



**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Escola Politécnica**  
**Programa de Projeto de Estruturas**

Rodrigo Sanguedo Baptista

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS ESPECIAIS DE CONCRETO  
ARMADO DIMENSIONADAS PELO MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES**



UFRJ

Rodrigo Sanguedo Baptista

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS ESPECIAIS DE CONCRETO  
ARMADO DIMENSIONADAS PELO MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Rio de Janeiro

2022

Baptista, Rodrigo Sanguedo

Análise não linear de estruturas especiais de concreto armado dimensionadas pelo método de bielas e tirantes / Rodrigo Sanguedo Baptista – 2022.

167.: 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2022.

Orientador: Sergio Hampshire de Carvalho Santos

1. Bielas e tirantes, 2. Programa ATENA, 3. Concreto armado, 4. Estruturas. I. Santos, Sergio Hampshire de Carvalho. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola Politécnica. III. Título.



UFRJ

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS ESPECIAIS DE CONCRETO  
ARMADO DIMENSIONADAS PELO MÉTODO DE BIELAS E TIRANTES

Rodrigo Sanguedo Baptista

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Aprovada pela Banca:

---

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc., UFRJ

---

Prof. Julio Jerônimo Holtz Silva Filho, D. Sc., UFRJ

---

Prof. Rafael Alves de Souza, D. Sc., UEM

Rio de Janeiro  
2022

## **AGRADECIMENTOS**

Inicialmente agradeço a Deus pela possibilidade de ter realizado essa caminhada até aqui. Agradeço à minha mãe Lucia, ao meu pai Wladimir, à minha irmã Mariana, à minha avó Dionita e ao meu avô Jocenir, por terem sido fundamentais ao longo de toda a minha vida. Agradeço ao meu orientador, o professor Sergio Hampshire de Carvalho Santos, por todos os ensinamentos e paciência durante o tempo em que desenvolvi essa Dissertação e também durante as matérias do Mestrado que tive a oportunidade de aprender com ele. É uma honra poder aprender com um engenheiro do nível do professor Sergio. Agradeço também à minha namorada Amanda, por todo o companheirismo e por todo apoio ao longo dessa trajetória em que cursei o Mestrado. Agradeço ainda à minha prima e melhor amiga Carina e aos meus grandes amigos Gustavo, Gabriel, Luciano, Felipe, Luiz, Eduardo e Nathur, pela amizade de vários anos e por todo incentivo durante o meu percurso nesse Mestrado.

A todos esses, o meu muito obrigado!!!

## RESUMO

BAPTISTA, Rodrigo. **Análise não Linear de Estruturas Especiais de Concreto Armado Dimensionadas pelo Método de Bielas e Tirantes**. Rio de Janeiro. 2022. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2022.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de apresentar análises não lineares de estruturas especiais de concreto armado dimensionadas pelo método de bielas e tirantes. Por estruturas especiais são consideradas aquelas cujo modelo de dimensionamento convencional não é suficiente para a obtenção das armaduras de aço a serem utilizadas para reforço. Dentre estas estruturas podem ser exemplificadas as vigas com aberturas, as vigas com variação de altura, as vigas-parede, etc. O dimensionamento dessas estruturas pode se dar através do método de bielas e tirantes, o qual é baseado no princípio do limite inferior da Plasticidade. O método em questão consiste em elaborar uma treliça isostática para representar da melhor forma possível a configuração das tensões principais elásticas que atuam na estrutura a partir dos carregamentos. As barras da treliça que apresentam tração (tirantes) são utilizadas para obter as armaduras de aço a serem implementadas na estrutura. Já as barras da treliça que apresentam compressão são as bielas comprimidas. As larguras dessas bielas devem ser tais que as tensões atuantes nelas sejam inferiores aos valores limites estabelecidos pela norma regulamentadora em vigor. No presente trabalho foram realizadas análises não lineares para estruturas dimensionadas pelo método de bielas e tirantes de maneira a verificar se a configuração das tensões principais sofre alterações, de tal forma que haja a necessidade de modificar as armaduras decorrentes da análise elástica. Para a realização das análises não lineares foi utilizado o *software* de elementos finitos ATENA, o qual considera a fissuração do concreto através de modelos consistentes. O trabalho concluiu que as armaduras obtidas por meio das análises elásticas sofrem alterações no que diz respeito ao estado limite último. Também foi possível evidenciar a necessidade da previsão de armaduras para a redução da abertura de fissuras em regiões das estruturas onde não é possível atender ao estado limite de serviço.

Palavras-chave: bielas e tirantes; *software* ATENA; concreto armado; estruturas.

## ABSTRACT

BAPTISTA, Rodrigo. **Non-Linear Analysis of Special Reinforced Concrete Structures Dimensioned by Strut and Tie Method**. Rio de Janeiro. 2022. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2022.

This work was developed with the objective of presenting non-linear analyzes of special reinforced concrete structures designed by the strut-and-tie method. For special structures, are considered those ones in which a conventional design model is not sufficient to obtain the steel reinforcements to be used. Among these structures, it can be cited beams with openings, beams with varying heights, deep beams, etc. The design of these structures can be done, therefore, through the strut-and-tie method, which is based on the principle of the lower limit of Plasticity. The method in question consists on developing an isostatic truss to represent the configuration of the main elastic stresses that act on the structure subjected to the loads. The truss bars that have tension (ties) are used to obtain the steel reinforcement to be implemented in the structure. The truss bars that present compression are called compressed struts. The width of these struts must be such that the stresses acting on them are lower than the limit values established by the regulatory standards. In the present work, non-linear analyzes were carried out for structures dimensioned by the strut-and-tie method in order to verify if the configuration of the principal stresses undergoes changes in such a way that there is necessary to modify the reinforcement resulting from the elastic analysis. The ATENA finite element software was used to perform the non-linear analyses, which considers the cracking of concrete through consistent models. The work concluded that the reinforcement obtained through the elastic analysis shall suffer alterations in order to meet the ultimate limit state. Additionally, it was possible to highlight the need for reinforcement increase for reducing crack opening in regions of the structures where it is not possible to meet the service limit state in this regard.

Keywords: strut-and-tie, software ATENA, reinforced concrete; structures.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. MÉTODO DOS ESTADOS LIMITES.....	3
3. MECANISMOS DE RESISTÊNCIA DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO NO ESTADO LIMITE ÚLTIMO.....	7
3.1. Mecanismo de resistência da seção transversal do elemento de concreto armado submetido a esforço cortante e momento fletor .....	11
3.1.1. Dimensionamento das armaduras de uma viga simplesmente apoiada pelo modelo de bielas e tirantes representado por uma treliça discreta	12
3.1.2. Dimensionamento das armaduras de uma viga simplesmente apoiada pelo modelo usual de cálculo.....	18
4. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES .....	29
5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	35
6. <i>SOFTWARE</i> ATENA.....	43
7. METODOLOGIA.....	54
8. MODELOS ANALISADOS.....	55
8.1. Modelo 01 – Viga simplesmente apoiada com carga concentrada aplicada no meio do vão .....	56
8.2. Modelo 02 – Parede engastada com abertura e carga concentrada aplicada....	64
8.3. Modelo 03 – Consolo curto .....	79
8.4. Modelo 04 – Viga com redução de altura no apoio .....	96
8.5. Modelo 05 – Bloco com duas estacas .....	104
8.6. Modelo 06 – Viga com abertura analisada por AGUIAR (2018) .....	112
8.7. Modelos referentes a parede, nós de pórticos, vigas com alturas diferentes e viga em balanço.....	121
9. CONCLUSÕES .....	147
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	149

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3-1 – Diagrama de tensão deformação idealizado para o concreto.....	7
Figura 3-2 – Diagrama de tensão x deformação simplificado estabelecido na NBR 6118:2014 para o aço em análises nos estados limites último e de serviço. 6118:2014. .	8
Figura 3-3 – Domínios de ruptura de elementos de concreto armado para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa. ....	9
Figura 3-4 - Viga simplesmente apoiada em flexão simples na iminência da ruptura. .	11
Figura 3-5– a) Viga simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído, b) carregamento uniforme convertido em cargas concentradas aplicadas nos nós da treliça isostática que representa a viga, c) componentes da treliça isostática considerando armadura transversal vertical. ....	13
Figura 3-6 – Biela comprimida a ser analisada. ....	14
Figura 3-7 - Detalhe do trecho da treliça a ser analisado para estabelecer o procedimento de cálculo.....	14
Figura 3-8 - Limites de tensões de compressão no concreto estabelecidos pela NBR 6118:2014 para verificação pelo método de bielas e tirantes.....	15
Figura 3-9 – Distribuição dos estribos verticais dimensionados para o trecho da treliça discreta analisado.....	17
Figura 3-10 - Biela comprimida presente na treliça contínua e a seção transversal (S) da viga onde essa biela atua ao longo de toda a sua altura.....	18
Figura 3-11 – Procedimento para o cálculo das forças C e T a serem corrigidas visando garantir o equilíbrio da seção.....	24
Figura 3-12 - Seção transversal da viga bi-apoiada com armadura dupla submetida a esforço cortante e momento fletor. ....	25
Figura 4-1 – Pórtico plano com regiões B e D (hachuradas) delimitadas. ....	30
Figura 4-2 – Exemplos da aplicação do princípio de Saint-Venant para a delimitação das regiões D nas estruturas.....	31
Figura 4-3 – Exemplos de encontros entre bielas e tirantes nos nós das treliças isostáticas. ....	32
Figura 4-4 – Substituição de cargas distribuídas em uma viga simplesmente apoiada por cargas concentradas para posteriormente definir o modelo de treliça isostática. ....	33
Figura 6-1 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba <i>Basic</i> ).....	47
Figura 6-2 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba <i>Tensile</i> ). ....	47

Figura 6-3 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba <i>Compressive</i> ). ....	47
Figura 6-4 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba <i>Shear</i> ). .....	48
Figura 6-5 - Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba <i>Miscellaneous</i> ). ..	48
Figura 6-6 – Parâmetros utilizados para definir as barras de aço CA-50 (aba <i>Basic</i> ). ...	49
Figura 6-7 - Parâmetros utilizados para definir as barras de aço CA-50 (aba <i>Miscellaneous</i> ). .....	49
Figura 6-8 – Parâmetros utilizados para o material que define os apoios e os locais de aplicação das cargas (aba <i>Basic</i> ). .....	50
Figura 6-9 - Parâmetros utilizados para o material que define os apoios e os locais de aplicação das cargas (aba <i>Miscellaneous</i> ). .....	50
Figura 6-10 – Consideração da perfeita aderência entre o concreto e o aço. ....	51
Figura 6-11 – Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo <i>software</i> ATENA (aba <i>General</i> ). .....	51
Figura 6-12 - Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo <i>software</i> ATENA (aba <i>Line Search</i> ). .....	52
Figura 6-13 - Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo <i>software</i> ATENA (aba <i>Conditional Break Criteria</i> ). .....	52
Figura 6-14 – Definição da quantidade de incremento de cargas a ser calculada na estrutura. ....	53
Figura 8-1 – Viga simplesmente apoiada representando o modelo 01 de análise. ....	56
Figura 8-2 - Análise linear elástica das tensões principais S-1 da viga simplesmente apoiada. ....	57
Figura 8-3 – Análise linear elástica das tensões principais S-2 da viga simplesmente apoiada. ....	57
Figura 8-4 – Modelo de treliça isostática para representar o modelo de biela e tirante a ser utilizado para a análise da viga simplesmente apoiada referente ao Modelo 01. ....	58
Figura 8-5 – Armaduras dimensionadas para a viga do Modelo 01. ....	60
Figura 8-6 – Viga do Modelo 01 dimensionada de acordo com o método de bielas e tirantes. ....	61
Figura 8-7 – Tensões principais S1 e fissuras na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado. ....	62
Figura 8-8 - Tensões principais S2 e fissuras na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado. ....	62

