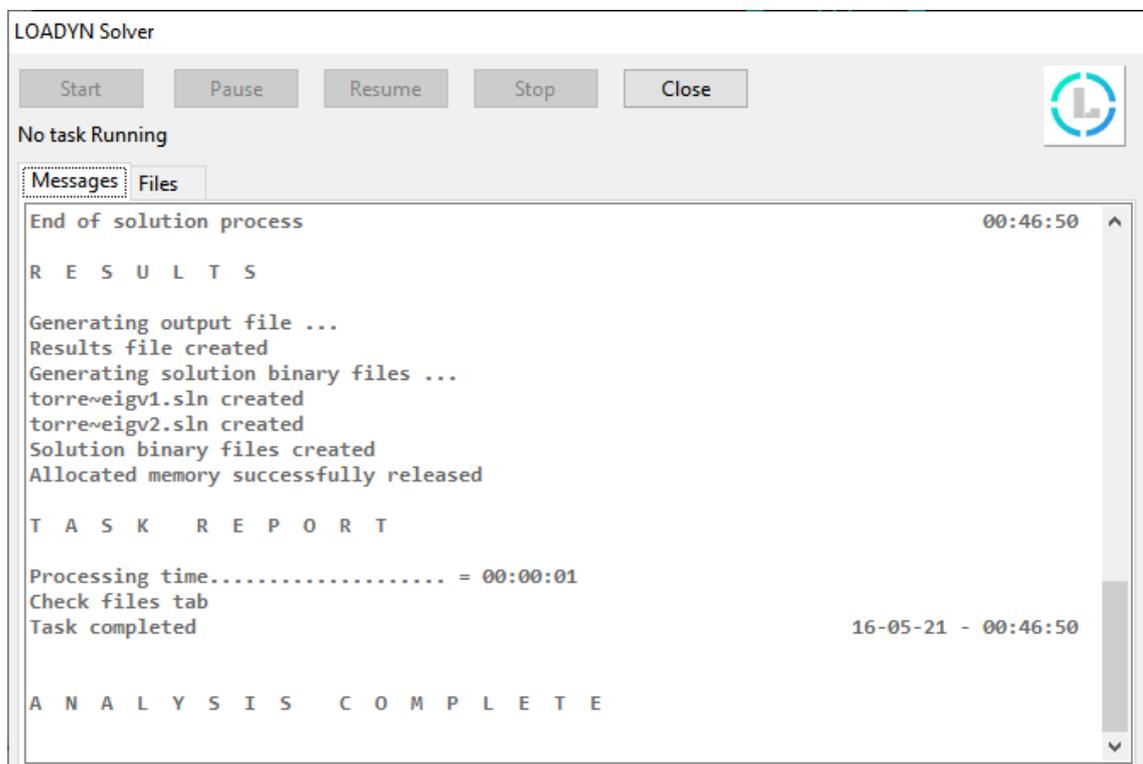
```
*****
                      M O D A L   A N A L Y S I S
*****
DYNAMIC EIGENPROBLEM
Number of modes   Tolerance   Max iterations
                15          1E-12           20
0
```

Once the analysis data has been defined, the user may proceed to run the LOADYNSolver. [1]Analysis > [2]Solver > [3]Start.



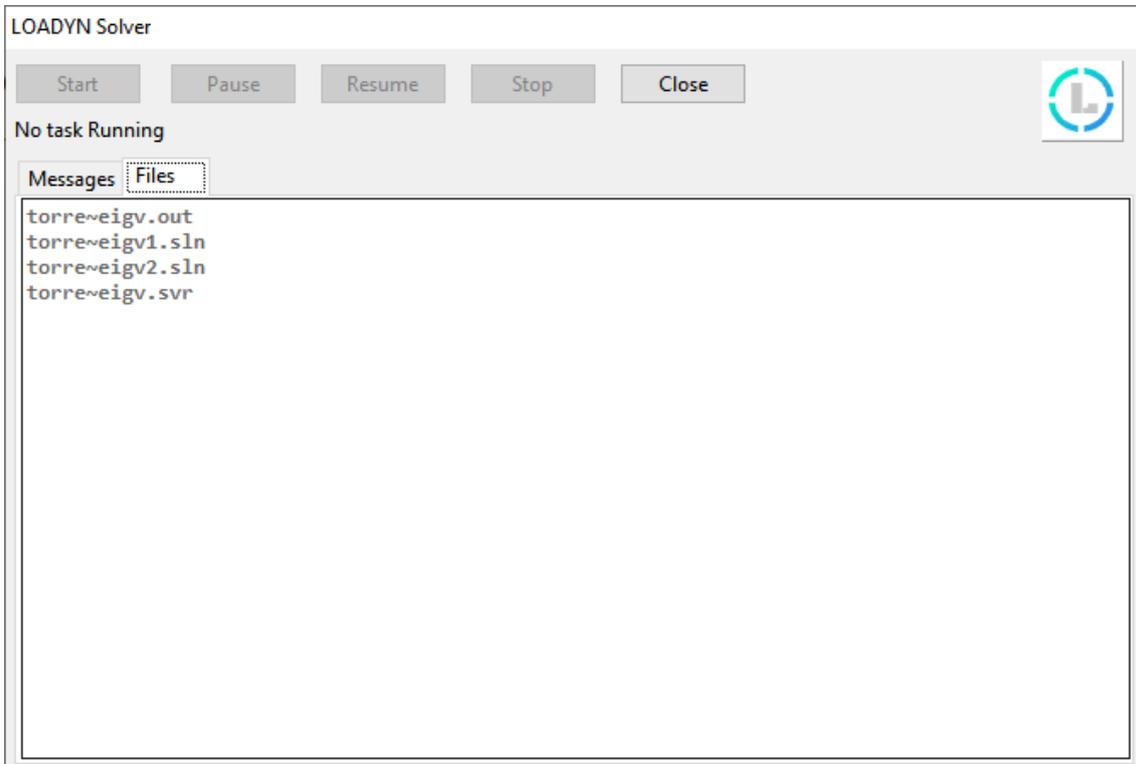


Scroll up to read the analysis reports and check for error messages once the analysis is complete.



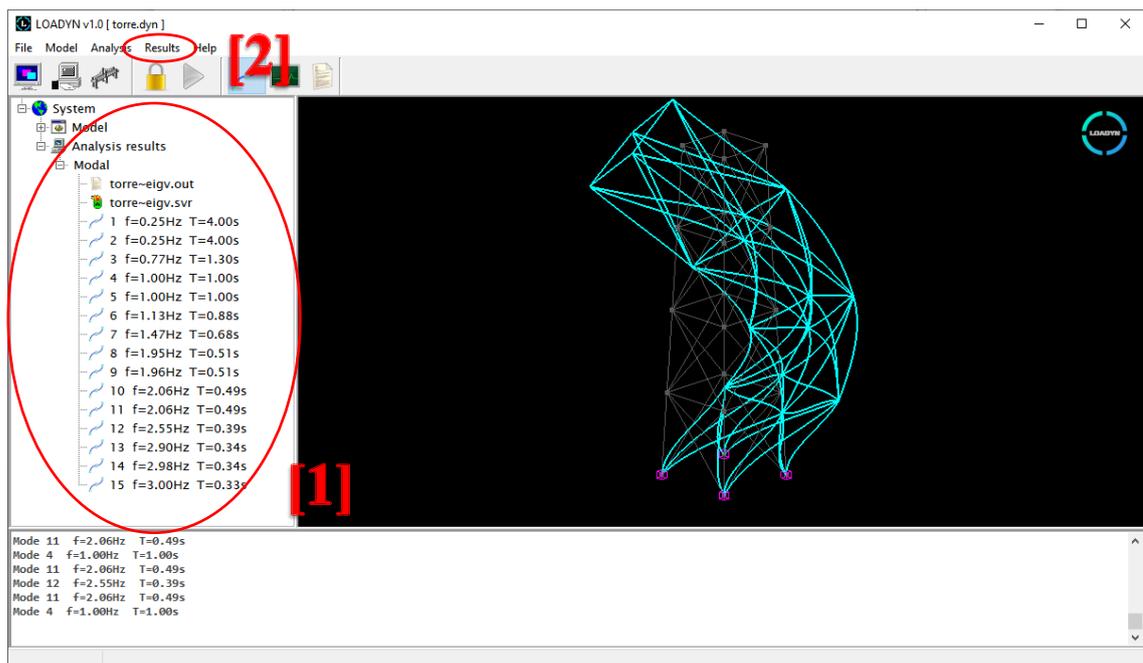


Click on the **files** tab to see the solution files list.



The solver window can now be closed.

The main window is now locked and shows the post-processed model.





[1] MAIN TREE:
~EIGV.OUT = Analysis results file.

```

      M O D A L   A N A L Y S I S
      E I G E N P R O B L E M   D A T A

-----
Number of modes:                                     15
-----
Convergence tolerance:                             1.00E-012
-----
Max iterations:                                    20
-----

NATURAL FREQUENCIES AND PERIODS

      MODE      EIGENVALUES      OMEGA      FREQUENCY      PERIOD
      -----      (rad2/sec2)      (rad/sec)      (hertz)      (sec)
-----
      1          2.471          1.572          0.250          3.9967
      2          2.471          1.572          0.250          3.9967
      3         23.468          4.844          0.771          1.2970
      4         39.183          6.260          0.996          1.0038
      5         39.183          6.260          0.996          1.0038
      6         50.448          7.103          1.130          0.8846
      7         85.512          9.247          1.472          0.6795
      8        149.562         12.230          1.946          0.5138
      9        151.268         12.299          1.957          0.5109
     10        167.182         12.930          2.058          0.4859
     11        167.182         12.930          2.058          0.4859
     12        255.800         15.994          2.545          0.3929
     13        333.145         18.252          2.905          0.3442
     14        350.620         18.725          2.980          0.3356
     15        354.648         18.832          2.997          0.3336

CONVERGENCE ACHIEVED ON STEP : 10

RIGID BODY MODES FOUND : 0

```



~LINEARSTATIC.SVR = Solver transcript file.

```
L O A D Y N      S O L V E R

LOADYN v1.0
C:\Users\Rafael\Desktop\TESTETESTE\torre\torre.dyn
Starting task                                     16-05-21 - 00:46:48
Total system memory..... = [Mb] 8091
Available system memory..... = [Mb] 5218
Model name..... = TORRE
Analysis type..... = MODAL
Number of nodes..... = 20
Number of supports..... = 4
Number of materials..... = 1
Number of sections..... = 1
Number of elements..... = 64
End of input phase                               00:46:48

S O L U T I O N  P R O C E S S

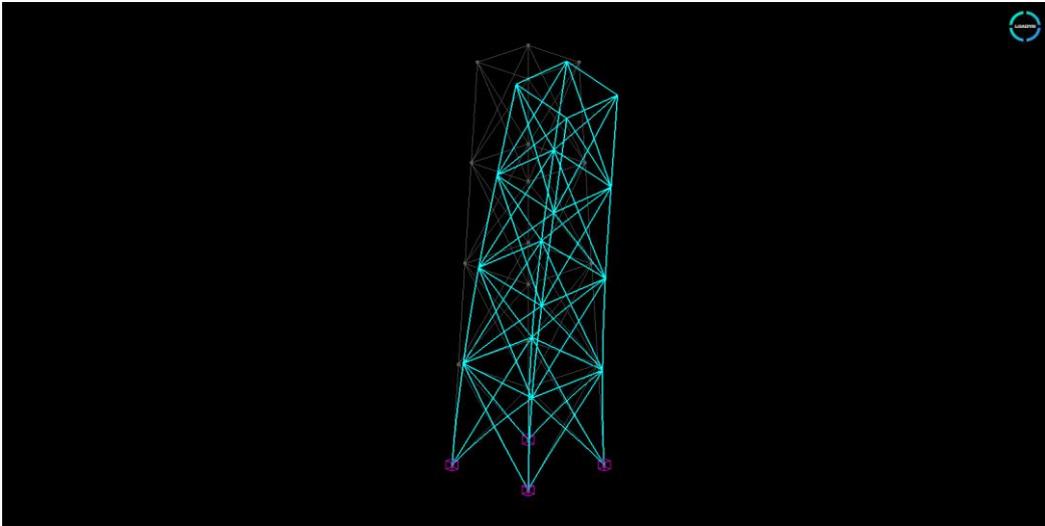
Memory allocated for SKS pointer array..... = [Kb] 0.5
Assembling SKS pointer array ...
Memory allocated for SKS linear stiffness matrix = [Kb] 41.8
Global SKS linear stiffness matrix assembly
Merging 64 elements ...
Memory allocated for SKS linear mass matrix.... = [Kb] 41.8
Global SKS linear mass matrix assembly ...
Applying boundary conditions ...
Generalized eigenproblem
Checking for null diagonal terms ...
Allocating memory ...
Assembling matrices ...
Max number of iterations: 20
Convergence tolerance: 1E-12
Solving the generalized eigenproblem ...
Iteration = 1
Iteration = 2
Iteration = 3
Iteration = 4
Iteration = 5
Iteration = 6
Iteration = 7
Iteration = 8
Iteration = 9
Iteration = 10
solution converged in 10 iterations
0 Rigid body modes found

. . .
```

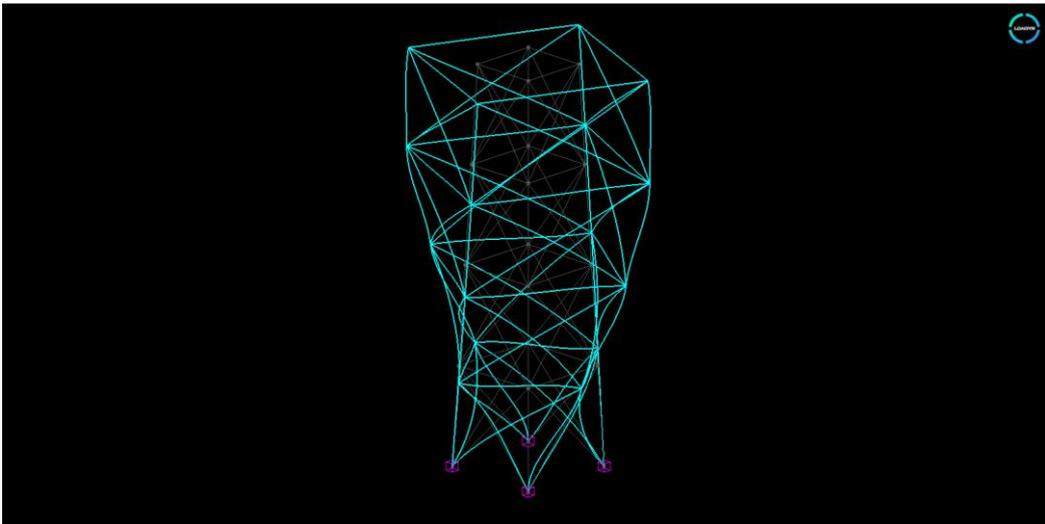


By clicking on the modes shown in the main tree, the user will be able to visualize its shape.