Figura 8-9 – Tensores de tensões principais que ocorrem na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado. ....	63
Figura 8-10 – Tensões nas armaduras utilizadas na viga provenientes do dimensionamento pelo método de bielas e tirantes. ....	63
Figura 8-11 – Configuração geométrica do Modelo 02. ....	65
Figura 8-12 - Mapa de tensões principais S1 (MPa) na parede com abertura. ....	66
Figura 8-13 - Mapa de tensões principais S2 (MPa) na parede com abertura. ....	66
Figura 8-14 – Modelo de bielas e tirantes utilizado para o projeto da parede com abertura. ....	67
Figura 8-15 – Forças axiais nas barras da treliça que representa o modelo de bielas e tirantes para a parede com abertura. ....	68
Figura 8-16 – Bielas e armaduras referentes ao projeto do Modelo 02. ....	69
Figura 8-17 - Modelagem no ATENA das armaduras decorrentes da 1ª configuração da parede. ....	72
Figura 8-18 – Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 420 kN. ....	73
Figura 8-19 – Tensões principais máximas no concreto e barras da armadura para o carregamento de 84 kN. ....	74
Figura 8-20 – Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 210 kN. ....	75
Figura 8-21 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 315 kN. ....	75
Figura 8-22 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 420 kN. ....	76
Figura 8-23 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 231 kN. ....	77
Figura 8-24 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 252 kN. ....	78
Figura 8-25 – Modelo 03, referente ao consolo curto. ....	79
Figura 8-26 - Tensões principais máximas que ocorrem na estrutura na análise linear elástica. ....	80
Figura 8-27 - Tensões principais mínimas que ocorrem na estrutura na análise linear elástica. ....	80
Figura 8-28 – Modelo de bielas e tirantes para o consolo curto. ....	81

Figura 8-29 – Detalhe das componentes do triângulo hidrostático formado.....	82
Figura 8-30 – Parte direita do triângulo hidrostático.....	83
Figura 8-31 – Parte direita do triângulo hidrostático com os valores de $z$ e $L$ calculados. .....	86
Figura 8-32 - Parte esquerda do triângulo hidrostático. ....	87
Figura 8-33 – Configuração das bielas, das forças resultantes e das barras de aço para o consolo curto analisado. ....	90
Figura 8-34 – Armaduras dimensionadas para o consolo curto, face inferior do pilar engastada e incremento de carga. ....	92
Figura 8-35 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 672 kN.....	93
Figura 8-36 - Tensões principais máximas no concreto e barras da armadura para o carregamento de 201,6 kN, referente ao 6º incremento de carga.....	94
Figura 8-37 - Configuração de tensões principais máximas no consolo curto gerada pela Atena para o carregamento total de 672 kN. ....	95
Figura 8-38 – Modelo 04, referente à viga biapoiada com redução da altura nos apoios. .....	96
Figura 8-39 – Tensões principais máximas (S1) que atuam na viga do Modelo 04.....	97
Figura 8-40 - Tensões principais mínimas (S2) que atuam na viga do Modelo 04.....	97
Figura 8-41 – Modelo de bielas e tirantes para a viga bi-apoiada com redução de altura nos apoios. ....	97
Figura 8-42 – Alterações realizadas na viga para tornar o problema mais próximo da realidade.....	98
Figura 8-43 – Dimensionamento das armaduras para o Modelo 04.....	98
Figura 8-44 – Viga com armadura de costura acrescentada nas regiões dos apoios. ...	101
Figura 8-45 – Viga do modelo 04 com todas as armaduras dimensionadas.....	102
Figura 8-46 - Tensões principais máximas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 280 kN. .....	103
Figura 8-47 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 280 kN. .....	103
Figura 8-48 – Dimensões do bloco de duas estacas referente ao Modelo 05.....	104
Figura 8-49 – Tensões principais elásticas máximas para o Modelo 05. ....	105

Figura 8-50 - Tensões principais elásticas mínimas para o Modelo 05.....	105
Figura 8-51 – Modelo de bielas e tirantes para o bloco de duas estacas submetido a um carregamento centrado.....	106
Figura 8-52 – Forças axiais atuantes nas barras do modelo de bielas e tirantes.....	106
Figura 8-53 – Bielas de concreto e armaduras dimensionadas para o bloco de 2 estacas. .....	109
Figura 8-54 – Tensões principais máximas no concreto e abertura de fissuras para o carregamento de 1200 kN.....	110
Figura 8-55 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura de fissuras e tensões principais nas barras para o carregamento de 1200 kN.....	111
Figura 8-56 – Modelo 06, referente à viga com abertura próxima ao apoio. ....	112
Figura 8-57 – Treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes para a viga do Modelo 06 (cotas em cm).....	113
Figura 8-58 – Forças normais nas barras da treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes. ....	113
Figura 8-59 – Melhor visualização das forças nodais na região da treliça acima da abertura. ....	113
Figura 8-60 – Largura das bielas e nós onde confluem as barras da treliça.....	114
Figura 8-61 – Largura das bielas e nós onde confluem as barras da treliça na região acima da abertura da viga.....	114
Figura 8-62 – Viga do Modelo 06 dimensionada.....	118
Figura 8-63 – Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento total aplicado na viga.....	118
Figura 8-64 – Tensões principais mínimas no concreto e fissuras para o carregamento total aplicado na viga.....	119
Figura 8-65 – Tensões principais nas barras da armadura presente na viga.....	119
Figura 8-66 – Abertura de fissuras na viga do Modelo 06 sem majoração das cargas. ....	120
Figura 8-67 – Evolução das tensões principais máximas no concreto. ....	121
Figura 8-68 – Metade de parede submetida a carga concentrada.....	122
Figura 8-69 – Tensões principais elásticas mínimas na parede quando esta é submetida aos carregamentos concentrados de 680 kN.....	123
Figura 8-70 - Tensões principais elásticas máximas na parede quando esta é submetida aos carregamentos concentrados de 680 kN.....	123

Figura 8-71 – Tensões principais mínimas para metade da parede modelada no ATENA considerando a fissuração do concreto para o carregamento de 680 kN.....	124
Figura 8-72 - Tensões principais máximas para metade da parede modelada no ATENA considerando a fissuração do concreto para o carregamento de 680 kN.....	125
Figura 8-73 – Considerações para cálculo da armadura de nó de pórtico submetido a um momento fletor negativo. Fonte: SANTOS (2020) .....	126
Figura 8-74 – Tensões principais mínimas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m. ....	127
Figura 8-75 - Tensões principais máximas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m. ....	127
Figura 8-76 – Ancoragem da armadura da viga no pilar. ....	128
Figura 8-77 – Tensões principais mínimas na estrutura para o momento fletor de 60 kN.m. ....	129
Figura 8-78 - Tensões principais máximas na estrutura para o momento fletor de 60 kN.m. ....	130
Figura 8-79 – Considerações para o cálculo da armadura do nó de pórtico submetido a um momento fletor positivo. Fonte: SANTOS (2020). ....	131
Figura 8-80 – Tensões principais mínimas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m. ....	131
Figura 8-81 - Tensões principais máximas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m. ....	132
Figura 8-82 – Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto para o nó de pórtico submetido ao momento fletor positivo de 60 kN.m. ....	133
Figura 8-83 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto para o nó de pórtico submetido ao momento fletor positivo de 60 kN.m. ....	134
Figura 8-84 – Viga bi apoiada com alturas diferentes e suas armaduras. Fonte: SANTOS (2020). ....	134
Figura 8-85 – Tensões principais elásticas mínimas na viga bi apoiada com alturas diferentes. ....	135
Figura 8-86 - Tensões principais elásticas máximas na viga bi apoiada com alturas diferentes. ....	135
Figura 8-87 – Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga. ....	136

Figura 8-88 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga. ....	136
Figura 8-89 – Geometria e armaduras da viga bi apoiada em degrau a ser analisada. Fonte: SANTOS (2020). ....	137
Figura 8-90 - Tensões principais elásticas mínimas na viga bi apoiada em degrau. ....	138
Figura 8-91 - Tensões principais elásticas máximas na viga bi apoiada em degrau. ...	138
Figura 8-92 - Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga. ....	139
Figura 8-93 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga. ....	139
Figura 8-94 – Viga em balanço. Fonte: SANTOS (2020). ....	140
Figura 8-95 – Tensões principais elásticas mínimas na viga em balanço. ....	140
Figura 8-96 - Tensões principais elásticas máximas na viga em balanço. ....	141
Figura 8-97 – Tensões mínimas na viga em balanço considerando a fissuração do concreto. ....	141
Figura 8-98 - Tensões máximas na viga em balanço considerando a fissuração do concreto. ....	142
Figura 8-99 – Tensores de tensões principais na parede. ....	143
Figura 8-100 – Tensores de tensões principais no nó de pórtico submetido a um momento fletor negativo. ....	143
Figura 8-101 - Tensores de tensões principais no nó de pórtico submetido a um momento fletor positivo. ....	144
Figura 8-102 - Tensores de tensões principais na viga bi apoiada com alturas diferentes. ....	144
Figura 8-103 - Tensores de tensões principais na viga bi apoiada em degrau. ....	145
Figura 8-104 - Tensores de tensões principais na viga em balanço. ....	146

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2-1 – Coeficientes $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ considerados no estado limite último. ....	5
Tabela 2-2 – Valores do coeficiente $\gamma_{f2}$ para análises nos estados limites últimos. ....	5
Tabela 2-3 – Valores do coeficiente adicional ( $\gamma_n$ ) para pilares e pilares parede. ....	6
Tabela 3-1 – Valores estabelecidos pela NBR 6118:2014 para os coeficientes de minoração da resistência do concreto e do aço para análises no estado limite último. ....	9

# 1. INTRODUÇÃO

---

Estruturas de concreto armado são utilizadas no mundo inteiro para compor a infraestrutura das cidades. Essas estruturas são formadas pela união entre o concreto e o aço, a fim de se produzir um elemento estrutural que resista aos diferentes esforços presentes através do trabalho em conjunto entre os dois materiais. Nessas estruturas, o concreto é utilizado basicamente para resistir aos esforços de compressão e fornecer proteção para o aço em relação à agressividade ambiental. O aço, por sua vez, apresenta basicamente a função de conferir ao elemento estrutural a parcela de resistência aos esforços de tração.

Os métodos de cálculo das estruturas de concreto armado podem ser classificados, basicamente, em dois grupos: os métodos clássicos, ou de tensões admissíveis, e os métodos de cálculo na ruptura (métodos de estados limites). Nos métodos clássicos determinam-se as solicitações correspondentes às cargas máximas de utilização e supondo um comportamento completamente elástico dos materiais, calculam-se as tensões máximas correspondentes a essas solicitações. As tensões máximas ficam limitadas a frações da resistência dos materiais, denominadas tensões admissíveis. Já nos métodos dos estados limites, a segurança é garantida de forma que as solicitações correspondentes à cargas majoradas sejam inferiores às solicitações últimas, sendo estas as que levariam a estrutura à ruptura (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2019).

O procedimento com tensões admissível seria válido se em todos os tipos de solicitação e de estruturas a tensão aumentasse linearmente com a carga até a ruptura. Entretanto, este não é o caso das estruturas de concreto armado (LEONHARDT e MONNING, 2008). Para solucionar esta questão, a norma brasileira que rege o projeto de estruturas de concreto (NBR 6118:2014) e diversas outras normas no mundo, baseiam seu modelo de dimensionamento no método dos estados limites, o qual será detalhado posteriormente nesse texto.

O presente trabalho tem o objetivo de analisar diversos exemplos de estruturas especiais de concreto armado, como vigas com aberturas, vigas-parede, consolos curtos, entre outras, a fim de verificar se o dimensionamento desses elementos deve ser alterado ao se considerar uma análise não linear do concreto. Para se calcular esses tipos de estruturas especiais pode ser utilizado o método de dimensionamento baseado no modelo de bielas e tirantes, o qual tem sua fundamentação no teorema do Limite Inferior da Plasticidade. A análise não linear desses elementos, neste trabalho, foi realizada a partir

do *software* ATENA (*Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*), o qual realiza a análise não linear das estruturas baseando-se no método de elementos finitos.

O modelo de bielas e tirantes se desenvolve considerando os caminhos de cargas que podem ocorrer em um determinado elemento estrutural baseando-se no campo de tensões presente neste elemento quando submetido a determinado carregamento. Entretanto, o campo de tensões é analisado considerando a estrutura íntegra, ou seja, sem considerar a fissuração do concreto. A justificativa para o tema deste trabalho está no fato de que muitas estruturas de concreto armado trabalham fissuradas durante sua vida útil, sendo importante verificar, portanto, se conforme o concreto fissura, os campos de tensões alteram-se a nível de ser necessária alguma modificação no dimensionamento das armaduras realizado sem considerar a fissuração. Desta maneira, o presente trabalho leva em consideração o comportamento real das estruturas de concreto armado para validar o dimensionamento pelo modelo de bielas e tirantes.

No presente capítulo apresenta-se uma introdução sobre o tema a ser abordado durante o texto da dissertação. No capítulo 2 é discutido o método dos estados limites, utilizado no dimensionamento das estruturas de concreto armado. No capítulo 3 são mostrados os diferentes mecanismos resistentes considerados para o dimensionamento de um elemento de concreto armado submetido a diferentes tipos de solicitações. O capítulo 4 aborda o modelo de bielas e tirantes, o qual é utilizado para o dimensionamento de peças especiais de concreto armado, quando os modelos usuais de dimensionamento não são capazes de fornecer um bom resultado. No capítulo 6 é apresentado o Teorema do Limite Inferior da Plasticidade, no qual o modelo de bielas e tirantes é fundamentado. No capítulo 7 são apresentados o *software* ATENA e os parâmetros utilizados pelo programa para realizar a análise não linear das estruturas de concreto. No capítulo 8 é descrita a metodologia a ser utilizada no desenvolvimento dos exemplos presentes no trabalho. No capítulo 9 são realizadas análises não lineares para diversas estruturas dimensionadas pelo método de bielas e tirantes. No capítulo 10 são discutidas as conclusões obtidas durante o desenvolvimento do trabalho.

## 2. MÉTODO DOS ESTADOS LIMITES

---

Segundo a NBR 6118:2014, os estados limites que devem ser considerados no dimensionamento das estruturas de concreto armado são os estados limites últimos e os estados limites de serviço. O estado limite último é aquele relacionado ao colapso ou qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação, no todo ou em parte do uso da estrutura, enquanto os estados limites de serviço são os relacionados à durabilidade das estruturas, à aparência, ao conforto do usuário e à boa utilização funcional das mesmas. A NBR 6118:2014 indica que a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada em relação aos seguintes estados-limites últimos:

- a) Estado-limite último da perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- b) estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais e tangenciais, admitindo-se a redistribuição de esforços internos, desde que seja respeitada a capacidade de adaptação plástica definida na mesma norma e admitindo-se, em geral, as verificações separadas das solicitações normais e tangenciais;
- c) estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos de segunda ordem;
- d) estado-limite último provocado por solicitações dinâmicas;
- e) estado-limite último de colapso progressivo;
- f) estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando exposição ao fogo, conforme a ABNT NBR 15200;
- g) estado-limite último de esgotamento da capacidade resistente da estrutura, considerando ações sísmicas, de acordo com a ABNT NBR 15421;
- h) outros estados-limites últimos que eventualmente possam ocorrer em casos especiais.

Já para os estados limites de serviço, a NBR 6118:2014 define que a segurança da estrutura de concreto armado pode exigir a verificação dos seguintes estados limites:

- a) Estado limite de formação de fissuras (ELS-F): estado em que se inicia a formação de fissuras. Admite-se que este estado-limite é atingido quando a tensão de tração

máxima na seção transversal for igual à resistência à tração do concreto (como definido no item 13.4.2 desta norma);

- b) Estado limite de abertura das fissuras (ELS-W): estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados na seção 13.4.2 desta norma;
- c) Estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF): estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da estrutura, definida na seção 13.3 desta norma;
- d) Estado limite de vibrações excessivas (ELS-VE): estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção.

Uma vez definidos os estados limites a serem verificados no dimensionamento de uma estrutura de concreto armado, avaliam-se as ações que atuam na estrutura, classificando-as em permanentes, variáveis e excepcionais. Para cada um dos estados limites a serem verificados, as ações que atuam na estrutura serão combinadas de modo a considerar a influência de sua atuação simultânea no elemento estrutural. Nessas combinações de carga, cada ação recebe um coeficiente de ponderação multiplicador de acordo com sua classificação, o tipo de combinação e o estado limite que está sendo verificado.

A NBR 6118:2014 classifica em sua seção 11.8.2.4 as combinações últimas em normais, especiais (ou de construção) e excepcionais. Esta mesma norma também classifica em sua seção 11.8.3.2, as combinações de serviço em quase permanentes, frequentes e raras. A NBR 6118:2014 estabelece que, nas combinações últimas, as ações devem ser majoradas por um coeficiente  $\gamma_f$ , o qual é definido por:

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad (2.1)$$

Para os estados limites últimos, essa norma indica que os valores básicos para os coeficientes de ponderação  $\gamma_{f1}$ ,  $\gamma_{f3}$  e  $\gamma_{f2}$  são aqueles mostrados nas Tabela 2-1 e 2-2 deste trabalho, transcritas da NBR 6118:2014.

Tabela 2-1 – Coeficientes  $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$  considerados no estado limite último.

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 <sup>a</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

onde  
*D* é desfavorável, *F* é favorável, *G* representa as cargas variáveis em geral e *T* é a temperatura.

<sup>a</sup> Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Tabela 2-2 – Valores do coeficiente  $\gamma_{f2}$  para análises nos estados limites últimos.

Ações		$\gamma_{f2}$		
		$\psi_0$	$\psi_1^a$	$\psi_2$
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>b</sup>	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>c</sup>	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

<sup>a</sup> Para os valores de  $\psi_1$  relativos às pontes e principalmente para os problemas de fadiga  
<sup>b</sup> Edifícios residenciais.  
<sup>c</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

A norma ainda estabelece que para elementos estruturais esbeltos críticos para a segurança de estruturas, como pilares e pilares paredes com espessura inferior a 19 cm e lajes em balanço com espessura inferior a 19 cm, os esforços solicitantes de cálculo

devam ser multiplicados pelo coeficiente de ajustamento  $\gamma_n$ , o qual é definido de acordo com a Tabela 2-3.

Tabela 2-3 – Valores do coeficiente adicional ( $\gamma_n$ ) para pilares e pilares parede.

<b>b</b> cm	$\geq 19$	18	17	16	15	14
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
<p>onde</p> <p><math>\gamma_n = 1,95 - 0,05 b</math>;</p> <p><i>b</i> é a menor dimensão da seção transversal, expressa em centímetros (cm).</p> <p><b>NOTA</b> O coeficiente <math>\gamma_n</math> deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.</p>						

Para a análise nos estados limites de serviço, a NBR 6118:2014 define que em geral, o coeficiente de ponderação das ações é dado pela expressão:

$$\gamma_f = \gamma_{f2} \quad (2.2)$$

Onde:

$\gamma_{f2}$  tem valor variável de acordo com a verificação desejada (Tabela 2-2)

$\gamma_{f2} = 1$  para combinações raras;

$\gamma_{f2} = \psi_1$  para combinações frequentes;

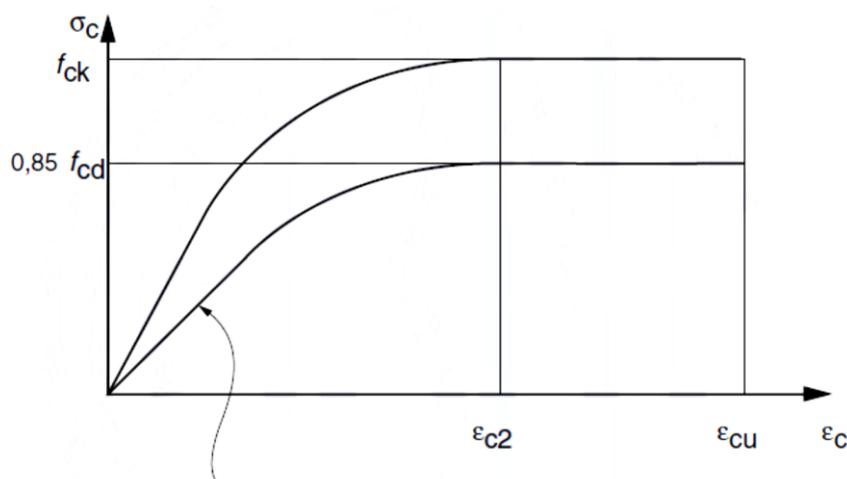
$\gamma_{f2} = \psi_2$  para combinações quase permanentes.

Após se obter o valor dos carregamentos a serem considerados no cálculo da estrutura (resultantes das combinações de carga) pode-se calcular as solicitações (momento fletor, momento de torção, esforço cortante e esforço normal) geradas na estrutura por esses carregamentos. O conceito do método dos estados limites consiste em considerar que as solicitações atuantes de cálculo sejam inferiores ou iguais aos esforços resistentes na estrutura. Esses esforços resistentes são avaliados pela atuação da armadura de aço atuando junto ao concreto nos elementos estruturais considerando um fator de minoração das resistências destes dois materiais.

### 3. MECANISMOS DE RESISTÊNCIA DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO NO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

---

Para se estabelecer os mecanismos de resistência considerados no cálculo das estruturas de concreto armado deve-se inicialmente definir os modelos constitutivos dos materiais que formam essas estruturas. Para análises no estado limite último, a NBR 6118:2014 estabelece para o concreto, o diagrama de tensão - deformação idealizado mostrado na Figura 3-1.



$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:  $n=2$   
Para  $f_{ck} > 50$  MPa:  
 $n = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck})/100]^4$

Figura 3-1 – Diagrama de tensão deformação idealizado para o concreto.

Sendo:

$f_{ck}$  a resistência característica à compressão do concreto;

$f_{cd}$  a resistência de cálculo à compressão do concreto (resistência característica minorada pelo coeficiente de ponderação). O fator multiplicador de 0,85 é considerado para inserir o efeito Rüschi na análise. Esse efeito consiste em que a resistência limite do concreto quando submetido ao ensaio rápido de compressão é superior ao valor dessa resistência quando o concreto é submetido a carregamentos de longa duração.

Segundo esta norma, os valores a serem adotados para os parâmetros  $\varepsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\varepsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) para concretos com  $f_{ck} \leq 50MPa$  é  $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$  e  $\varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$ .

Para o aço, a NBR 6118:2014 estabelece que na análise dos estados limites último e de serviço pode ser utilizado o diagrama de tensão x deformação simplificado apresentado na Figura 3-2.