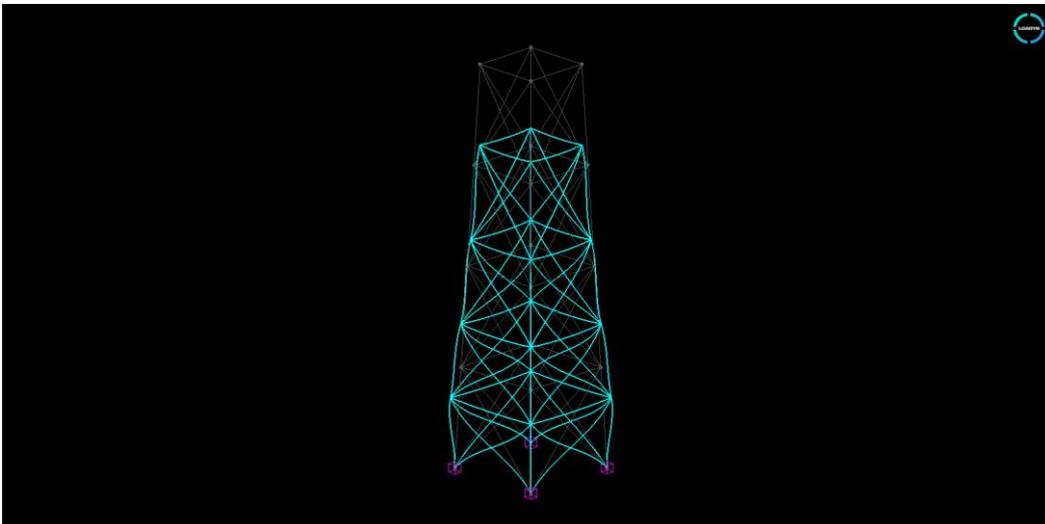
FIRST MODE:



THIRD MODE:

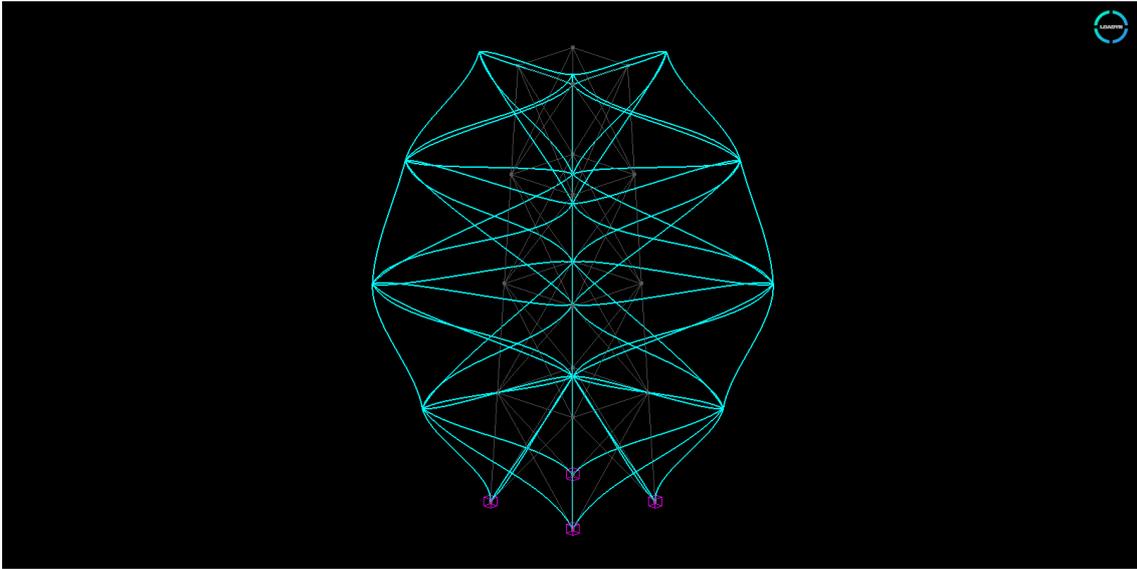


SIXTH MODE:

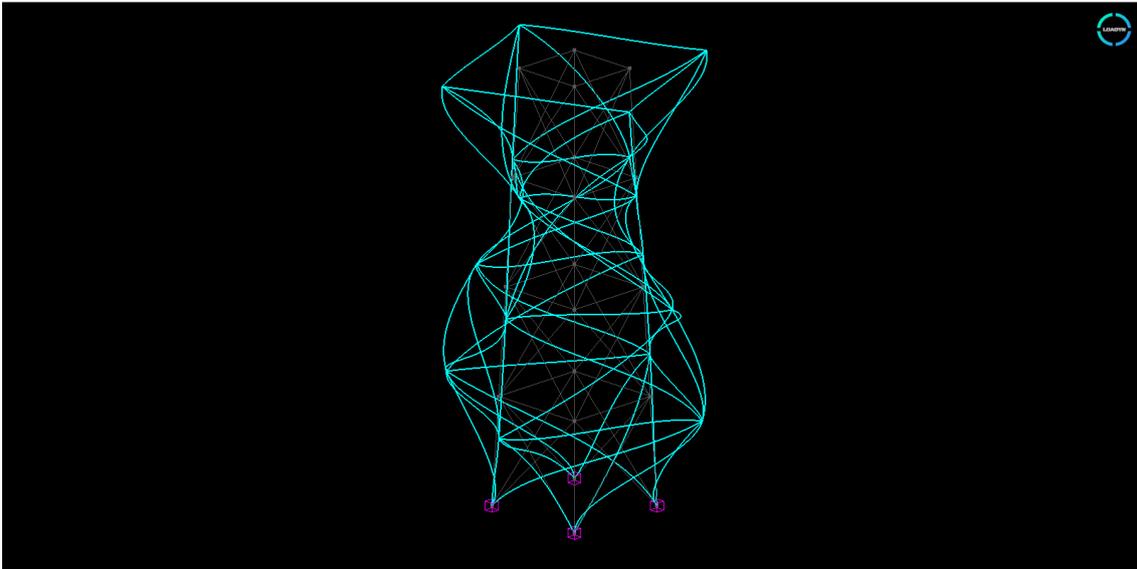




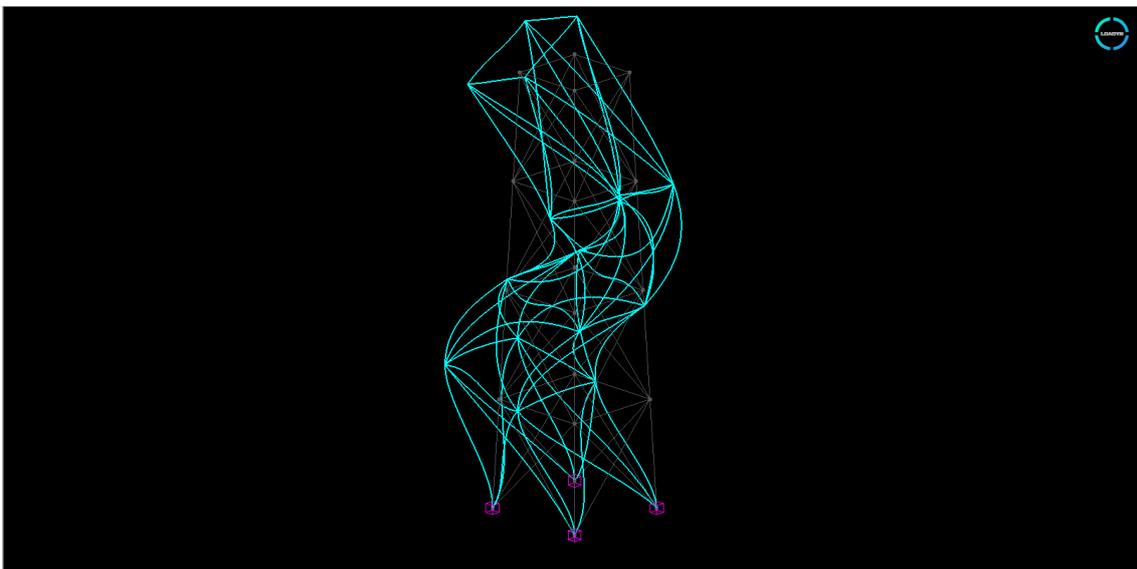
SEVENTH MODE :



EIGHTH MODE :

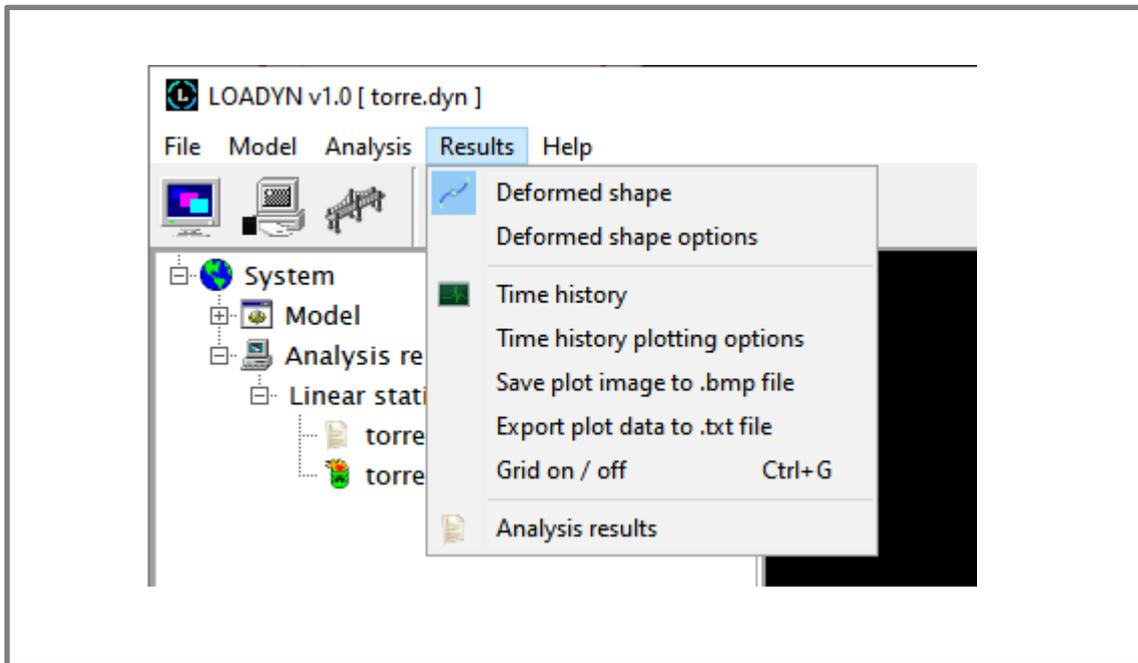


TENTH MODE :

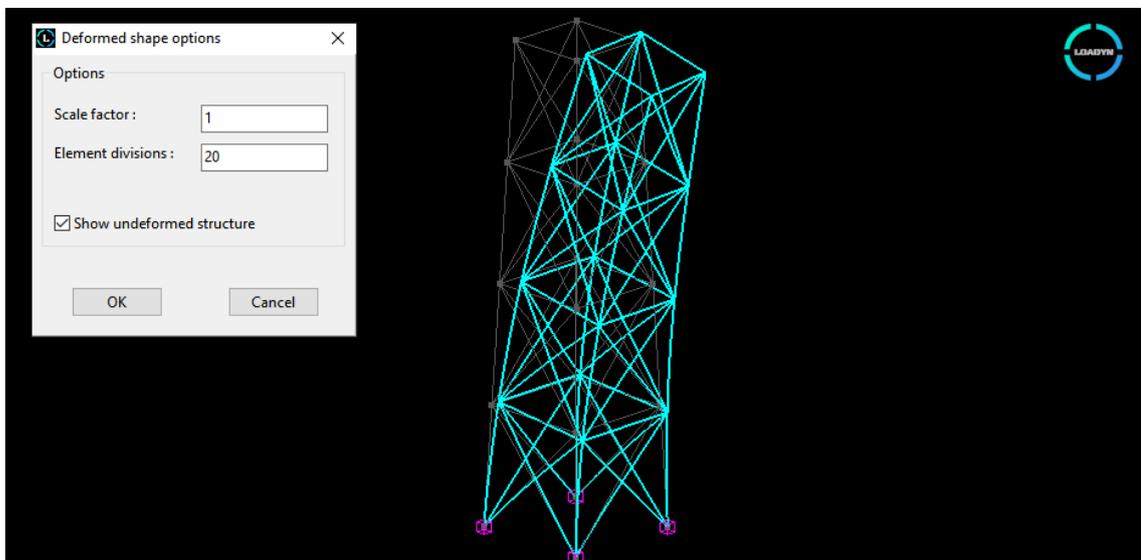


[2] RESULTS TAB

Show results options.



To change the structural deformed shape options follow: [1]Results > [2]Deformed shape options.