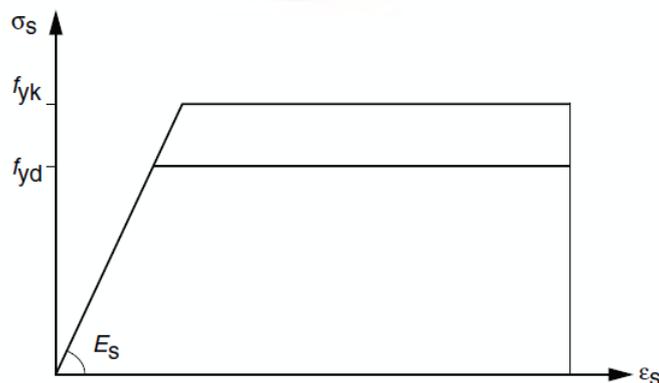


Figura 3-2 – Diagrama de tensão x deformação simplificado estabelecido na NBR 6118:2014 para o aço em análises nos estados limites último e de serviço. 6118:2014.

Os parâmetros indicados na Figura 3-2 são dados de acordo com a NBR 6118:2014, sendo:

$f_{yk}$  a resistência característica do aço;

$f_{yd}$  a resistência de projeto utilizada para o aço;

$E_s$  o módulo de elasticidade do aço.

A NBR 6118:2014 estabelece coeficientes de minoração das resistências dos materiais para análises no estado limite último de acordo com o tipo de combinação de carga a ser analisada. Estes coeficientes podem ser observados na Tabela 3-1.

Tabela 3-1 – Valores estabelecidos pela NBR 6118:2014 para os coeficientes de minoração da resistência do concreto e do aço para análises no estado limite último.

Combinações	Concreto	Aço
	$\gamma_c$	$\gamma_s$
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

Para as análises nos estados limites de serviço, a norma indica que não há necessidade de minoração da resistência dos materiais, portanto, nestas análises tais resistências são multiplicadas por 1,0. Após se estabelecerem os modelos constitutivos a serem considerados para os materiais que formam o concreto armado, é importante definir os domínios de deformação na ruptura em que estruturas compostas por este material podem ser dimensionadas para solicitações normais à seção. Esses domínios representam as diferentes possibilidades de deformada da seção transversal da peça quando esta atinge a ruptura. Para uma determinada armadura e uma classe de concreto, cada uma destas deformadas representa uma combinação de esforços normais resistentes, a qual, se for superada, leva o elemento estrutural ao rompimento. A Figura 3-3 apresenta os domínios de ruptura dos elementos de concreto armado para concretos com resistência à compressão  $f_{ck} \leq 50 \text{MPa}$ .

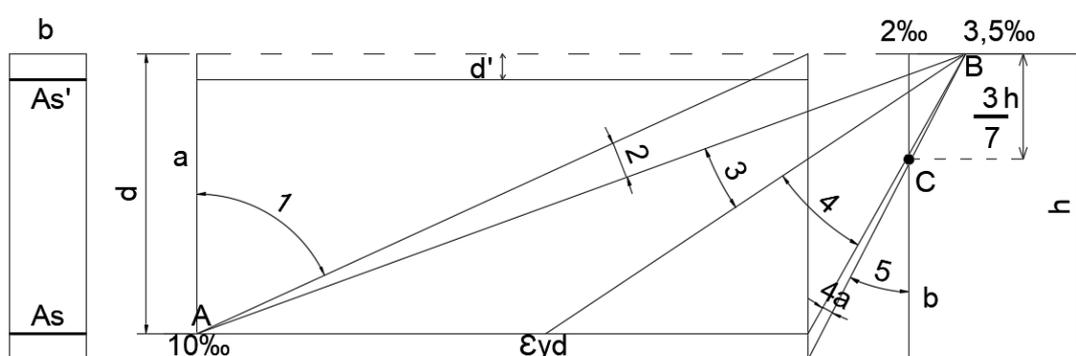


Figura 3-3 – Domínios de ruptura de elementos de concreto armado para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{MPa}$ .

Para compreensão dos domínios de deformação é considerado que uma estrutura de concreto armado pode atingir o rompimento caso o concreto alcance a deformação de encurtamento de 3,5‰ ou o aço alcance a deformação de alongamento de 10‰, nos domínios 1 a 4. Segundo BUCHAIM (2016), os domínios de deformação, do 1 ao 5, apresentados na Figura 3-3 abrangem todas as modalidades de solicitações normais. A posição  $x$  da linha neutra (LN) é convencionada positiva a partir do topo da seção para baixo, e negativa para cima. São ainda definidas as retas de deformação que definem os domínios da seguinte maneira:

- No domínio 1, as retas de deformação passam pelo ponto A, a seção está inteiramente tracionada e o concreto não participa da resistência.
- No domínio 2, as retas de deformação continuam a passar pelo ponto A, mas a LN situa-se na seção. O aço mantém seu alongamento limite e o concreto apenas atinge o seu encurtamento limite na transição para o domínio 3. A flexão pode ser simples ou composta.
- No domínio 3, a deformação limite é a do concreto, e todas as retas de deformação passam pelo ponto B. A armadura tracionada está em escoamento e a ruptura pode ainda ser considerada como dúctil, como já acontecia nos domínios 1 e 2, desde que sejam atendidas condições impostas à profundidade relativa da linha neutra, conforme seja o tipo de análise considerada e a peça para a qual se exige capacidade de redistribuir solicitações (lajes, vigas, eventualmente pilares).
- No domínio 4, já não há escoamento da armadura tracionada, caracterizando as peças para as quais não é preciso atribuir ductilidade, como é o caso dos pilares das edificações comuns. No domínio 4, tem-se que  $d \leq x \leq h$ .
- No domínio 5, altera-se o ponto de referência das deformações para o ponto C, possibilitando uma transição contínua entre a flexão composta e a compressão pura. Nesse ponto, a limitação se dá pela deformação do início do patamar de escoamento do concreto, conforme a lei constitutiva adotada. Também aqui, como no domínio 4, estão os pilares com predominância de força de compressão.

### 3.1. Mecanismo de resistência da seção transversal do elemento de concreto armado submetido a esforço cortante e momento fletor

O cálculo da armadura transversal para resistir aos esforços cortantes depende da armadura longitudinal ser previamente conhecida, ou seja, inicialmente são calculadas as armaduras decorrentes apenas dos esforços normais atuantes na viga e posteriormente realiza-se o cálculo da armadura transversal. Na etapa de detalhamento, essas duas armaduras são compatibilizadas para se levar em conta a atuação conjunta do momento fletor e da força cortante por meio de prescrições da Norma (CLÍMACO, 2016).

Por volta de 1900, Ritter e Morsch propuseram, para a determinação da armadura de cisalhamento necessária ao equilíbrio de uma viga de concreto armado, uma teoria em que o mecanismo resistente da viga no estágio II (viga fissurada) pudesse ser associado ao de uma treliça em que as armaduras e o concreto equilibrassem conjuntamente o esforço cortante (CARVALHO e FIGUEREDO FILHO, 2014). A Figura 3-4 apresenta o estado de fissuração de uma viga simplesmente apoiada sob flexão simples na iminência da ruptura.

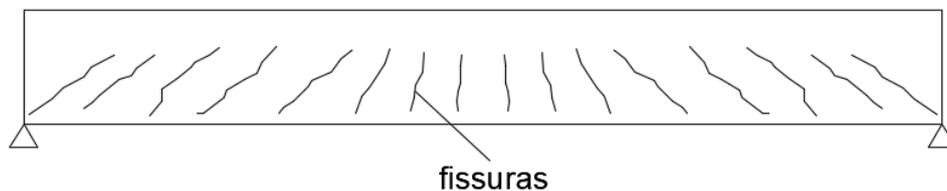


Figura 3-4 - Viga simplesmente apoiada em flexão simples na iminência da ruptura.

CARVALHO e FIGUEREDO FILHO (2014) indicam ainda que a treliça formadora do mecanismo resistente para a viga simplesmente apoiada submetida a esforço cortante e momento fletor positivo é composta por:

- Um banzo superior comprimido formado pela região de concreto comprimida;
- Um banzo inferior tracionado, formado pela armadura longitudinal de tração;
- Montantes ou diagonais tracionadas, formadas pelos estribos que cruzam uma determinada fissura. Essas barras podem ter inclinação ( $\alpha$ ) em relação ao eixo longitudinal da viga, entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ ;

- Diagonais comprimidas, formadas pelas bielas de compressão (concreto íntegro entre as fissuras) com inclinação de  $30^\circ$  a  $45^\circ$  em relação ao eixo da peça.

A analogia de treliça como mecanismo resistente que ocorre em uma viga para resistir ao esforço cortante pode se dar usualmente através de uma treliça isostática. Na treliça isostática, as bielas e os tirantes são dispostos de forma que os eixos dos elementos da treliça (correspondentes aos centros de gravidade das armaduras e das resultantes das tensões de compressão), as resultantes das ações externas e das reações de apoio converjam nos nós dos modelos (SANTOS, 2020). Esse método é denominado modelo de bielas e tirantes e está detalhado no capítulo 4 deste trabalho.

No presente trabalho foi considerado, para efeito de cálculo, apenas a armadura transversal disposta em ângulo de  $90^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga, pois esse tipo de armadura é o mais prático de ser implementado.

### 3.1.1. Dimensionamento das armaduras de uma viga simplesmente apoiada pelo modelo de bielas e tirantes representado por uma treliça discreta

Inicialmente, para se entender a utilização do modelo de treliça discreta para representar uma viga simplesmente apoiada submetida a esforços cortantes e momentos fletores, pode-se observar a Figura 3-5.

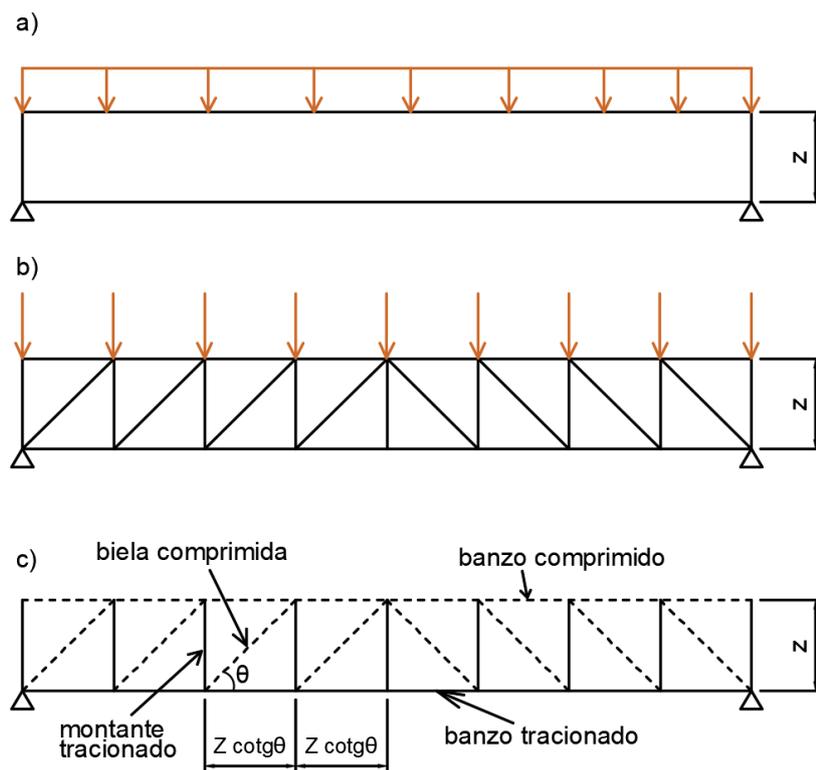


Figura 3-5– a) Viga simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído, b) carregamento uniforme convertido em cargas concentradas aplicadas nos nós da treliça isostática que representa a viga, c) componentes da treliça isostática considerando armadura transversal vertical.

O procedimento para se obter a treliça isostática que represente o elemento estrutural e seu sistema de carregamentos está detalhado no capítulo 4 deste trabalho.

Uma vez que a treliça discreta utilizada para representar a viga tenha sido formada, realizam-se os cálculos para se obter os esforços normais nos elementos desta treliça. A partir destes esforços pode-se dimensionar as armaduras da viga e verificar as tensões de compressão no concreto, cujos valores limites para estruturas dimensionadas pelo método de bielas e tirantes são especificados na NBR 6118:2014 em seu item 22.1.

Para a compreensão do dimensionamento da viga mostrada na Figura 3-5, pode-se observar o trecho da treliça representado por uma biela de compressão desde o nó onde ela encontra o banzo inferior tracionado, até o nó onde ela encontra o banzo superior comprimido. O trecho mencionado é mostrado na Figura 3-6.

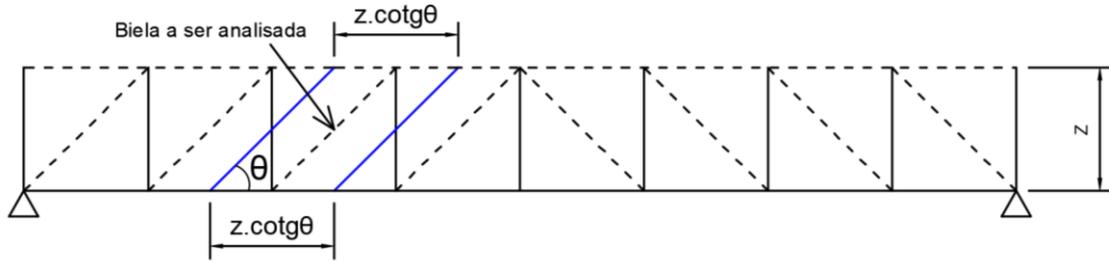


Figura 3-6 – Biela comprimida a ser analisada.

Ressaltando que as bielas e os tirantes devam ser dispostos de forma que os eixos dos elementos da treliça converjam nos nós do modelo, as linhas azuis paralelas ao eixo das bielas indicam sua largura e o comprimento nos banzos comprimido e tracionado nos quais onde essa biela está presente. A Figura 3-7 apresenta o detalhe do trecho da treliça a ser analisado para se estabelecer o procedimento de cálculo.

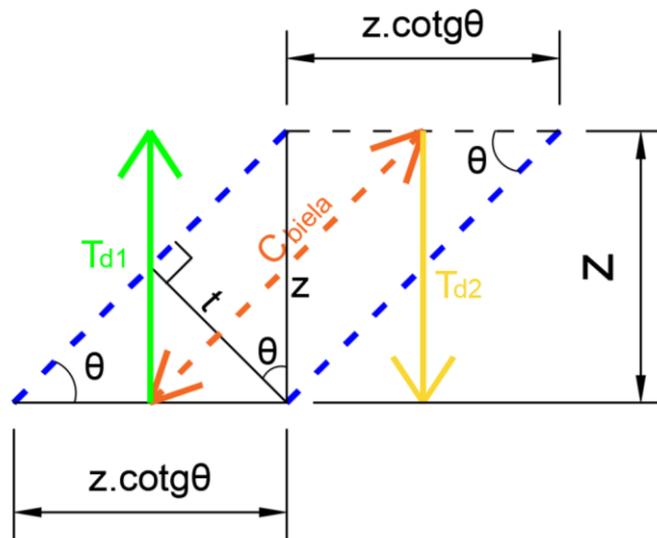


Figura 3-7 - Detalhe do trecho da treliça a ser analisado para estabelecer o procedimento de cálculo.

A tensão de compressão no concreto é verificada em relação aos valores limites especificados pela NBR 6118:2014 em seu item 22.1, para estruturas dimensionadas pelo modelo de bielas e tirantes, de acordo com:

$$\alpha_2 = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (3.1)$$

$f_{cd1}$  - Tensão resistente máxima no concreto, em verificações pelo método de bielas e tirantes, em regiões com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e em nós onde confluem somente bielas de compressão (nós CCC), sendo:

$$f_{cd1} = 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \text{ (bielas prismáticas, ou nós CCC)}$$

$f_{cd2}$  - Tensão resistente máxima no concreto, em verificações pelo método de bielas e tirantes, em regiões com tensões de tração transversal e em nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados (nós CTT ou TTT), sendo:

$$f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \text{ (bielas atravessadas ao menos um tirante, ou nós CTT ou TTT)}$$

$f_{cd3}$  - Tensão resistente máxima no concreto, em verificações pelo método de bielas e tirantes, em nós onde conflui um tirante tracionado (nós CCT), sendo:

$$f_{cd3} = 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \text{ (bielas atravessadas por tirante único ou nós CCT)}$$

A Figura 3-8 ilustra na treliça, os locais onde cada critério de limitação de tensões de compressão no concreto deva ser utilizado.

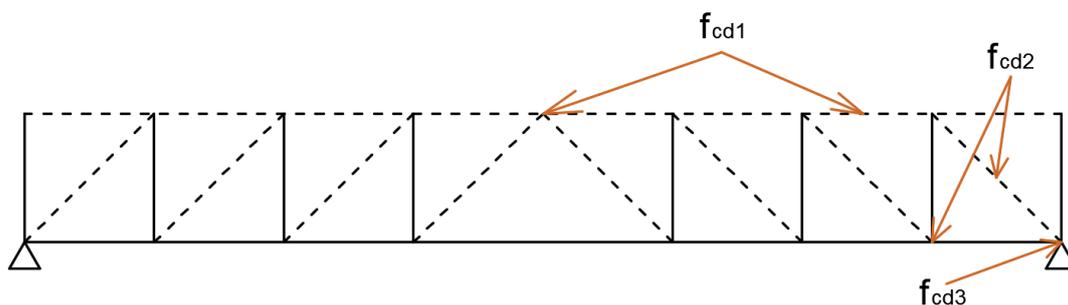


Figura 3-8 - Limites de tensões de compressão no concreto estabelecidos pela NBR 6118:2014 para verificação pelo método de bielas e tirantes.

A tensão na biela comprimida é dada pela força de compressão que atua na biela ( $C_{biela}$ ), dividida pela área  $b \cdot t$  de atuação desta força, sendo  $b$  a espessura da seção

transversal e  $t$  a largura da biela. Dessa forma, a tensão de compressão na biela  $\sigma_c$  é calculada de acordo com:

$$t = z \cdot \cos(\theta) \quad (3.2)$$

$$\sigma_c = \frac{C_{biela}}{b \cdot z \cdot \cos(\theta)} \leq f_{cd2} \quad (3.3)$$

Como pode ser observado na Figura 3-7, os nós de encontro da biela de compressão com o banzo tracionado e o banzo comprimido são equilibrados por forças de tração de cálculo representadas por tirantes verticais ( $T_{d1}$  e  $T_{d2}$ ). No entanto, é possível perceber que estes tirantes tracionados representam uma força de tração que está distribuída no comprimento  $z \cdot \cot g(\theta)$ , sendo este, o comprimento no qual a biela aplica forças nos banzos. Sendo assim, a força ( $F_s$ ) distribuída nos estribos é dada de acordo com:

$$F_s = \frac{T_d}{z \cdot \cot g(\theta)} \quad (3.4)$$

Logo:

$$F_{s1} = \frac{T_{d1}}{z \cdot \cot g(\theta)} \quad (3.5)$$

E

$$F_{s2} = \frac{T_{d2}}{z \cdot \cot g(\theta)} \quad (3.6)$$

A armadura transversal distribuída ( $A_{sw}$ ) é calculada através da divisão da força  $F_s$  pela tensão de cálculo do aço,  $f_{ywd}$ :

$$A_{sw} = \frac{F_s}{f_{ywd}} \quad (3.7)$$

$$A_{sw1} = \frac{T_{d1}}{z \cdot \cot g(\theta) \cdot f_{ywd}} \quad (3.8)$$

Ou

$$A_{sw2} = \frac{T_{d2}}{z \cdot \cotg(\theta) \cdot f_{ywd}} \quad (3.9)$$

A distribuição dos estribos dimensionados para esse trecho da treliça discreta pode ser observada na Figura 3-9.

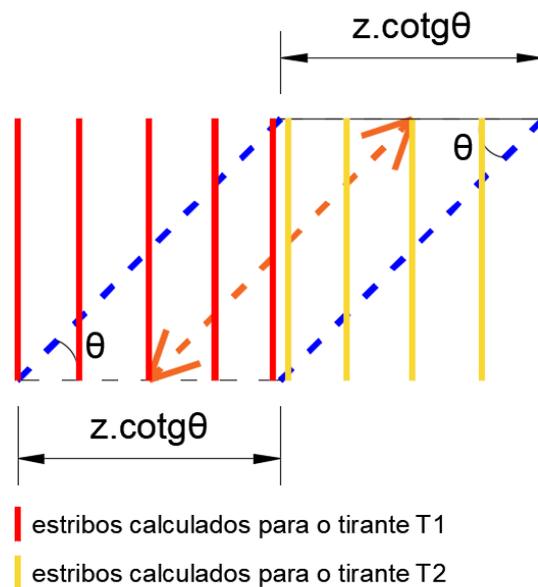


Figura 3-9 – Distribuição dos estribos verticais dimensionados para o trecho da treliça discreta analisado.

É possível observar na Figura 3-9 que para a força de tração dada em um tirante da treliça, a distribuição dos estribos se dá a partir deste tirante em um comprimento  $z \cdot \cotg(\theta)/2$  para a esquerda e em um comprimento igual para a direita. Para finalizar o dimensionamento das armaduras da viga pelo modelo de bielas e tirantes representado pela treliça discreta, realiza-se o cálculo da armadura de tração longitudinal ( $A_{sl}$ ) proveniente do banzo inferior tracionado. Essa armadura é calculada através da divisão entre a força de cálculo ( $T_d$ ) no tirante horizontal e a tensão ( $f_{yd}$ ) de cálculo do aço:

$$f_{yd} = \frac{500 \text{ MPa}}{1,15} = 434,78 \text{ MPa} \quad (3.10)$$

$$A_{sl} = \frac{T_d}{f_{yd}} \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Dimensionamento das armaduras de uma viga simplesmente apoiada pelo modelo usual de cálculo

No modelo usual de cálculo, as armaduras longitudinais são calculadas previamente às armaduras transversais por meio dos mecanismos resistentes que ocorrem nas vigas para suportar esforços normais e momentos fletores atuantes. O mecanismo resistente considerado na viga simplesmente apoiada submetida a esforço cortante e momento fletor é baseado no modelo de treliça contínua, o qual realiza a análise através dos cálculos para cada seção transversal existente na viga. A Figura 3-10 apresenta uma biela comprimida presente na treliça contínua e a seção transversal (S) da viga onde essa biela atua ao longo de toda a sua altura.