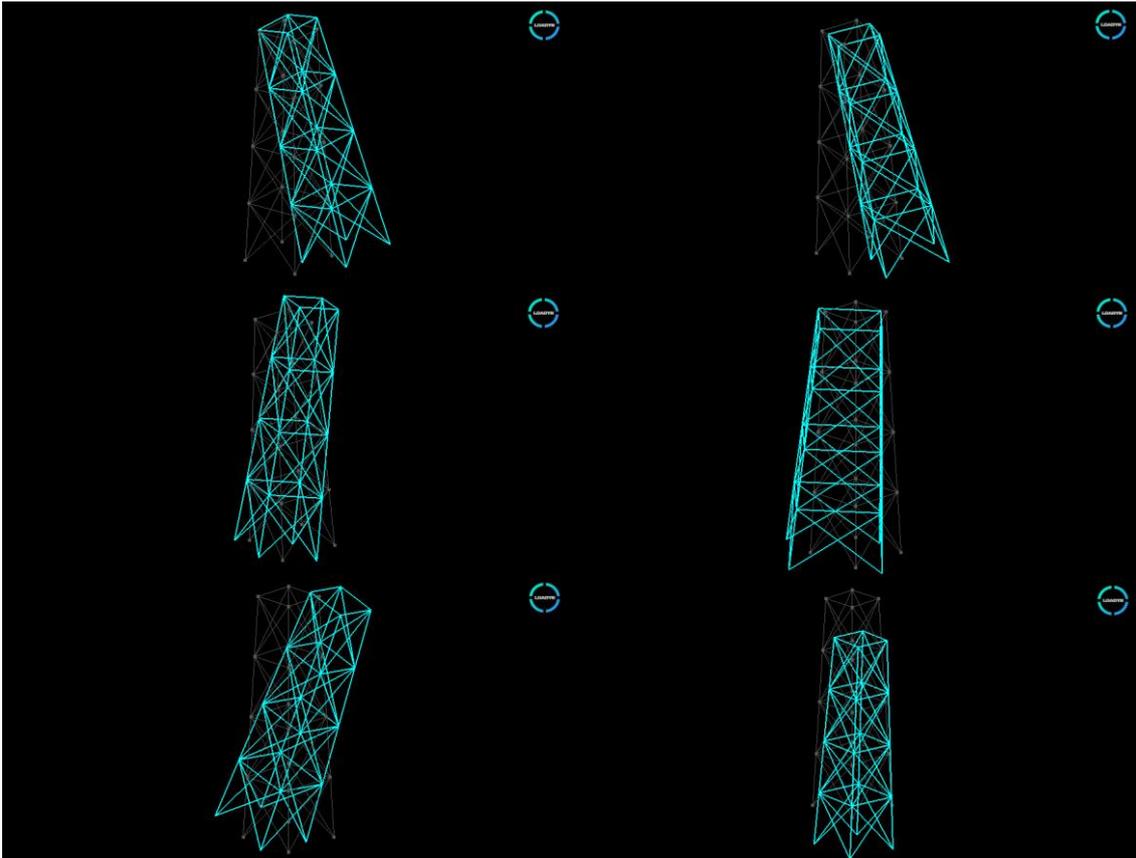
Change the scale factor and/or the number of divisions per element and press **OK**.

If another analysis needs to be executed, the current model must be unlocked by clicking on the following shortcut icon  or by accessing the **analysis** menu tab.

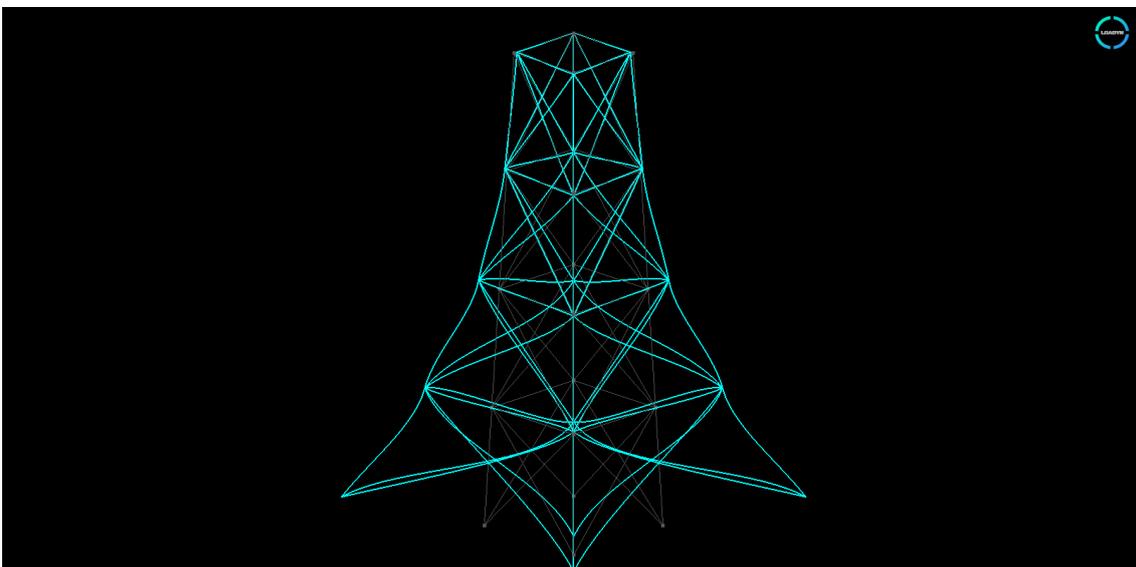
UNCONSTRAINED STRUCTURES

The LOADYN's generalized eigenproblem solver is capable of dealing with unconstrained models. In case no support conditions are defined, six rigid body motions will be found before the elastic ones.

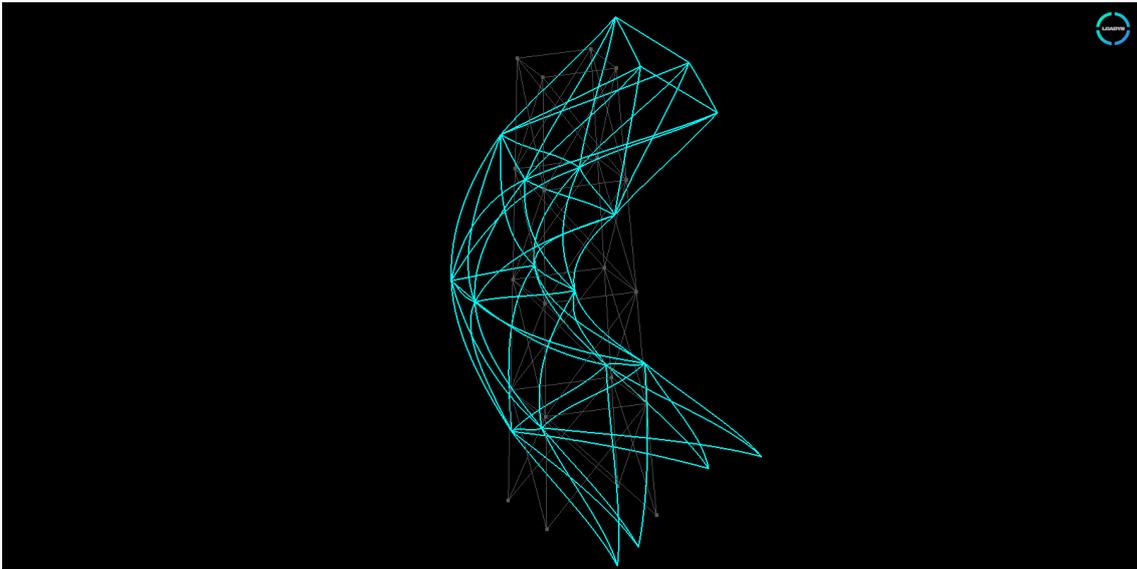
RIGID BODY MODES:



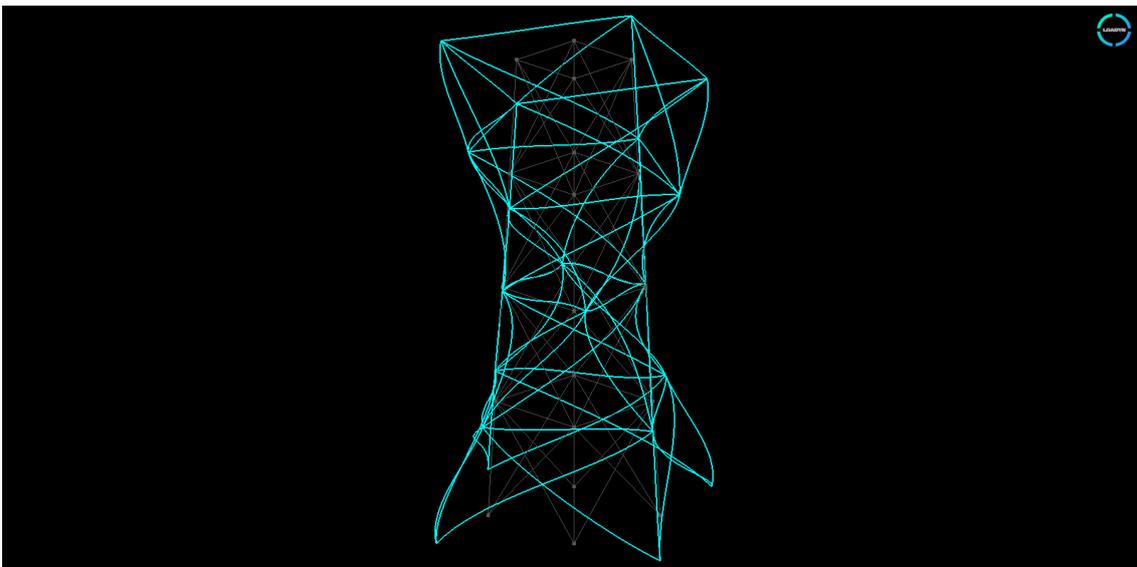
FIRST ELASTIC MODE:



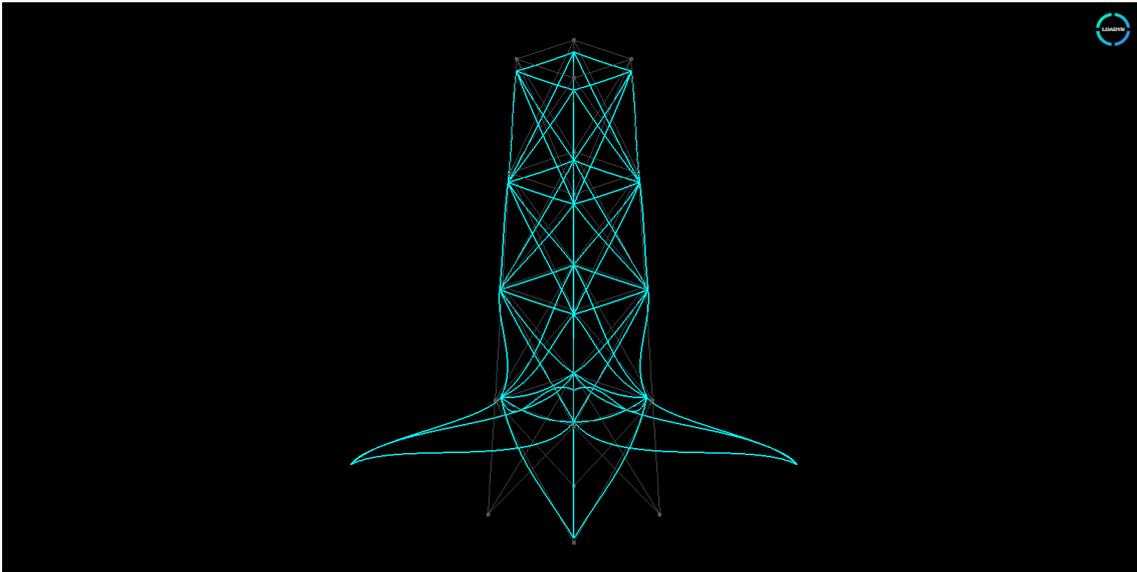
SECOND ELASTIC MODE :



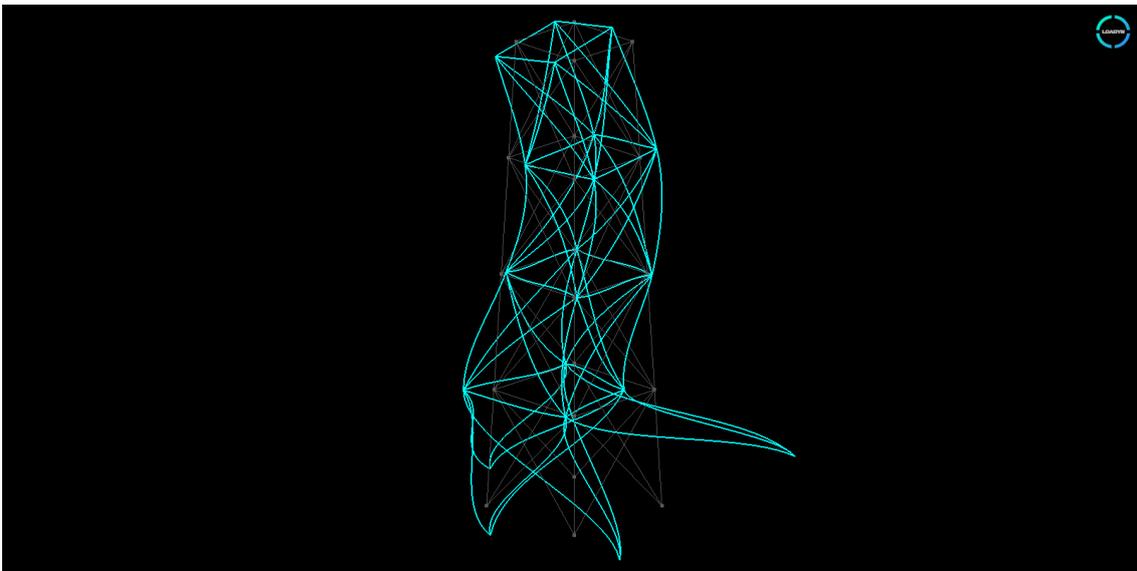
FOURTH ELASTIC MODE :



SIXTH ELASTIC MODE :



EIGHTH ELASTIC MODE :