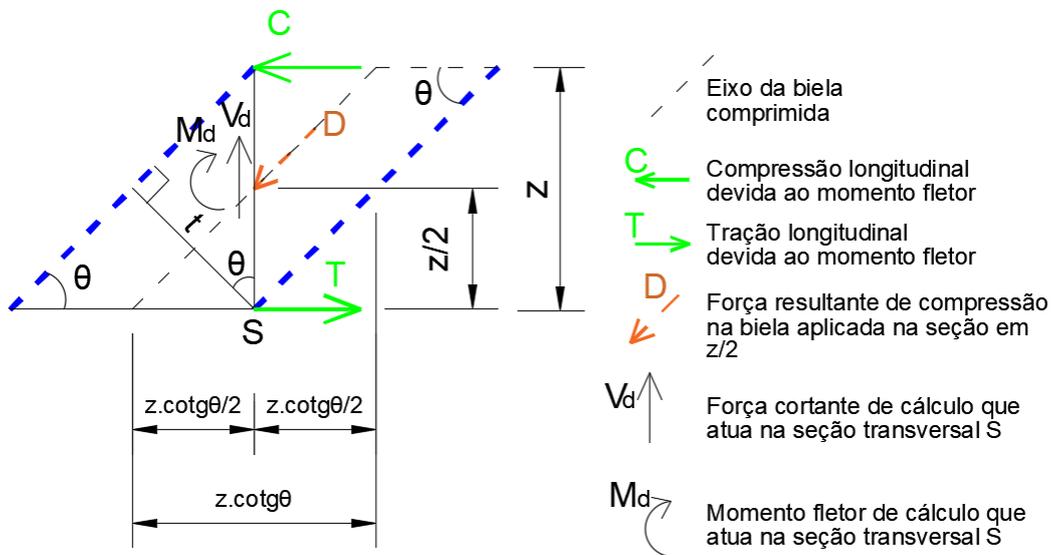


Figura 3-10 - Biela comprimida presente na treliça contínua e a seção transversal (S) da viga onde essa biela atua ao longo de toda a sua altura.

A partir da Figura 3-10 é possível estabelecer o procedimento para o cálculo da armadura transversal e também compatibilizar a atuação conjunta do momento fletor e do esforço cortante na seção. O processo de cálculo é o seguinte:

1º - A força (D) de compressão na biela possui uma componente na direção vertical e outra na direção horizontal. A componente vertical da força D equilibra o esforço cortante ( $V_d$ ) na seção, sendo assim:

$$\sum F_{vertical} = 0$$

$$V_d = D \cdot \text{sen}(\theta) \quad (3.12)$$

$$D = \frac{V_d}{\text{sen}(\theta)} \quad (3.13)$$

É preciso inicialmente verificar se a compressão na biela de concreto é inferior ao limite ( $f_{cd2}$ ) permitido pela NBR 6118:2014. A tensão atuante na biela é a força D dividida pela sua área de atuação, sendo esta igual à largura (t) da biela multiplicada pela espessura (b) da seção transversal. A largura (t) da biela é dada por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{t}{z \cdot \text{cotg}(\theta)} \quad (3.14)$$

$$t = \text{sen}(\theta) \cdot z \cdot \text{cotg}(\theta) = \text{sen}(\theta) \cdot z \cdot \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \quad (3.15)$$

$$t = z \cdot \cos(\theta) \quad (3.16)$$

Logo, a tensão ( $\sigma_c$ ) atuante nessa biela é calculada de acordo com:

$$\sigma_c = \frac{\frac{V_d}{\text{sen}(\theta)}}{b \cdot z \cdot \cos(\theta)} = \frac{V_d}{b \cdot z \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)} \leq f_{cd2} \quad (3.17)$$

É possível perceber que a tensão na biela está relacionada com o esforço cortante que ocorre na seção da viga e por isso, é possível calcular o valor de esforço cortante  $V_{Rd2}$ , que gera a tensão limite permitida pela norma. A NBR 6118:2014 dispõe de dois modelos de cálculo em relação ao dimensionamento de elementos de concreto armado

submetidos a esforço cortante. O esforço cortante que gera a tensão limite permitida na biela de compressão é calculado de maneira distinta para os dois modelos, sendo:

**Modelo de Cálculo I** – Considera as bielas de compressão inclinadas em  $45^\circ$  e o braço de alavanca  $z = 0,9 \cdot d$ .

$$\frac{V_d}{b \cdot z \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)} \leq f_{cd2} \quad (3.18)$$

$$V_d \leq V_{Rd2} \quad (3.19)$$

$$V_{Rd2} = b \cdot 0,9 \cdot d \cdot \text{sen}(45^\circ) \cdot \cos(45^\circ) \cdot 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad (3.20)$$

$$V_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \quad (3.21)$$

**Modelo de Cálculo II** – Considera as bielas de compressão inclinadas livremente de  $30^\circ$  a  $45^\circ$  e braço de alavanca  $z = 0,9 \cdot d$ .

$$\frac{V_d}{b \cdot z \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\theta)} \leq f_{cd2} \quad (3.22)$$

$$V_d \leq V_{Rd2} \quad (3.23)$$

$$V_{Rd2} = b \cdot 0,9 \cdot d \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \quad (3.24)$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad (3.25)$$

2° - Para o dimensionamento usual, a NBR 6118:2014 indica que uma parcela do esforço cortante que atua em uma seção transversal do elemento é absorvida por mecanismos complementares ao da treliça. Esses mecanismos complementares capazes de transferir força cortante, podem ser definidos basicamente por cinco formas principais. Essas cinco maneiras são a força cortante na região do concreto comprimido não

fissurado, o engrenamento dos agregados ou atrito das superfícies nas fissuras inclinadas, a ação de pino da armadura longitudinal, a ação de arco e a tensão de tração residual transversal existente nas fissuras inclinadas. A parcela que representa esses mecanismos complementares é denominada  $V_c$  e também é calculada de forma distinta para os dois modelos de cálculo.

### Modelo de Cálculo I:

$V_c = 0$  em elementos com a linha neutra fora da seção (Domínio 1);

$V_c = V_{c0}$  em elementos submetidos à flexão simples ou flexo-tração com a linha neutra cortando a seção (Domínios 2,3 e 4);

$V_c = V_{c0} \cdot \left(1 + \frac{M_0}{M_{sd,máx}}\right) \leq 2 \cdot V_{c0}$  em elementos submetidos à flexo-compressão.

Sendo:

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b \cdot d; \quad (3.26)$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \quad (3.27)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ctm} = 0,7 \times 0,3 \times f_{ck}^{2/3} \quad (3.28)$$

$M_0$  é o momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção tracionada por  $M_{sd,máx}$ , correspondente a forças normais concomitantes com  $V_d$ , sendo a tensão calculada com  $\gamma_f = 1$ . Dessa forma, para pilares retangulares:

$$M_0 = \frac{N_k \cdot h}{6} \quad (3.29)$$

**Modelo de Cálculo II** - Considera as bielas de compressão inclinadas livremente de 30° a 45° e braço de alavanca  $z = 0,9 \cdot d$ .

$V_c = 0$  em elementos submetidos à tração, com a linha neutra fora da seção;

$V_c = V_{c1}$  em elementos submetidos à flexão e flexo-tração, com linha neutra na seção;

$$V_c = V_{c1} \cdot \left(1 + \frac{M_0}{M_{sd,max}}\right) \leq 2 \cdot V_{c0} \text{ em elementos submetidos à flexo-compressão.}$$

Sendo:

$$V_{c1} = V_{c0} \text{ se } V_d \leq V_{c0}$$

$$V_{c1} = 0 \text{ se } V_d = V_{rd2}$$

Para o caso em que  $V_d$  é um valor intermediário entre  $V_{c0}$  e  $V_{rd2}$ , o valor de  $V_{c1}$  deve ser o menor dentre:

$$V_{c1} = \text{mínimo dentre} \left[ \begin{array}{l} V_{c0} \\ \frac{V_{c0} \cdot (V_{rd2} - V_d)}{(V_{rd2} - V_{c0})} \end{array} \right]$$

3° - Uma vez que tenha sido calculada a parcela de esforço cortante absorvida por mecanismos complementares, é possível calcular a parcela de esforço cortante ( $V_{sw}$ ) que deve ser absorvida pela armadura transversal ( $A_{sw}$ ). Essa parcela é calculada de acordo com:

$$V_{sw} = V_d - V_c \quad (3.30)$$

O equilíbrio do esforço cortante  $V_{sw}$  se dá através da componente vertical da força D, a qual gera uma armadura transversal distribuída em uma região da viga. Observando-se a Figura 3-10, é possível perceber que a biela comprimida de concreto atua ao longo de todo o comprimento do braço de alavanca z da seção transversal S, por isso, a força de compressão D que atua nessa biela pode ser considerada como incidente à meia altura desse braço de alavanca. Desta maneira, a componente vertical da força D pode ser distribuída ao longo de todo o comprimento horizontal correspondente ao eixo da biela de compressão, ou seja:

$$F_{vertical\ distribuída} = \frac{V_{sw}}{\frac{z \cdot \cot g(\theta)}{2} + \frac{z \cdot \cot g(\theta)}{2}} \quad (41)$$

$$F_{vertical\ distribuída} = \frac{V_{sw}}{z \cdot \cot g(\theta)} \quad (3.32)$$

É interessante notar que, a resultante da força vertical distribuída se dá na seção transversal S, ou seja, dessa forma não é alterado o equilíbrio de momentos fletores nessa seção. A partir da força vertical distribuída é possível se calcular a armadura transversal vertical distribuída ( $A_{sw}/s$ ) a ser utilizada para resistir ao esforço cortante  $V_{sw}$ . Considerando que tanto no Modelo de Cálculo I quanto no Modelo de Cálculo II, a NBR 6118:2014 adota  $z = 0,9 \cdot d$ , o cálculo de  $A_{sw}/s$  se dá de acordo com:

#### Modelo de Cálculo I

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}} \quad (3.33)$$

#### Modelo de Cálculo II

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sw}}{0,9 \cdot d \cdot \cot g(\theta) \cdot f_{ywd}} \quad (3.34)$$

4° - A análise da Figura 3-10 permite ainda visualizar que a força D de compressão na biela apresenta também uma componente horizontal, denominada neste trabalho como H. As forças longitudinais de compressão (C) e de tração (T) representam o binário de forças previamente calculado para resistir ao momento fletor atuante na seção S. Conforme a força H é considerada, os valores de C e T precisam alterar-se para que o equilíbrio continue ocorrendo nessa seção. Para garantir esse equilíbrio, é necessário que surja na seção uma força igual a H, com mesma direção e sentido oposto, sendo aplicada de forma a não alterar o momento resistente que existe na seção. Sendo  $H = D \cdot \cos(\theta)$ , a Figura 3-11 apresenta o procedimento que leva ao cálculo das forças C e T corrigidas.

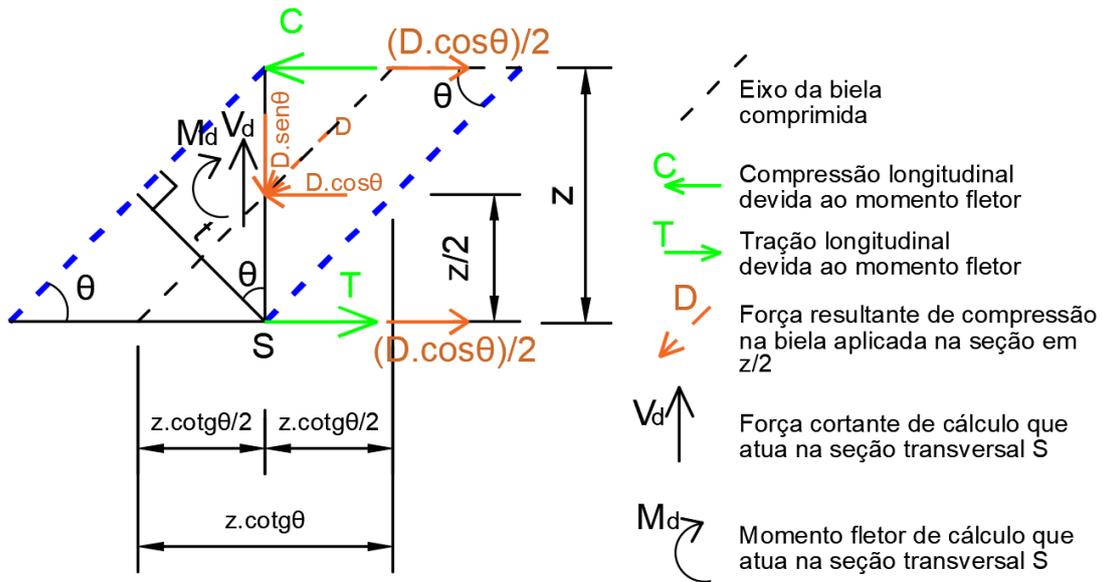


Figura 3-11 – Procedimento para o cálculo das forças C e T a serem corrigidas visando garantir o equilíbrio da seção.

Observando a Figura 3-11 e ressaltando que  $D = V/\text{sen}(\theta)$ , tem-se que:

$$C_{\text{corrigida}} = C - \frac{V}{\text{sen}(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{2} \quad (3.35)$$

Mas C é proveniente do binário calculado para equilibrar  $M_d$ , logo:

$$C_{\text{corrigida}} = \frac{M}{z} - \frac{V \cdot \text{cotg}(\theta)}{2} \quad (3.36)$$

De maneira análoga:

$$T_{\text{corrigida}} = \frac{M}{z} + \frac{V \cdot \text{cotg}(\theta)}{2} \quad (3.37)$$

Resta ainda verificar o equilíbrio de momentos fletores na seção.

$$\sum M = 0$$

$$\left(\frac{M_d}{z} - \frac{V \cdot \cotg(\theta)}{2}\right) \cdot z + D \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{z}{2} - M_d = 0 \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{M_d}{z} - \frac{V \cdot \cotg(\theta)}{2}\right) \cdot z + V \cdot \cotg(\theta) \cdot \frac{z}{2} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{M_d \cdot z}{z} - \frac{V \cdot \cotg(\theta) \cdot z}{2} + \frac{V \cdot \cotg(\theta) \cdot z}{2} - M_d = 0 \quad (3.40)$$

$$M_d - M_d = 0 \rightarrow OK \quad (3.41)$$

É interessante notar o caso em que previamente ao cálculo da armadura transversal, tenha sido calculada uma armadura de compressão na seção para equilibrar o momento  $M_d$ . A Figura 3-12 apresenta as forças que atuam na seção para o caso em questão.

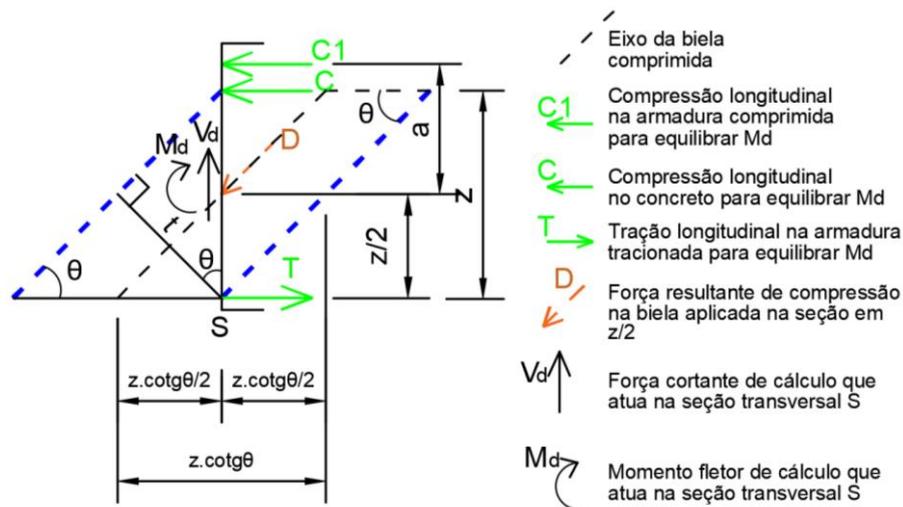


Figura 3-12 - Seção transversal da viga bi-apoiada com armadura dupla submetida a esforço cortante e momento fletor.

No caso da seção transversal com armadura de compressão ocorrem três forças (C, C1 e T) para equilibrar o momento  $M_d$ . Então, para se levar em conta a componente horizontal (H) proveniente da força D, devem ser alteradas as forças que estão aplicadas em pontos equidistantes do ponto de aplicação de H, pois desta maneira, é garantido o

equilíbrio de forças na horizontal sem alteração do momento fletor resistente na seção.  
Dessa forma, tem-se que:

Forças C e T a serem alteradas:

$$C_{\text{corrigida}} = C - \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2} \quad (3.42)$$

$$T_{\text{corrigida}} = T + \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2} \quad (3.43)$$

$$\sum F_H = 0 \quad (3.44)$$

$$-\left(C - \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2}\right) - C_1 - D \cdot \cos(\theta) + \left(T + \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2}\right) = 0 \quad (3.45)$$

$$-C - C_1 + T - D \cdot \cos(\theta) + D \cos(\theta) = 0 \quad (3.46)$$

$$-C - C_1 + T = 0 \rightarrow OK \quad (3.47)$$

Verificando o equilíbrio de momento fletor:

$$\sum M = 0$$

$$M_d - \left(C - \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2}\right) \cdot \frac{z}{2} + C_1 \cdot a + \left(T + \frac{D \cdot \cos(\theta)}{2}\right) \cdot \frac{z}{2} = 0 \quad (3.48)$$

$$M_d - \frac{C \cdot z}{2} - \frac{D \cdot \cos(\theta) \cdot z}{4} + C_1 \cdot a + \frac{T \cdot z}{2} + \frac{D \cdot \cos(\theta) \cdot z}{4} = 0 \quad (3.49)$$

$$M_d - \frac{C \cdot z}{2} + C_1 \cdot a + \frac{T \cdot z}{2} = 0 \rightarrow OK \quad (3.50)$$

O cálculo das forças  $C_{corrigida}$  e  $T_{corrigida}$  demonstram que a área de armadura calculada na seção transversal necessária para resistir ao momento fletor  $M_d$ , passa a apresentar um valor superior quando é considerado o esforço cortante atuando na seção. A NBR 6118:2014 indica em seu item 17.4.2.2 c), dois procedimentos que podem ser realizados a fim de compatibilizar as armaduras longitudinais para considerar a ação conjunta do momento fletor e do esforço cortante. A seguir estão mostrados os dois procedimentos prescritos na norma, os quais podem ser utilizados tanto para o Modelo de Cálculo I quanto para o Modelo de Cálculo II.

- Força de tração corrigida ( $F_{sd,cor}$ ) em cada seção

$$F_{sd,cor} = \left[ \frac{M_d}{z} + |V_d| \cdot (\cotg(\theta) - \cotg(\alpha)) \cdot \frac{1}{2} \right] \leq \frac{M_{d,máx}}{z} \quad (3.51)$$

Sendo:

$M_{d,máx}$  o momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise;

$\alpha$  é a inclinação da armadura transversal;

$\theta$  é a inclinação da biela comprimida.

- Comprimento adicional ( $a_l$ ) nas barras de tração

$$a_l = d \cdot \left[ \frac{V_{d,máx}}{2 \cdot (V_{d,máx} - V_c)} \cdot (1 + \cotg(\alpha)) - \cotg(\alpha) \right] \leq d \quad (3.52)$$

Sendo:

$a_l = d$  para  $|V_{d,máx}| \leq |V_c|$ ;

$a_l = 0,5 \cdot d$  para o caso geral;

$a_l = 0,2 \cdot d$  para estribos inclinados a  $45^\circ$ .

Conforme foi demonstrado, a área de aço necessária em uma seção transversal calculada para resistir ao momento fletor de cálculo que nela atua, passa a apresentar um valor superior quando na mesma seção ocorre um esforço cortante. Por isso, quando não é realizada a correção das forças de tração devida ao esforço cortante, a NBR 6118:2014

indica o prolongamento das barras longitudinais como um procedimento equivalente utilizado a fim de compatibilizar essas armaduras para a ação conjunta do momento fletor e do esforço cortante.

Durante o processo de dimensionamento das armaduras transversais da viga simplesmente apoiada descrita anteriormente, foram apresentados dois mecanismos resistentes nos quais baseiam-se os cálculos. O primeiro mecanismo resistente apresentado foi o da treliça (discreta) isostática, no qual o dimensionamento se dá de acordo com o modelo de bielas e tirantes. Já o segundo mecanismo resistente mostrado, foi o da analogia de treliça contínua, no qual baseia-se o dimensionamento usual descrito na NBR 6118:2014. O dimensionamento usual considera uma parcela de esforço cortante ( $V_c$ ) absorvida por mecanismos complementares a ser descontada do esforço cortante de cálculo ( $V_d$ ) para a obtenção das armaduras transversais.

É interessante notar que no procedimento baseado no segundo mecanismo resistente, a força de tração no banzo inferior apresenta valor diferente para cada seção transversal da viga, enquanto que no procedimento baseado no modelo de bielas e tirantes a partir da treliça isostática, as forças de tração no banzo tracionado mantem-se iguais para trechos da viga entre dois nós. Isso significa que ao se comparar essas forças de tração nos dois procedimentos de cálculo, somente em alguns pontos específicos elas possuem valores coincidentes.

## 4. MODELOS DE BIELAS E TIRANTES

---

Os modelos de bielas e tirantes correspondem a um mecanismo resistente baseado no Teorema do Limite Inferior da Plasticidade, discutido no capítulo 5 deste trabalho. Esses modelos têm sua origem na treliça clássica de MÖRSCH e RITTER (1902), tendo sido sistematizados por SCHLAICH e colaboradores a partir de 1984, procurando-se através dos modelos, idealizar de forma unificada o dimensionamento e o detalhamento de todas as estruturas de concreto armado. No capítulo anterior foi mostrado um roteiro de dimensionamento das armaduras de uma viga simplesmente apoiada a partir do modelo de bielas e tirantes. Neste capítulo é apresentado detalhadamente o funcionamento deste modelo de cálculo para as estruturas de concreto armado.

O método de bielas e tirantes consiste na consideração, dentro da peça, de barras ideais retilíneas comprimidas e tirantes tracionados. As barras comprimidas são formadas por bielas de concreto e as barras tracionadas são constituídas por armaduras de aço (FUSCO, 2013). Tais modelos são compostos por treliças, as quais podem ser isostáticas ou hiperestáticas, pré-definidas pelo projetista. Neste trabalho foram apenas realizados modelos de bielas e tirantes compostos por treliças isostáticas. Para que todas as estruturas apresentem comportamento adequado em serviço, é ideal que as treliças sejam definidas de forma a estarem o mais próximo possível das trajetórias de tensão obtidas com a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade. Com isso, o comportamento em serviço, por exemplo quanto às flechas e à fissuração, poderá se dar de maneira satisfatória.

Para a determinação do campo de tensões em regime elástico, pode ser empregado o método dos elementos finitos e a partir daí é possível imaginar um sistema isostático de bielas e tirantes que substitua adequadamente o verdadeiro panorama de esforços (FUSCO, 2013). A NBR 6118:2014 admite para vigas, que o ângulo de inclinação das bielas comprimidas esteja entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$  em relação à horizontal. Em elementos como os consolos curtos, a norma permite que essas bielas atinjam a inclinação de 1:2.