ANALYSIS RESULTS:

```

                                M O D A L   A N A L Y S I S
                                E I G E N P R O B L E M   D A T A
-----
Number of modes:                                     15
-----
Convergence tolerance:                             1.00E-012
-----
Max iterations:                                     20
-----

NATURAL FREQUENCIES AND PERIODS

      MODE      EIGENVALUES      OMEGA      FREQUENCY      PERIOD
      (rad2/sec2)      (rad/sec)      (hertz)      (sec)
-----
      1          0.000          0.000          0.000          +Inf
      2          0.000          0.000          0.000          +Inf
      3          0.000          0.000          0.000          +Inf
      4          0.000          0.000          0.000          +Inf
      5          0.000          0.000          0.000          +Inf
      6          0.000          0.000          0.000          +Inf
      7          35.847          5.987          0.953          1.0494
      8          52.776          7.265          1.156          0.8649
      9          52.776          7.265          1.156          0.8649
     10          70.130          8.374          1.333          0.7503
     11          81.852          9.047          1.440          0.6945
     12         142.261         11.927         1.898          0.5268
     13         153.607         12.394         1.973          0.5070
     14         161.807         12.720         2.025          0.4939
     15         161.807         12.720         2.025          0.4939

CONVERGENCE ACHIEVED ON STEP : 14

RIGID BODY MODES FOUND : 6

```

3.3. MOVING MASSES/LOADS DYNAMIC ANALYSIS

For moving masses/loads dynamic analysis: Type [MOVING MASSES] in the analysis type field.

```

LoaDyn v1.0
Input data file

MODEL NAME:   VIGA_20_ELEMENTOS
ANALYSIS TYPE: MOVING MASSES

```



Define the moving masses analysis parameters:

```
*****
MOVING MASSES ANALYSIS
*****

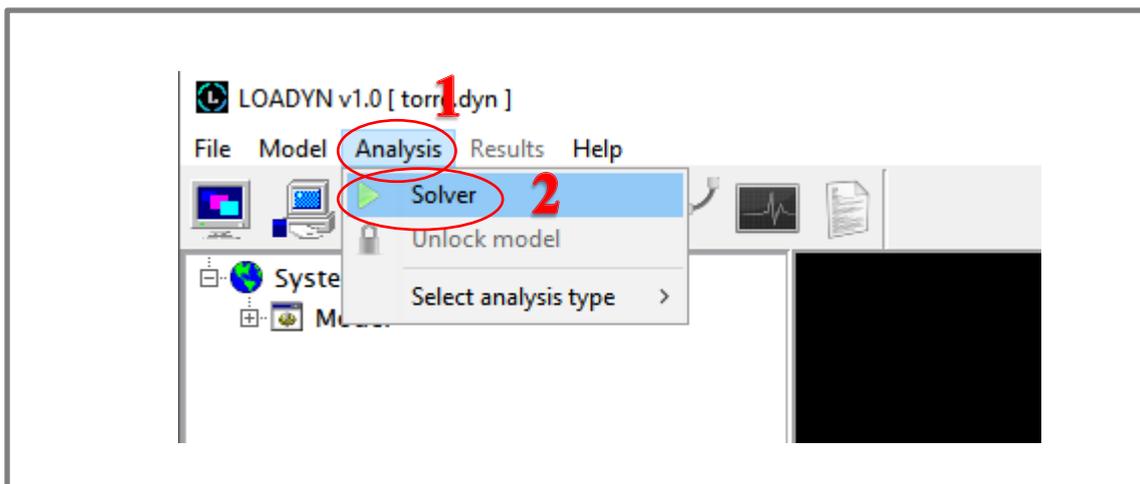
RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES
Omega i   Omega j   Damp. ratio
    32      72      0.05
0

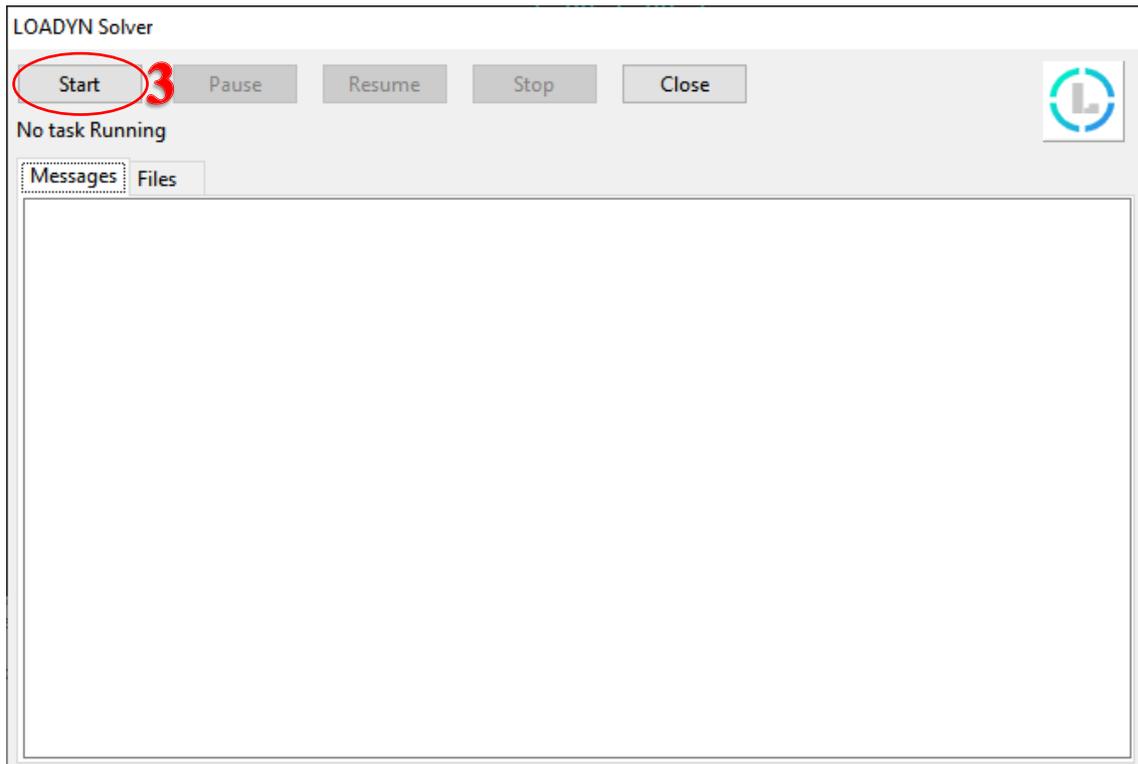
TRAFFIC SEQUENCE
Elements
      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Entry node
      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0

VEHICLE PROPERTIES
Load magnitude   No of loads   Axle dist   Speed   Acceleration
      -100             1           0       10       0
0

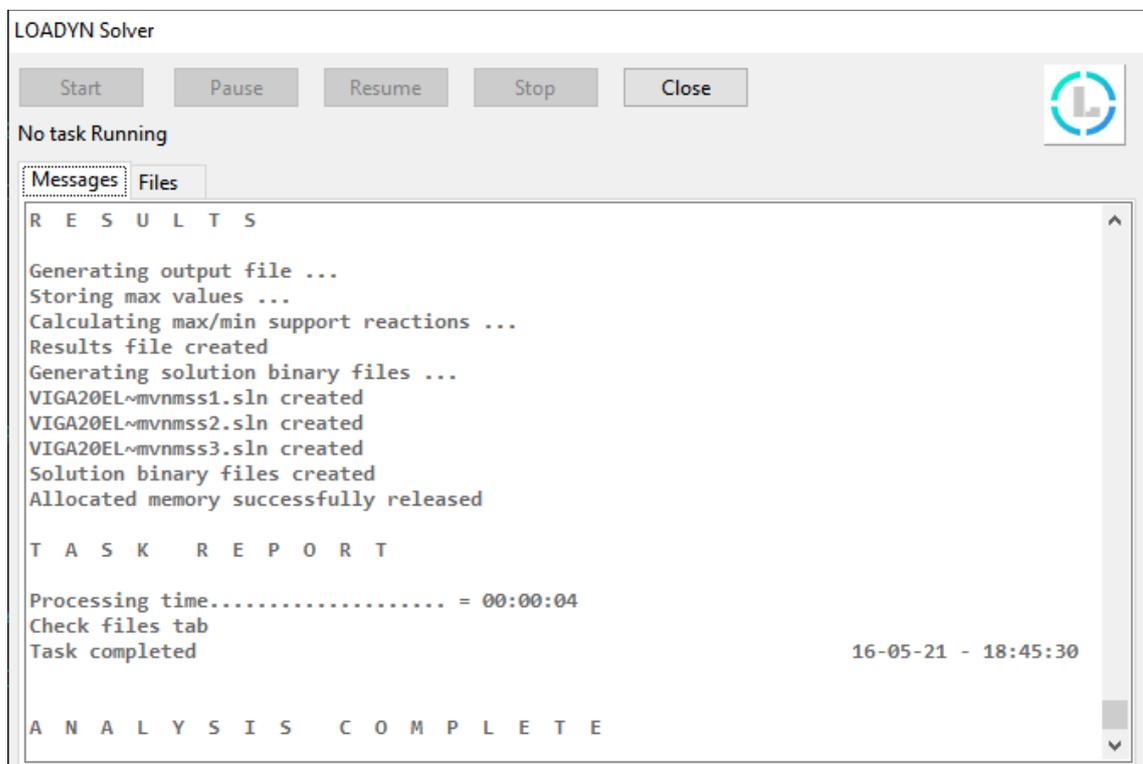
MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES
Iterations      Delta t      Inertial effect
      400      0.005           0
0
```

Once the analysis data has been defined, the user may proceed to run the LOADYNSolver. [1]Analysis > [2]Solver > [3]Start.



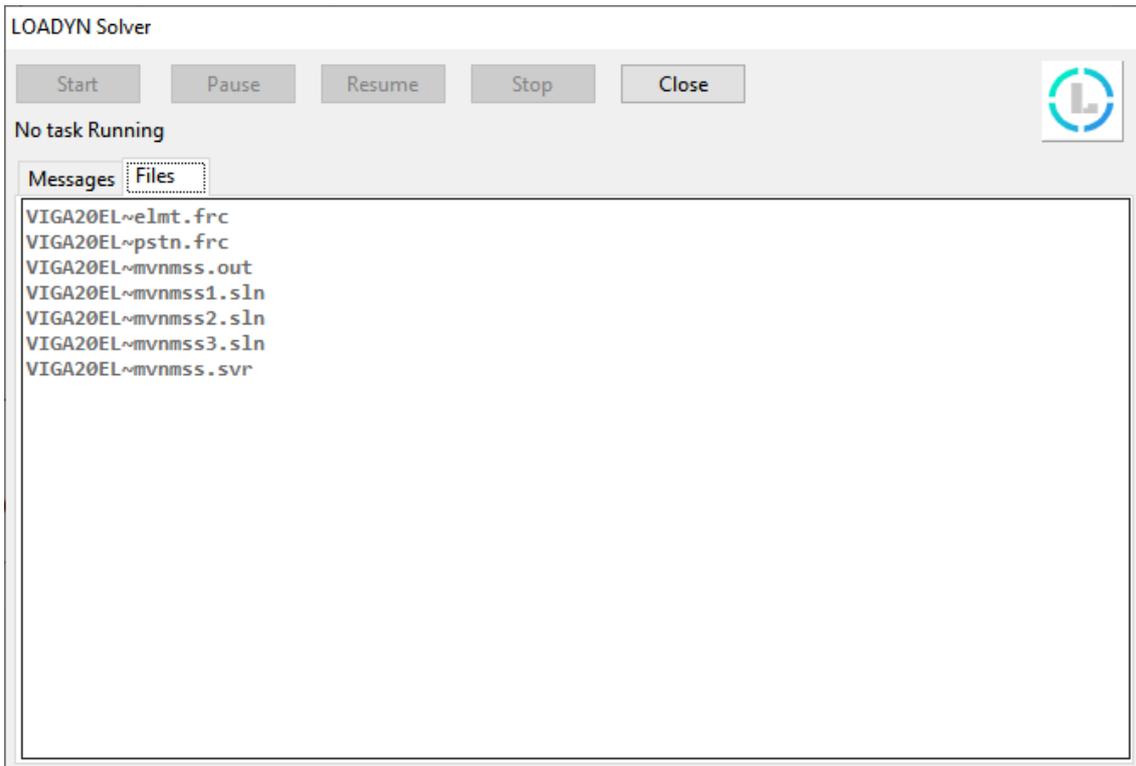


Scroll up to read the analysis reports and check for error messages once the analysis is complete.



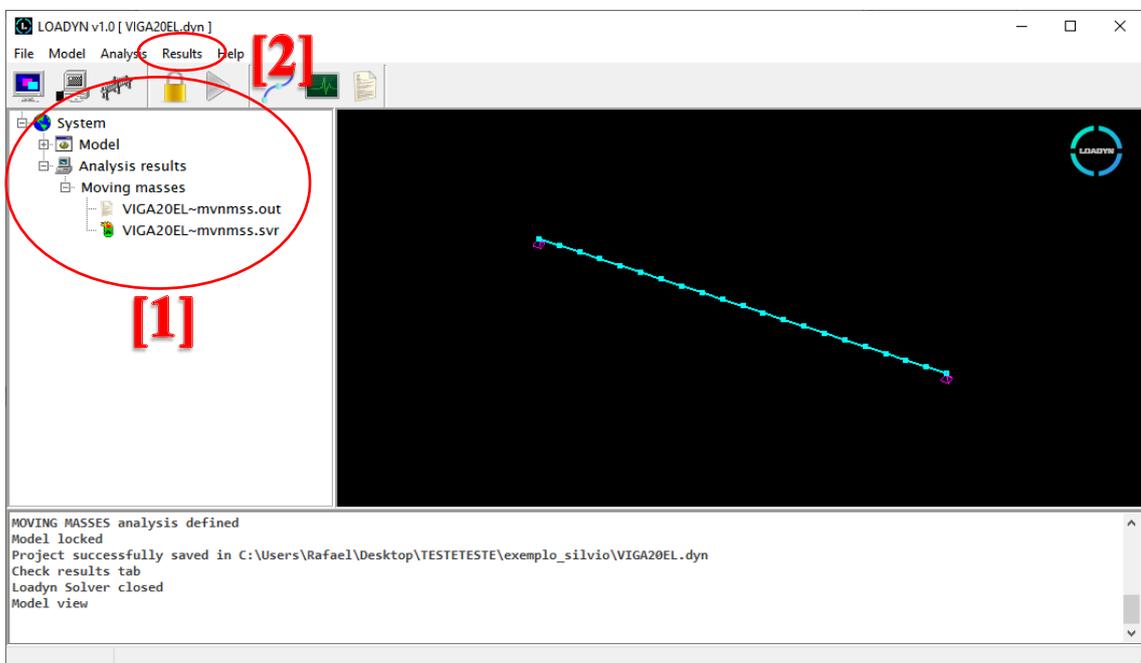


Click on the **files** tab to see the solution files list.



The solver window can now be closed.

The main window is now locked and shows the post-processed model.





[1] MAIN TREE:
~MVNMSS.OUT = Analysis results file.

```

      M O V I N G   M A S S E S
    D Y N A M I C   A N A L Y S I S   D A T A

-----
Iterations:                                     400
-----
Delta t:                                       5.000000000000001E-003
-----
Damping ratio:                               5.000000000000003E-002
-----
Damping frequency(wi):                       32.000
-----
Damping frequency(wj):                       72.000
-----
Load magnitude:                              -100.00
-----
Number of loads:                             1
-----
Axel distance:                               0.00
-----
Vehicle speed:                               10.00
-----
Vehicle acceleration:                        0.00
-----
Inertial effect:                             NO
-----
```



Traffic sequence:

- 1 = Element 1
- 2 = Element 2
- 3 = Element 3
- 4 = Element 4
- 5 = Element 5
- 6 = Element 6
- 7 = Element 7
- 8 = Element 8
- 9 = Element 9
- 10 = Element 10
- 11 = Element 11
- 12 = Element 12
- 13 = Element 13
- 14 = Element 14
- 15 = Element 15
- 16 = Element 16
- 17 = Element 17
- 18 = Element 18
- 19 = Element 19
- 20 = Element 20

MAX ABSOLUTE NODAL DISPLACEMENTS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0017585
2	0.0000000	0.0017523	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0017399
3	0.0000000	0.0034674	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0016841
4	0.0000000	0.0051081	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0015911
5	0.0000000	0.0066372	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0014616
6	0.0000000	0.0080177	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0012961
7	0.0000000	0.0092139	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0010962
8	0.0000000	0.0101891	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0008857
9	0.0000000	0.0109085	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006607
10	0.0000000	0.0113388	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0004314
11	0.0000000	0.0114496	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0002187
12	0.0000000	0.0112408	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0004343
13	0.0000000	0.0108277	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0006555
14	0.0000000	0.0101467	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0008898
15	0.0000000	0.0091999	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0011008
16	0.0000000	0.0080227	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0012833

MAX ABSOLUTE NODAL VELOCITIES

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0063421
2	0.0000000	0.0063300	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0062205
3	0.0000000	0.0121846	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0054809
4	0.0000000	0.0172792	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0047088
5	0.0000000	0.0215850	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0039521
6	0.0000000	0.0250853	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0032667
7	0.0000000	0.0278253	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0025843
8	0.0000000	0.0298445	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0018898
9	0.0000000	0.0311950	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0012846
10	0.0000000	0.0319083	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0012630
11	0.0000000	0.0320065	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0011327
12	0.0000000	0.0313885	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0015225
13	0.0000000	0.0300614	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0020757
14	0.0000000	0.0280495	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0025484
15	0.0000000	0.0253923	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0029666
16	0.0000000	0.0221454	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0035193
17	0.0000000	0.0183799	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0039975
18	0.0000000	0.0141810	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0043840
19	0.0000000	0.0096460	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0046683
20	0.0000000	0.0048812	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0048422
21	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0049008



MAX ABSOLUTE NODAL ACCELERATIONS

Node	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz
1	0.000000	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.5287617
2	0.000000	0.3655978	0.000000	0.000000	0.000000	0.2162870
3	0.000000	0.4751770	0.000000	0.000000	0.000000	0.2304777
4	0.000000	0.4415122	0.000000	0.000000	0.000000	0.1979670
5	0.000000	0.4776950	0.000000	0.000000	0.000000	0.1089724
6	0.000000	0.5210372	0.000000	0.000000	0.000000	0.1237108
7	0.000000	0.5440130	0.000000	0.000000	0.000000	0.0936586
8	0.000000	0.5480091	0.000000	0.000000	0.000000	0.1174860
9	0.000000	0.5312954	0.000000	0.000000	0.000000	0.1205275
10	0.000000	0.5318092	0.000000	0.000000	0.000000	0.1021479
11	0.000000	0.5872349	0.000000	0.000000	0.000000	0.1228685
12	0.000000	0.6084041	0.000000	0.000000	0.000000	0.1233919
13	0.000000	0.6299474	0.000000	0.000000	0.000000	0.1078189
14	0.000000	0.6433432	0.000000	0.000000	0.000000	0.1217604
15	0.000000	0.6156830	0.000000	0.000000	0.000000	0.1123511
16	0.000000	0.5619862	0.000000	0.000000	0.000000	0.0849546
17	0.000000	0.5143873	0.000000	0.000000	0.000000	0.1079717
18	0.000000	0.4325543	0.000000	0.000000	0.000000	0.1165484
19	0.000000	0.3147508	0.000000	0.000000	0.000000	0.1346980
20	0.000000	0.1662667	0.000000	0.000000	0.000000	0.1600722
21	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.1694105

• • •

MAX SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	-0.000	98.209	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
21	0.000	99.891	-0.000	-0.000	-0.000	0.000

MIN SUPPORT REACTIONS

Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
21	0.000	-1.642	-0.000	-0.000	-0.000	0.000

• • •

MAX ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	0.000	98.513	0.000	0.000	0.000	1.265
	2	0.000	7.781	0.000	0.000	0.000	95.503
2	2	0.000	94.865	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.000	9.696	0.000	0.000	0.000	179.917
3	3	0.000	89.957	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.000	16.368	0.000	0.000	0.000	255.337
4	4	0.000	85.058	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.000	20.010	0.000	0.000	0.000	319.304

• • •

MIN ELEMENT FORCES

Element	Node	Fx	Fy	Fz	Mx	My	Mz
1	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.317
	2	0.000	-95.500	0.000	0.000	0.000	0.000
2	2	0.000	-6.340	0.000	0.000	0.000	-95.576
	3	0.000	-89.916	0.000	0.000	0.000	0.000
3	3	0.000	-9.414	0.000	0.000	0.000	-178.993
	4	0.000	-85.112	0.000	0.000	0.000	0.000

• • •



~MVNMSS.SVR = Solver transcript file.

```
L O A D Y N   S O L V E R

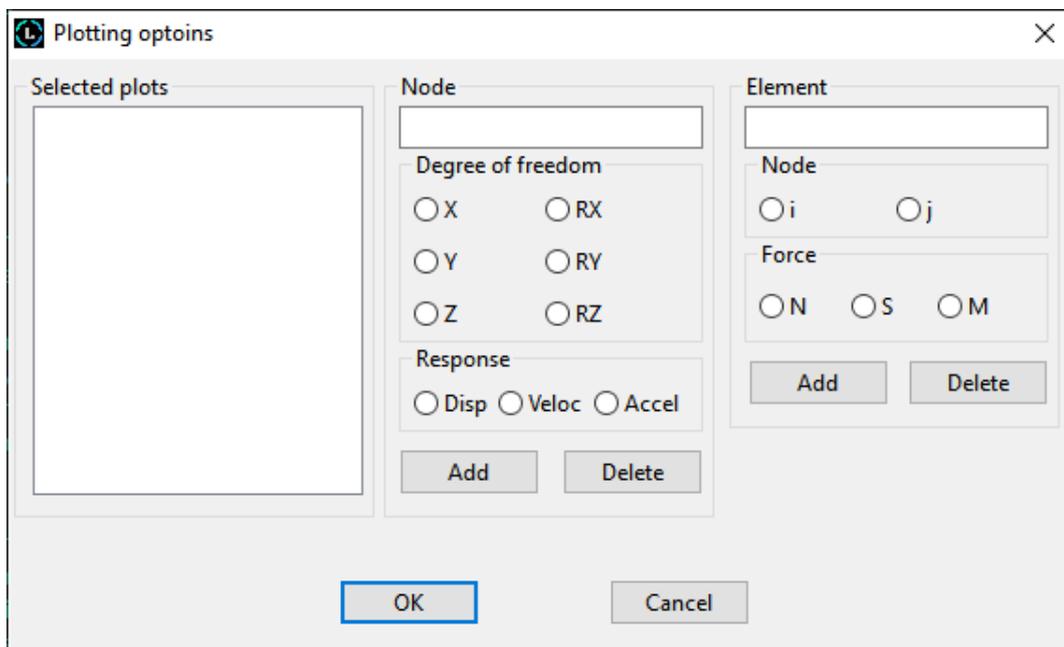
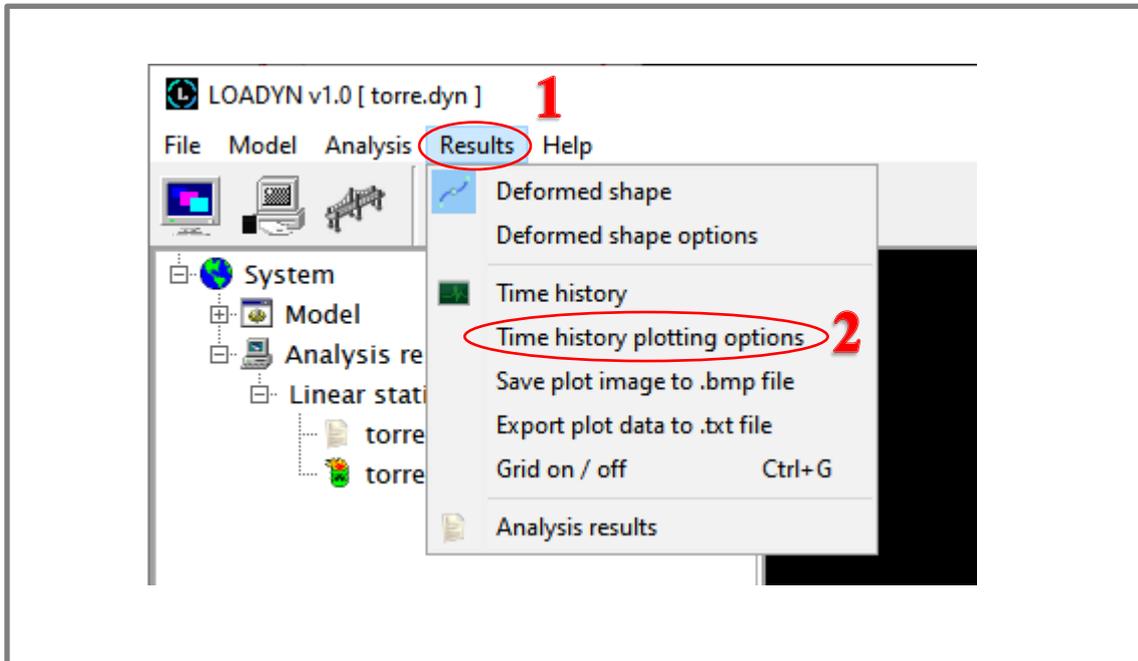
LOADYN v1.0
C:\Users\Rafael\Desktop\TESTETESTE\exemplo_silvio\VIGA20EL.dyn
Starting task                                     16-05-21 - 18:45:26
Total system memory..... = [Mb] 8091
Available system memory..... = [Mb] 5045
Model name..... = VIGA_20_ELEMENTOS
Analysis type..... = MOVING MASSES
Number of nodes..... = 21
Number of supports..... = 2
Number of materials..... = 1
Number of sections..... = 1
Number of elements..... = 20
Reading dynamic and vehicle properties ...
End of input phase                               18:45:26

S O L U T I O N   P R O C E S S

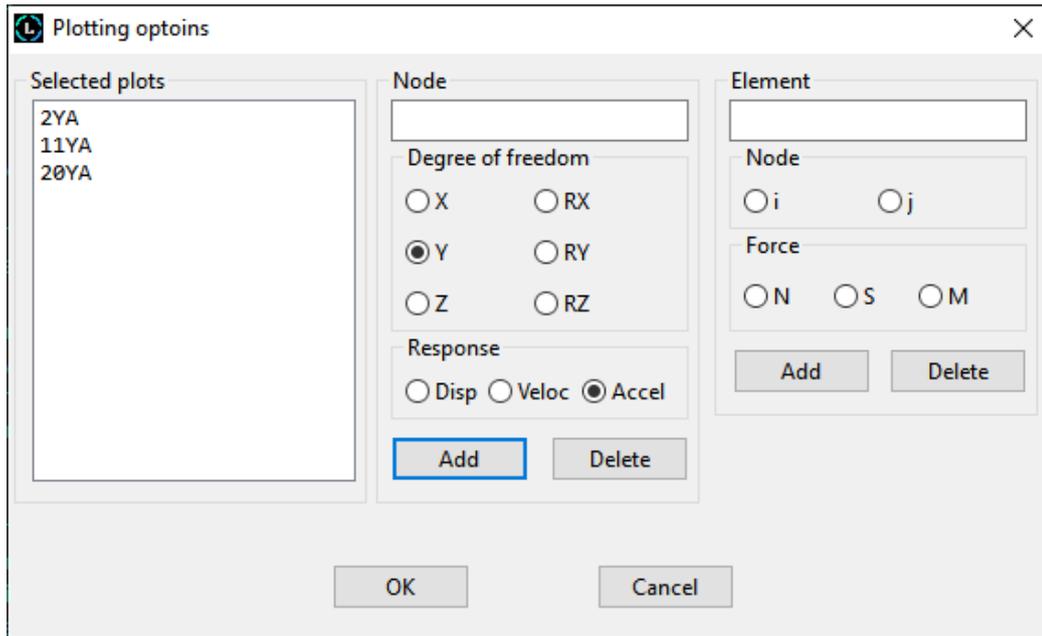
Memory allocated for SKS pointer array..... = [Kb] 0.5
Assembling SKS pointer array ...
Memory allocated for SKS linear stiffness matrix = [Kb] 9.1
Global SKS linear stiffness matrix assembly
Merging 20 elements ...
Memory allocated for SKS linear mass matrix..... = [Kb] 9.1
Global SKS linear mass matrix assembly ...
Memory allocated for SKS linear damping matrix = [Kb] 9.1
Global SKS linear damping matrix assembly ...
Applying boundary conditions ...
Newmark direct integration method
9.1 Kb allocated for SKS linear stiffness matrix copy
9.1 Kb allocated for SKS linear mass matrix copy
393.8 Kb allocated for time history displacement matrix
393.8 Kb allocated for time history velocity matrix
393.8 Kb allocated for time history acceleration matrix
Setting up variables ...
Verifying direct integration parameters ...
Setting up initial conditions ...
Time increment size.. = 0.005
Integration time steps = 400
Generating solution ...
Time step = 2
Time step = 3
Time step = 4
Time step = 5
. . .
```

[2] RESULTS TAB

To visualize the time history response, follow: [1]Results > [2]Time history plotting options.

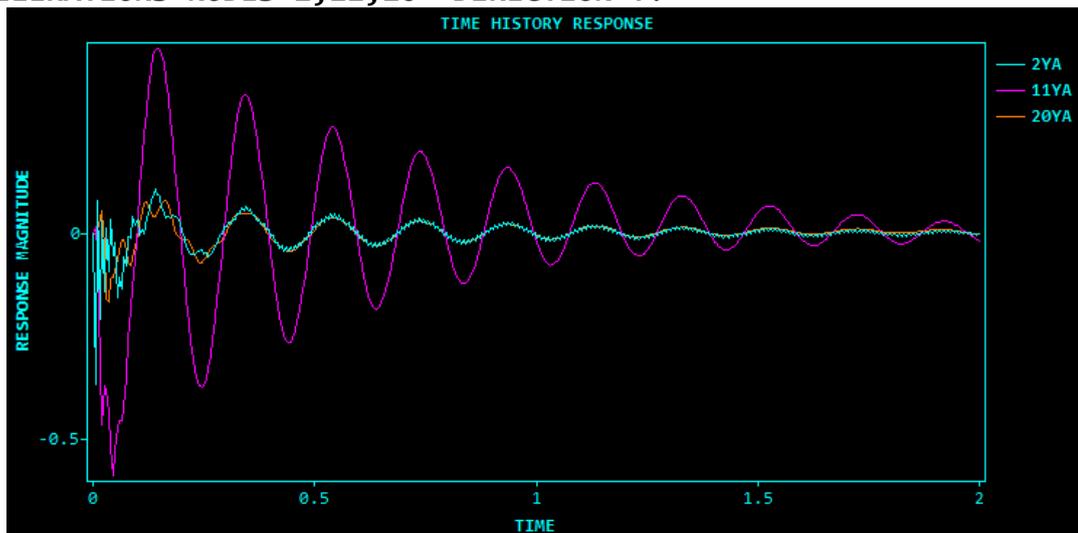


Select the desired nodes and their degrees of freedom or the elements and their desired forces. Add them to the **selected plots** by clicking on the **add** button.



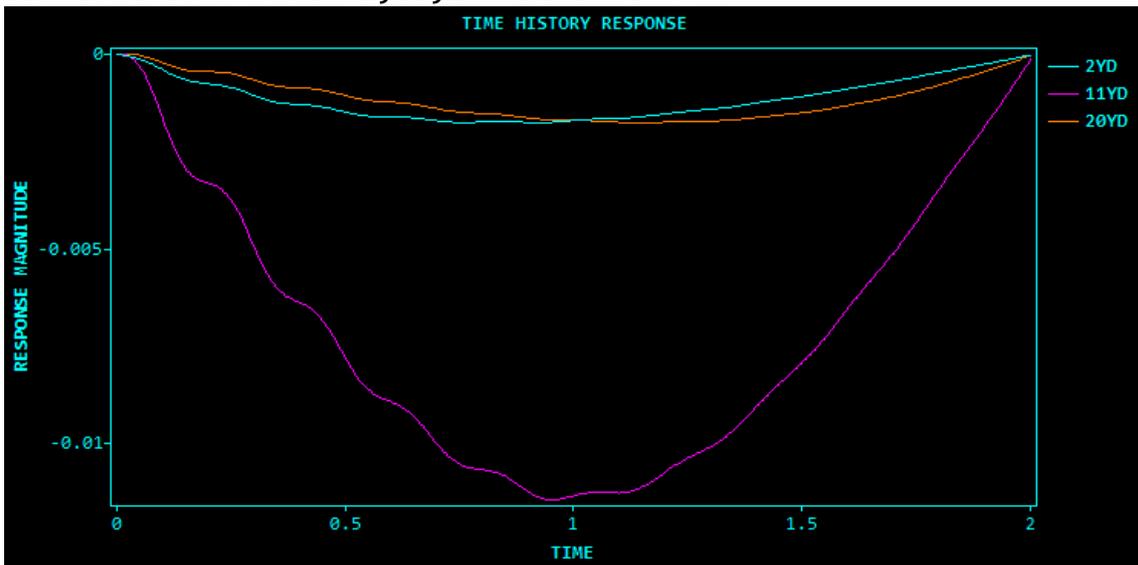
Press the **OK** button to confirm the plots.

ACCELERATIONS NODES 2,11,20 DIRECTION Y:

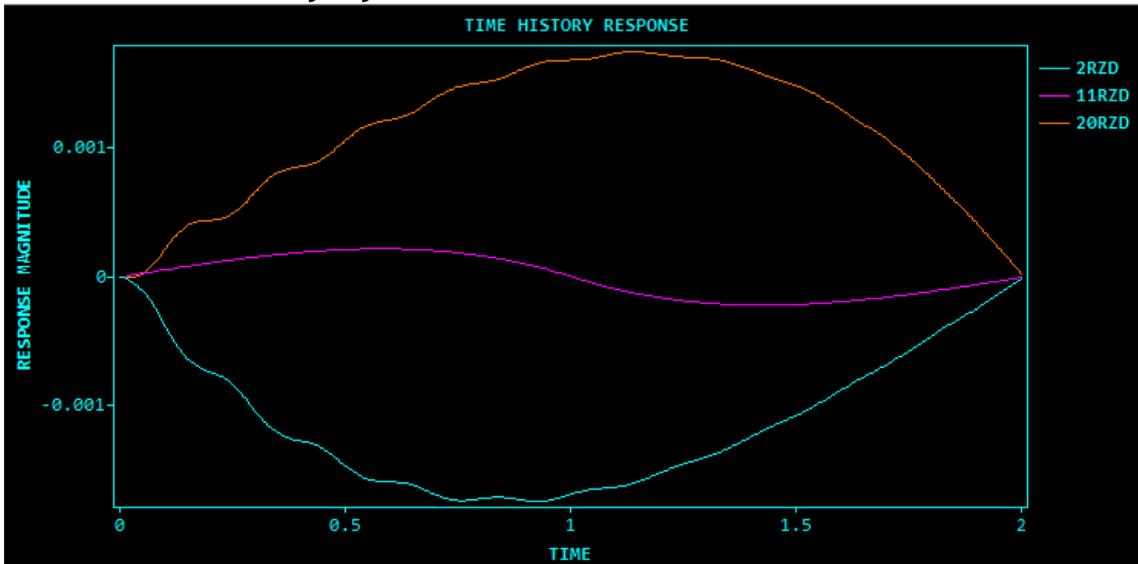




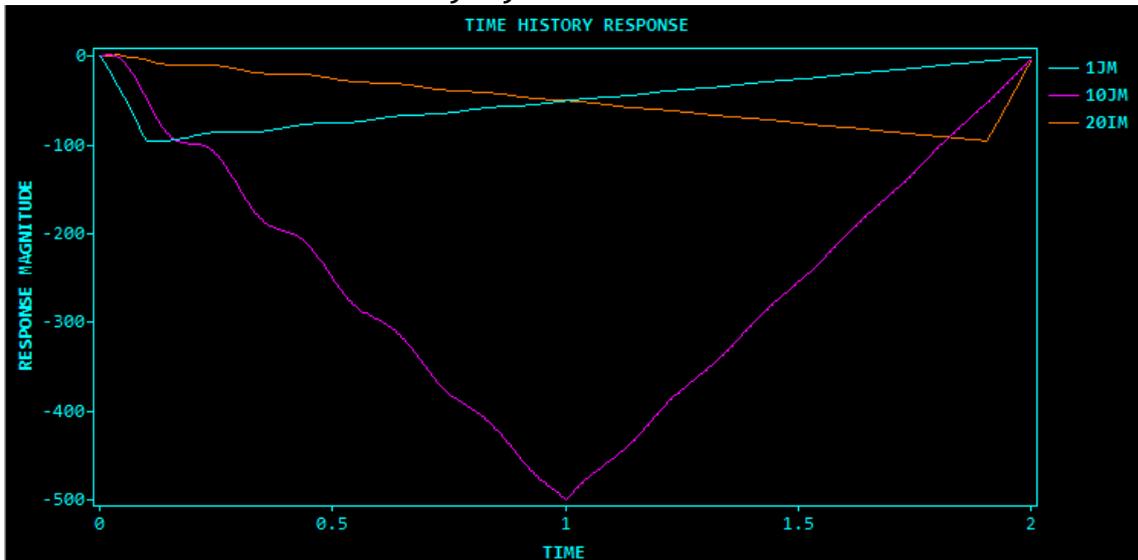
DISPLACEMENTS NODES 2,11,20 DIRECTION Y:



ROTATIONS NODES 2,11,20 DIRECTION RZ:

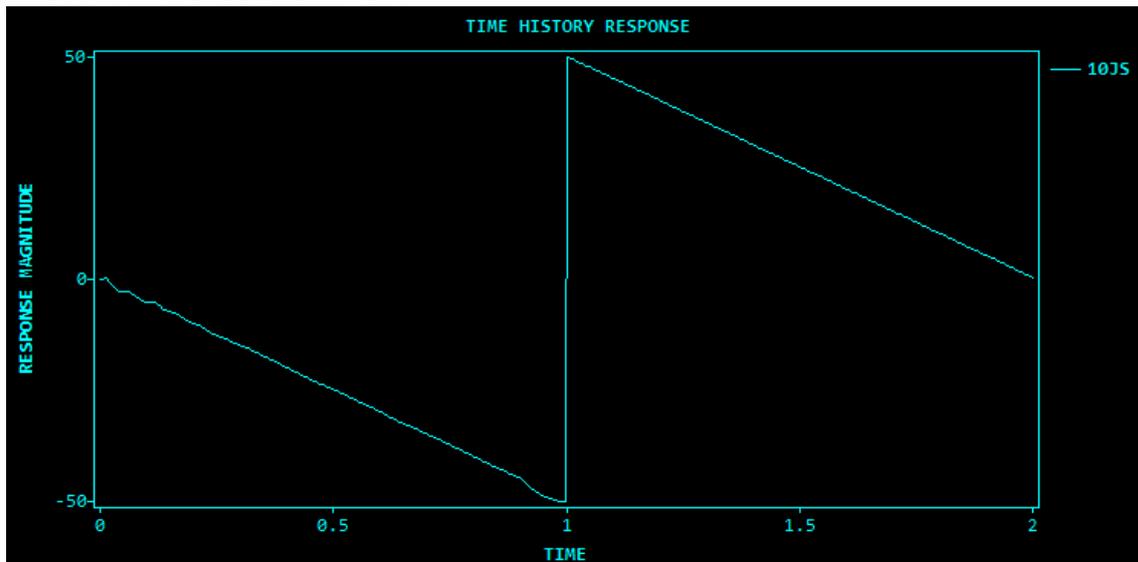


BENDING MOMENT ELEMENTS 1,10,20:





SHEAR FORCE ELEMENT 10:



If another analysis needs to be executed, the current model must be unlocked by clicking on the following shortcut icon  or by accessing the **analysis** menu tab.

3.4. CRITICAL SPEED ANALYSIS

For critical speed analysis: Type [CRITICAL SPEED] in the analysis type field.

```
LoaDyn v1.0
Input data file

MODEL NAME:   VIGA_20_ELEMENTOS
ANALYSIS TYPE: CRITICAL SPEED
```



Define the critical speed analysis parameters:

```
*****
MOVING MASSES ANALYSIS
*****

RAYLEIGH DAMPING PROPERTIES
Omega i   Omega j   Damp. ratio
   32      72      0.05
0

TRAFFIC SEQUENCE
Elements
      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
Entry node
      1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0

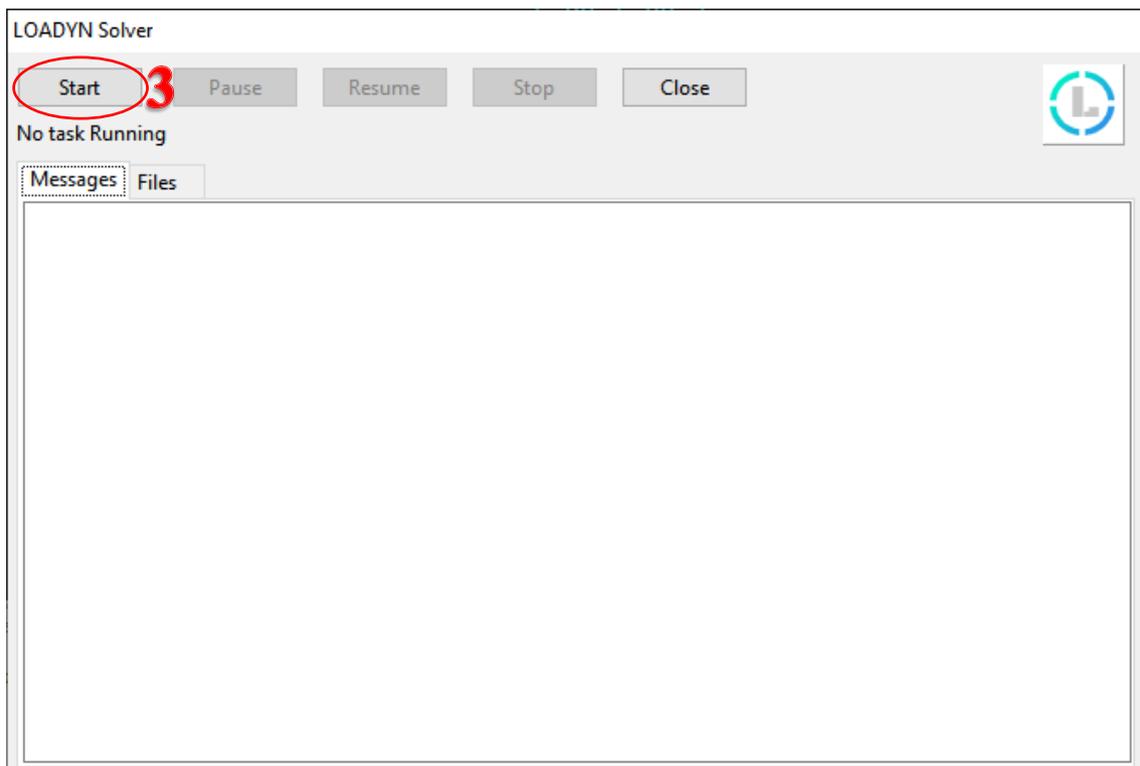
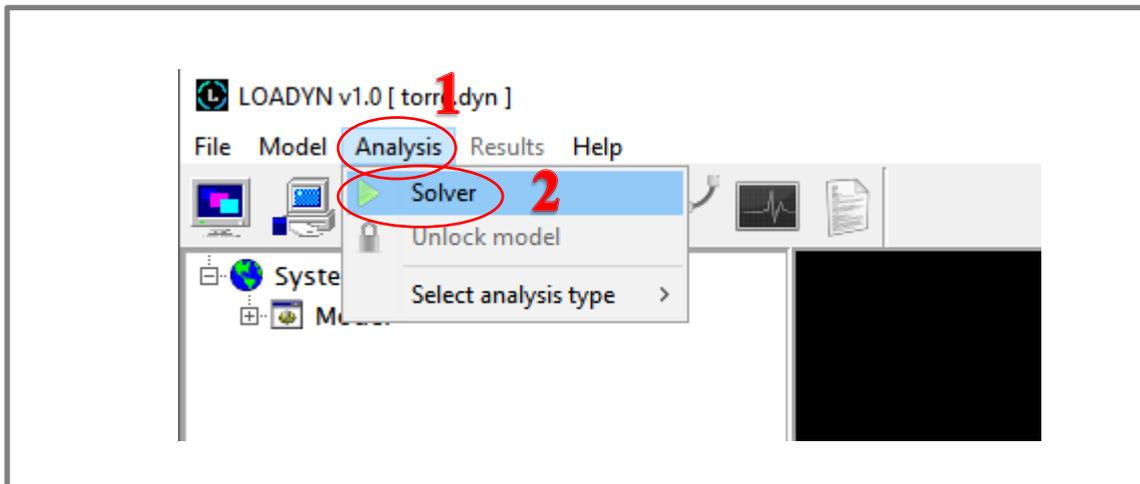
VEHICLE PROPERTIES
Load magnitude   No of loads   Axle dist   Speed   Acceleration
      -100             1             0       10       0
0

MOVING MASSES ANALYSIS DYNAMIC PROPERTIES
Iterations      Delta t      Inertial effect
      400        0.005             0
0

      C R I T I C A L   S P E E D

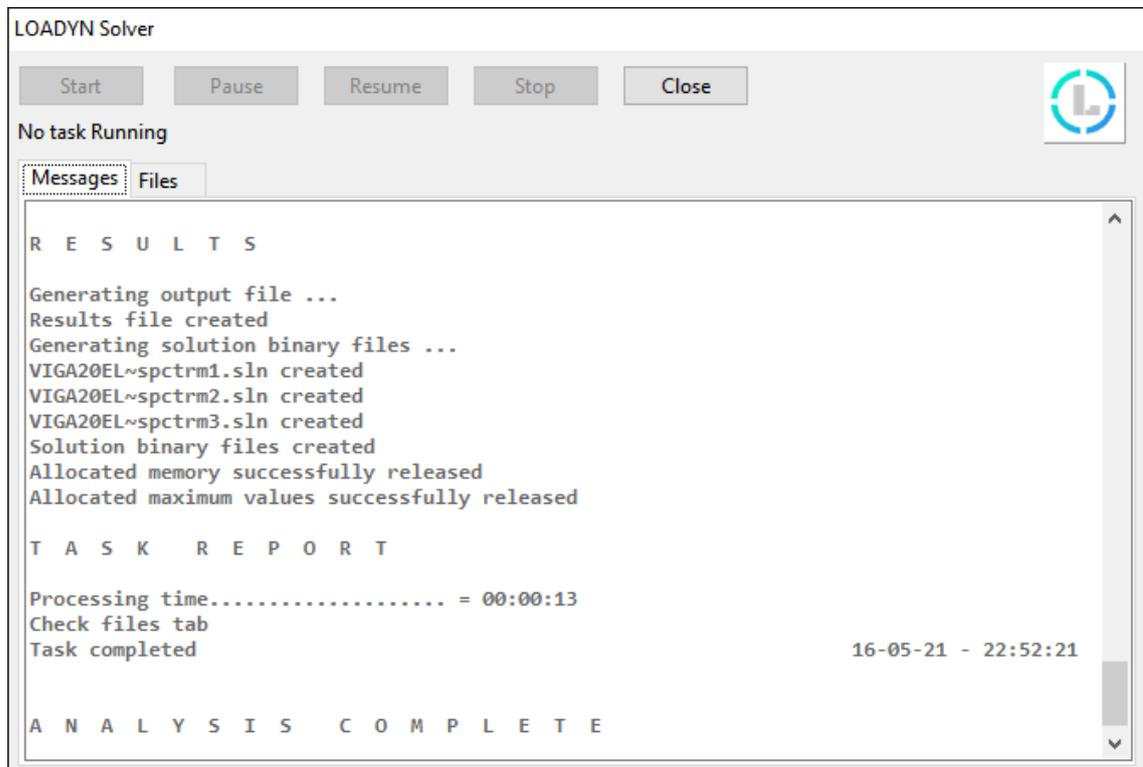
CRITICAL SPEED ANALYSIS PROPERTIES
Iterations      Initial speed      Final speed
      100             10             150
0
```

Once the analysis data has been defined, the user may proceed to run the LOADYNSolver. [1]Analysis > [2]Solver > [3]Start.

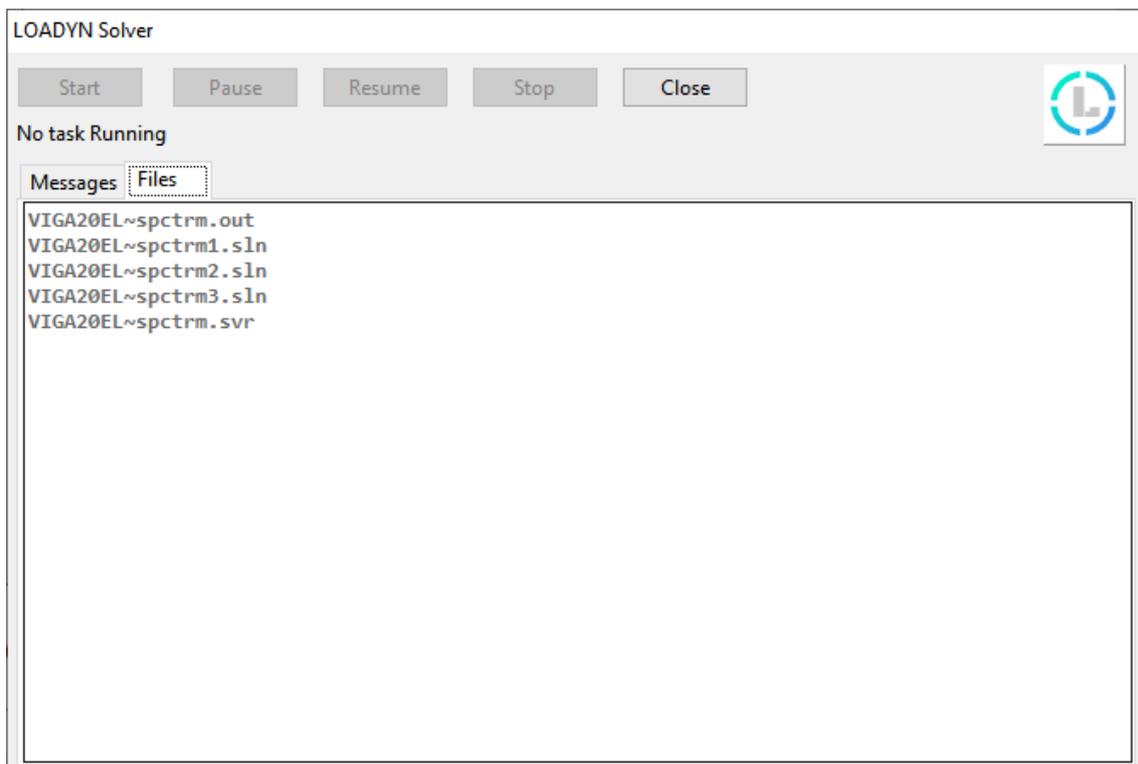




Scroll up to read the analysis reports and check for error messages once the analysis is complete.



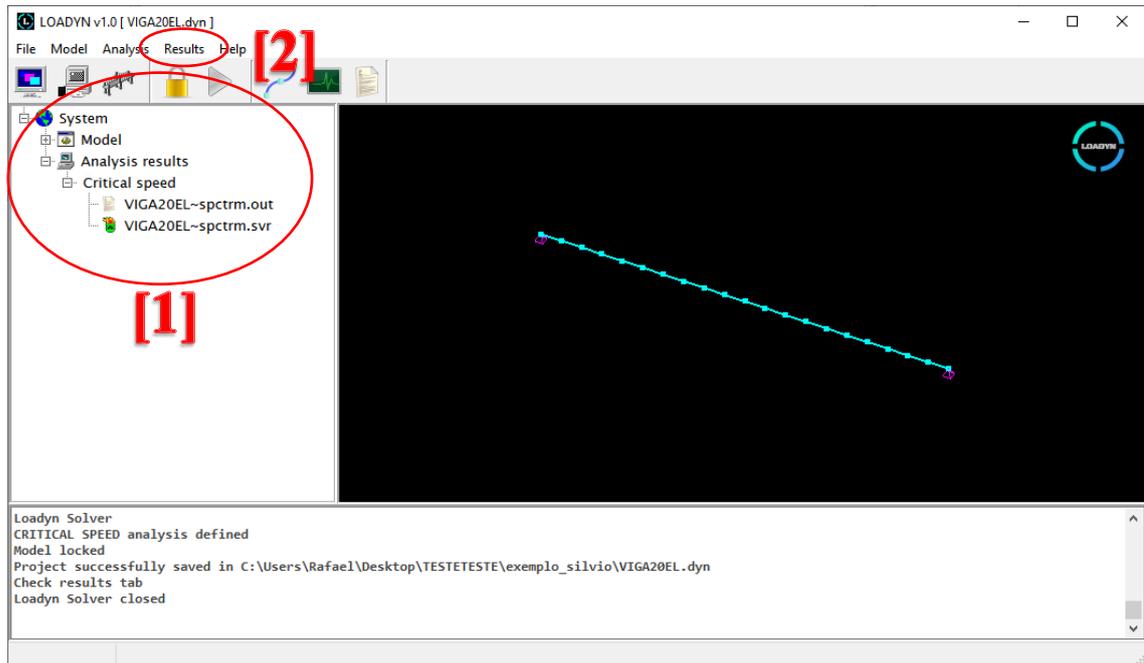
Click on the **files** tab to see the solution files list.



The solver window can now be closed.



The main window is now locked and shows the post-processed model.



[1] MAIN TREE:

~SPCTRM.OUT = Analysis results file.

```
MOVING MASSES
DYNAMIC ANALYSIS DATA

-----
Iterations:                                     400
-----
Delta t:                                       5.000000000000001E-003
-----
Damping ratio:                                5.000000000000003E-002
-----
Damping frequency(wi):                        32.000
-----
Damping frequency(wj):                        72.000
-----
Load magnitude:                               -100.00
-----
Number of loads:                              1
-----
Axel distance:                                0.00
-----
Vehicle speed:                                10.00
-----
Vehicle acceleration:                          0.00
-----
Inertial effect:                              NO
-----
```

• • •



~SPCTRM.SVR = Solver transcript file.

```
L O A D Y N   S O L V E R

LOADYN v1.0
C:\Users\Rafael\Desktop\TESTETESTE\exemplo_silvio\VIGA20EL.dyn
Starting task                                     16-05-21 - 22:52:07
Total system memory..... = [Mb] 8091
Available system memory..... = [Mb] 4397
Model name..... = VIGA_20_ELEMENTOS
Analysis type..... = CRITICAL SPEED
Number of nodes..... = 21
Number of supports..... = 2
Number of materials..... = 1
Number of sections..... = 1
Number of elements..... = 20
Reading dynamic and vehicle properties ...
Reading critical speed analysis properties ...
End of input phase                               22:52:07

S O L U T I O N   P R O C E S S

Memory allocated for SKS pointer array..... = [Kb] 0.5
Assembling SKS pointer array ...
Memory allocated for SKS linear stiffness matrix = [Kb] 9.1
Global SKS linear stiffness matrix assembly
Merging 20 elements ...
Memory allocated for SKS linear mass matrix..... = [Kb] 9.1
Global SKS linear mass matrix assembly ...
Memory allocated for SKS linear damping matrix = [Kb] 9.1
Global SKS linear damping matrix assembly ...
Applying boundary conditions ...
Starting critical speed analysis ...
98.4 Kb allocated for critical speed displacement matrix
98.4 Kb allocated for critical speed velocity matrix
98.4 Kb allocated for critical speed acceleration matrix
Number of iterations for critical speed = 100
Running analysis and storing maximum values ...
Iteration = 1    speed = 10.0
Iteration = 2    speed = 11.4
Iteration = 3    speed = 12.8
Iteration = 4    speed = 14.2
Iteration = 5    speed = 15.7
Iteration = 6    speed = 17.1
Iteration = 7    speed = 18.5
Iteration = 8    speed = 19.9
Iteration = 9    speed = 21.3
```

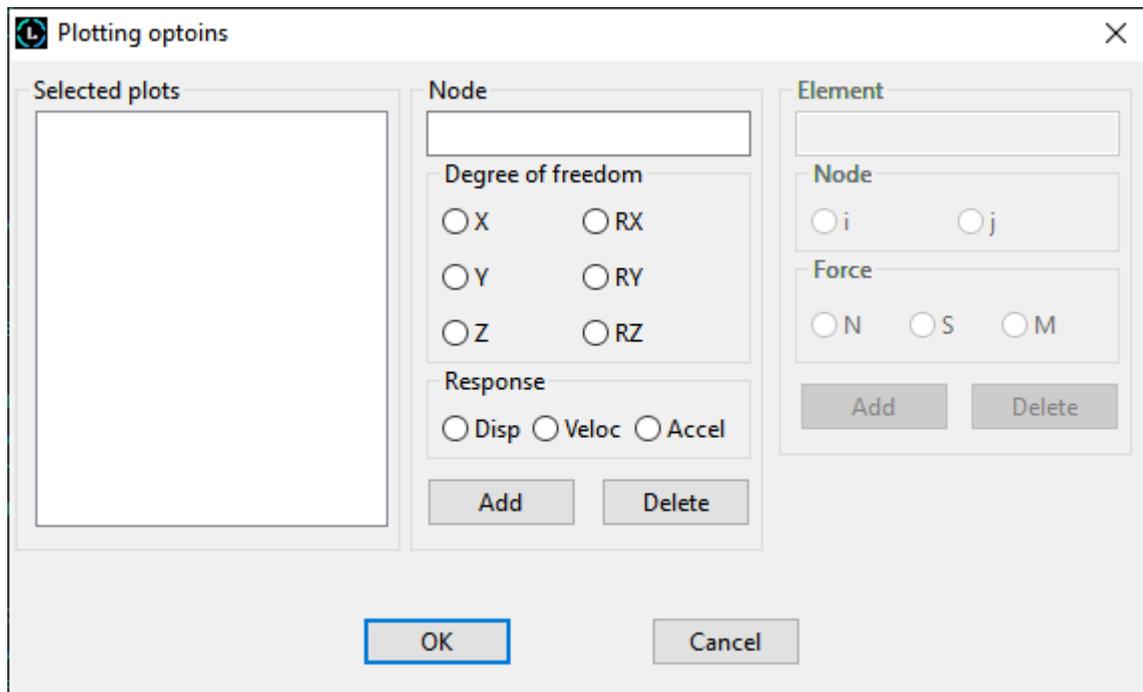
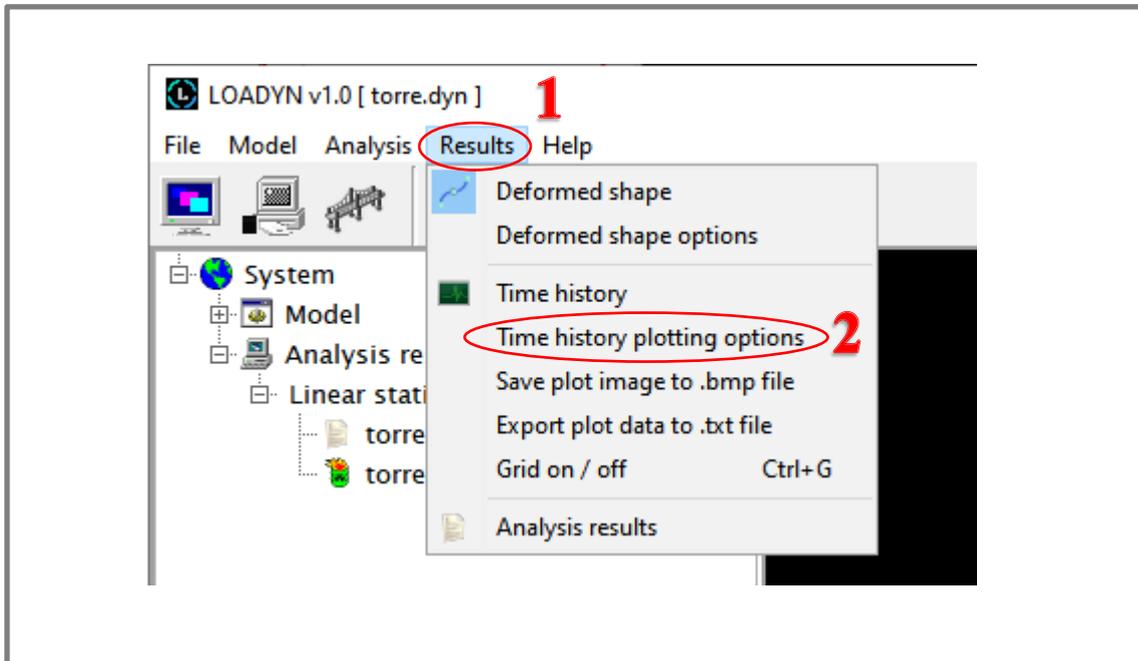
. . .

LOADYN iteratively executes a complete moving mass analysis. The vehicle speed is incremented for each iteration and the maximum structural response values are stored for each iteration as well. As a result **MAXIMUM RESPONSE X VEHICLE SPEED** plots are obtained.

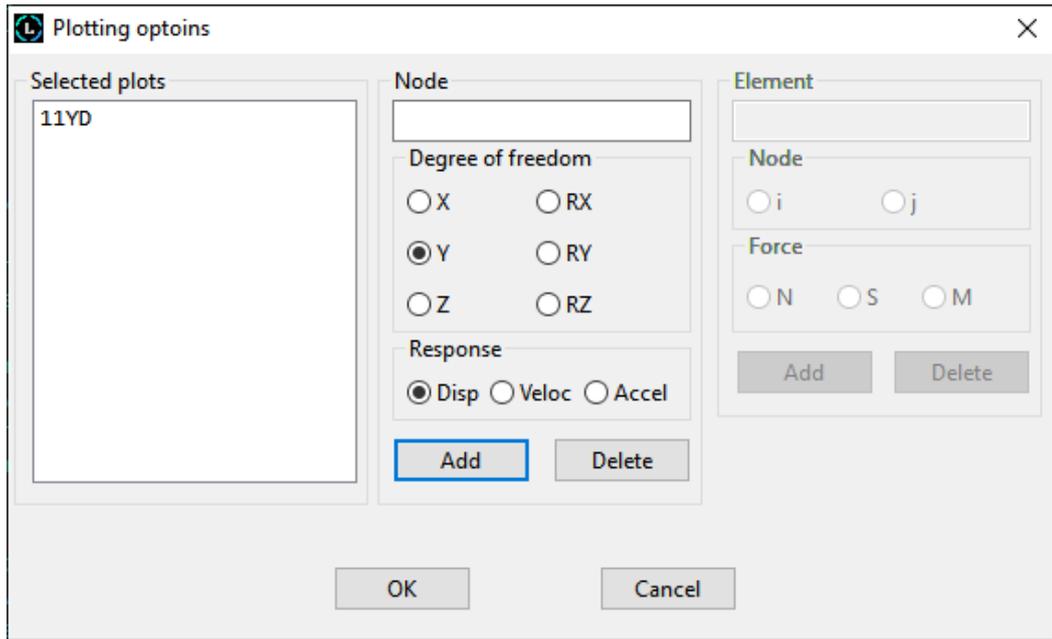


[2] RESULTS TAB

To visualize the maximum response plots, follow: [1]Results > [2]Time history plotting options.

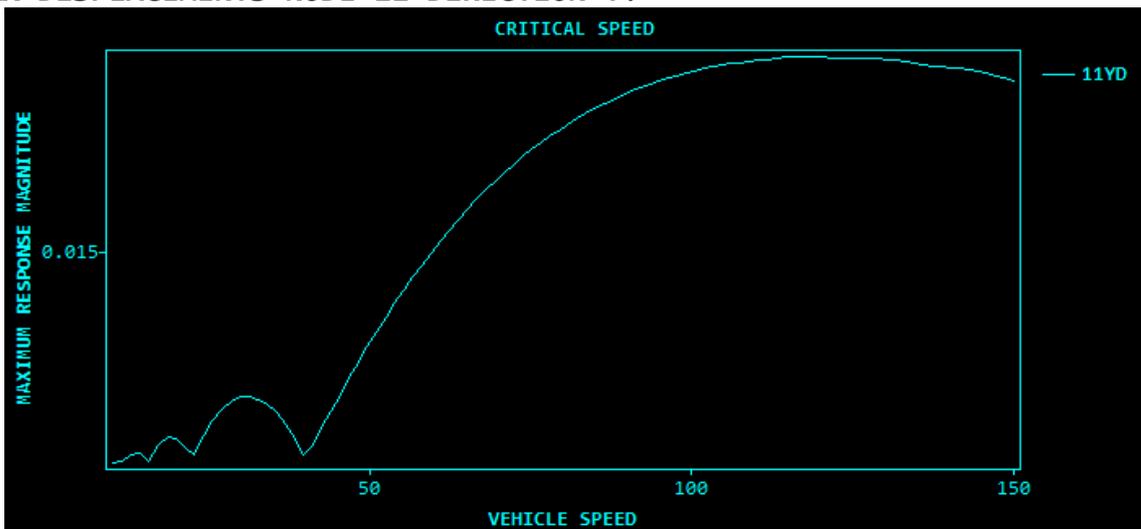


Select the desired nodes and their degrees of freedom. Add them to the **selected plots** by clicking on the **add** button.

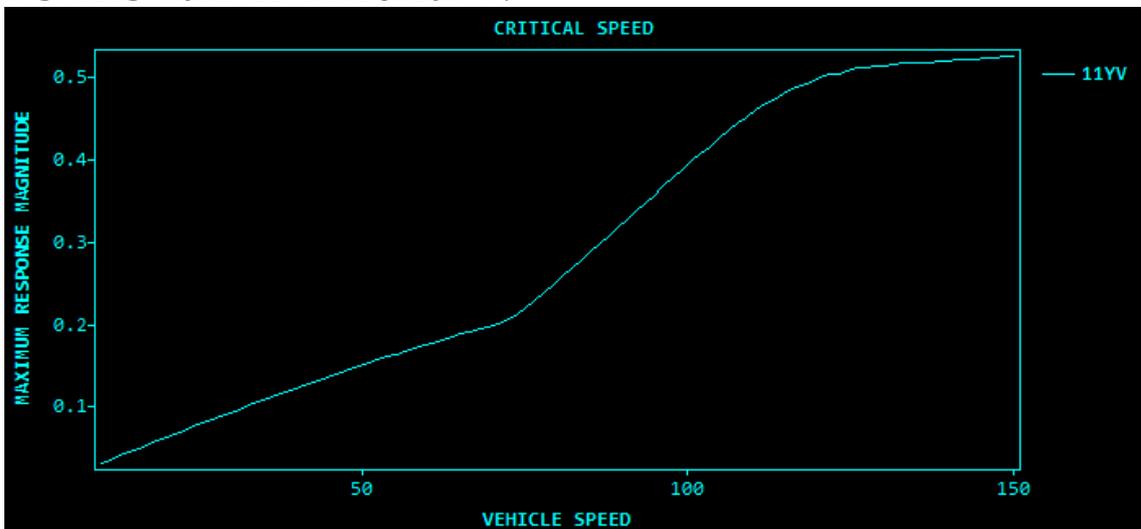


Press the OK button to confirm the plots.

MAX DISPLACEMENTS NODE 11 DIRECTION Y:

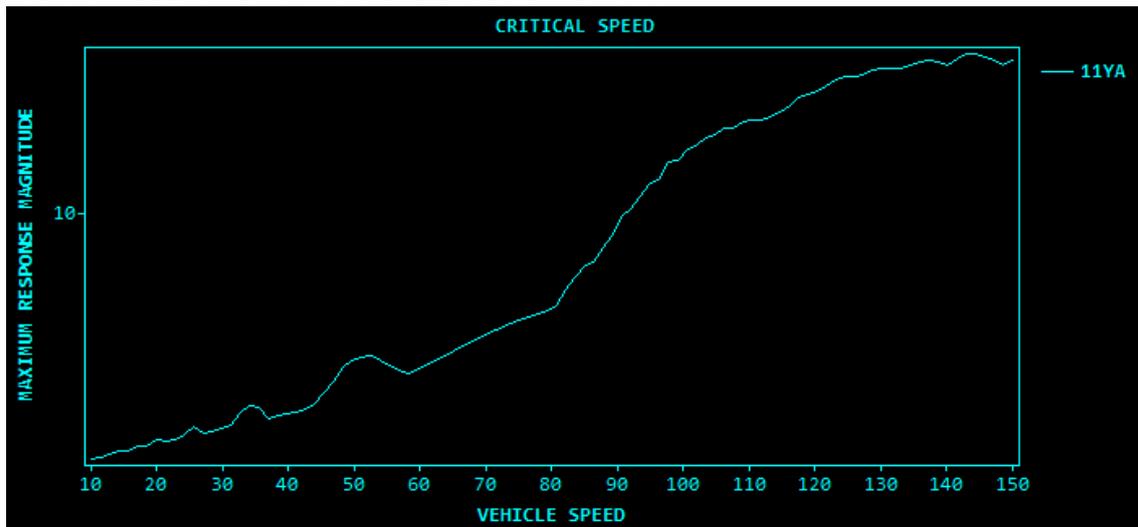


MAX SPEEDS NODE 11 DIRECTION Y:





MAX ACCELERATIONS NODE 11 DIRECTION Y:



If another analysis needs to be executed, the current model must be unlocked by clicking on the following shortcut icon  or by accessing the **analysis** menu tab.

4. LOADYN