Apesar dos modelos de bielas e tirantes permitirem o dimensionamento de qualquer tipo de estrutura de concreto armado, sua aplicação mais importante é para o dimensionamento das regiões (D) de descontinuidade ou de regularização de tensões que ocorrem nas estruturas. A Figura 4-1 (adaptada de Schlaich *et al.*, 1987) apresenta um exemplo de pórtico plano, com fundação direta e as regiões B e D delimitadas. As regiões B apresentam tensões contínuas, distribuição linear de deformações e as hipóteses usuais

de dimensionamento se aplicam (hipótese de Bernoulli das seções planas). Já as regiões D apresentam tensões descontínuas, zonas de regularização de tensões e são nessas regiões onde principalmente aplicam-se os modelos de bielas e tirantes.

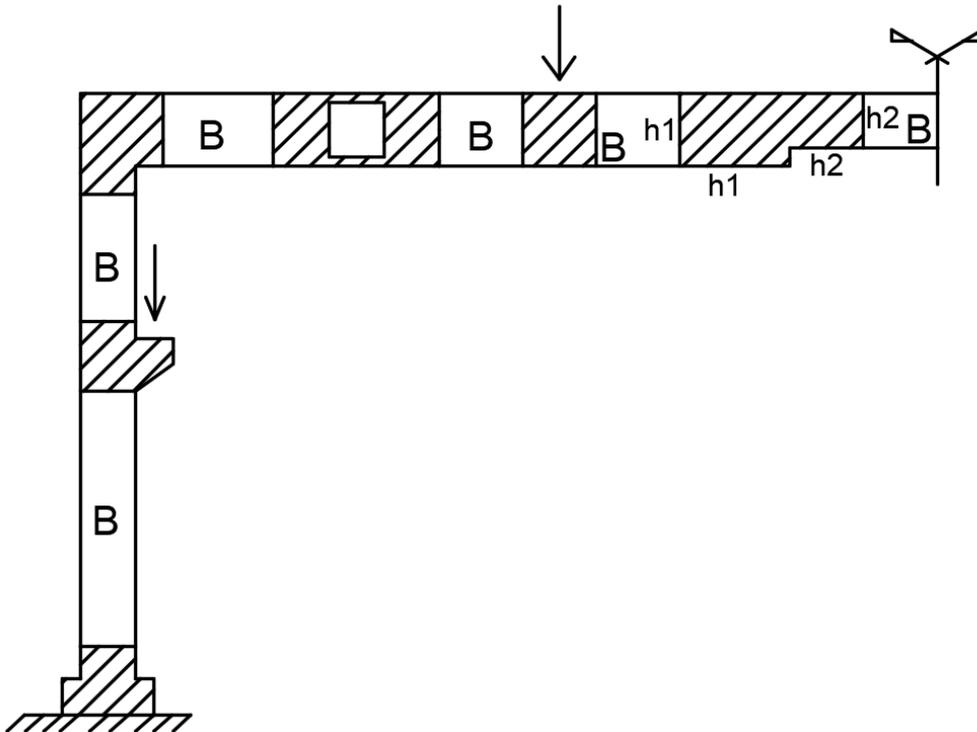


Figura 4-1 – Pórtico plano com regiões B e D (hachuradas) delimitadas.

Na Figura 4-1, as regiões hachuradas representam as regiões D e para definir a dimensão geométrica destas, é aplicado o princípio de Saint-Venant, concluindo-se que esta dimensão apresenta a ordem de grandeza da dimensão da seção de aplicação da carga ou da dimensão da variação descontínua das tensões. Essas regiões D apresentadas na Figura 4-1 são decorrentes das seguintes descontinuidades:

- Nó de pórtico;
- Abertura em viga;
- Carga concentrada aplicada na viga;
- Mudança de altura da viga;
- Consolo curto;
- Transição do pilar para a fundação.

A Figura 4-2 é baseada em Schlaich *et al.*, 1987, apresentando três exemplos da aplicação do princípio de Saint-Venant para a delimitação das regiões D nas estruturas.

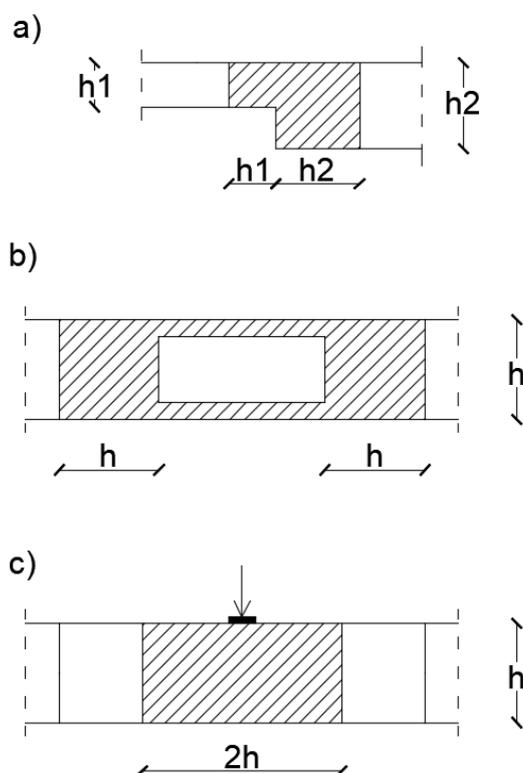


Figura 4-2 – Exemplos da aplicação do princípio de Saint-Venant para a delimitação das regiões D nas estruturas.

Após a separação da estrutura em regiões B e D, o dimensionamento pode ser feito através de um modelo de bielas e tirantes aplicado à estrutura inteira ou apenas às regiões D, com as regiões B sendo dimensionadas pelos métodos clássicos. Como foi mencionado anteriormente, para que a estrutura apresente comportamento adequado em serviço, procura-se definir as treliças isostáticas a partir da trajetória de tensões obtidas pela análise elástica da estrutura.

Entretanto, mesmo que nenhuma análise elástica esteja disponível, é possível desenvolver o modelo de bielas e tirantes a partir do chamado “método dos caminhos de cargas” (*load path method*) (Schlaich *et al.*, 1987). Por este procedimento, as bielas são dispostas de forma a seguir o caminho natural das forças internas, derivadas do equilíbrio entre cargas aplicadas e reações de apoio (com ações opostas se equilibrando). As forças internas são concentradas em linhas que não se cruzam e as curvaturas devidas às

mudanças de direção são representadas através dos nós, onde há concentrações de tensões e de desvios de carga (SANTOS, 2020). A Figura 4-3 apresenta possíveis exemplos de encontros entre bielas e tirantes nos nós das treliças isostáticas que representam o modelo.

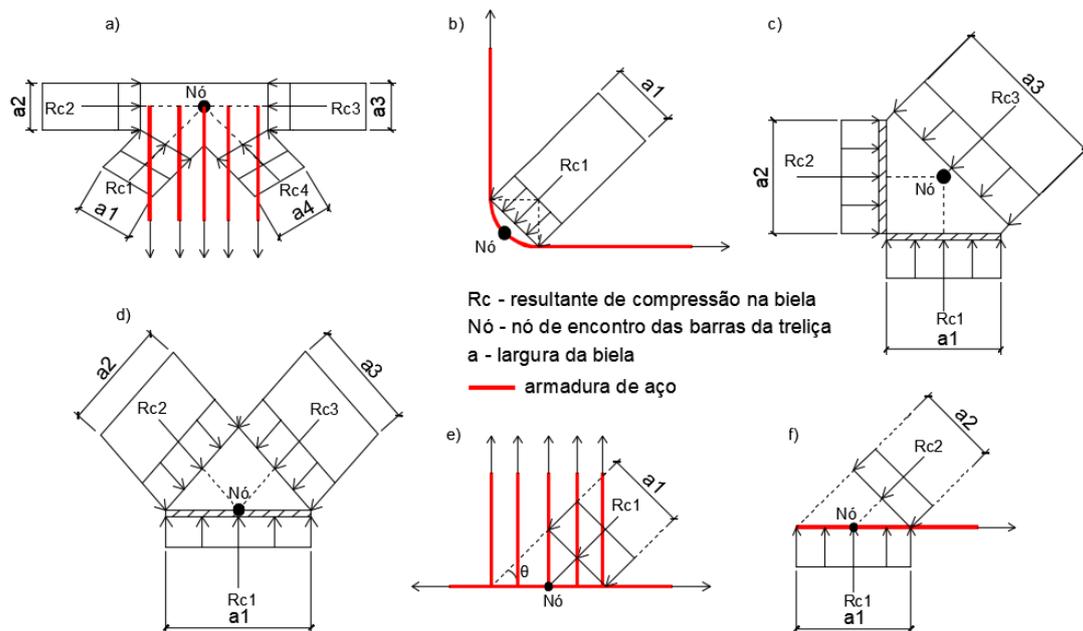


Figura 4-3 – Exemplos de encontros entre bielas e tirantes nos nós das treliças isostáticas.

Desta maneira, o procedimento para o dimensionamento de um elemento estrutural através do modelo de bielas e tirantes pode ser resumido como:

1º - Calcular as reações de apoio.

2º - O modelo de bielas e tirantes é desenvolvido através de uma treliça isostática. Logo, deve-se substituir cargas distribuídas e momentos aplicados que atuam na estrutura por cargas equivalentes e binários para posteriormente serem aplicados na treliça que representa o modelo. A Figura 4-4 mostra um exemplo desta aplicação.

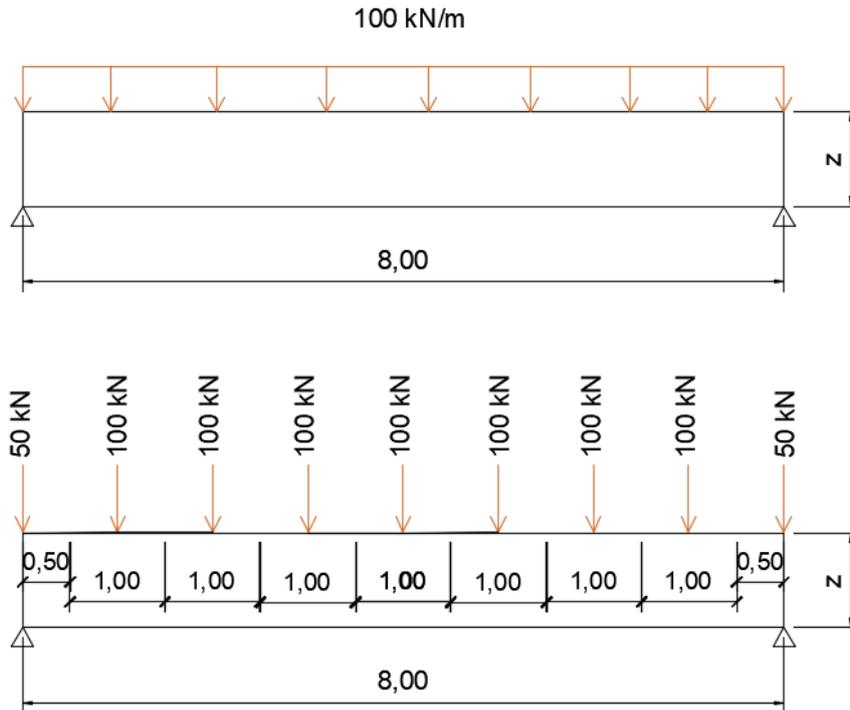


Figura 4-4 – Substituição de cargas distribuídas em uma viga simplesmente apoiada por cargas concentradas para posteriormente definir o modelo de treliça isostática.

3º - A partir das cargas concentradas aplicadas e reações de apoio, é gerado o modelo de treliça isostática em que o equilíbrio estático esteja garantido para o sistema de forças atuantes. A treliça pode ser gerada a partir do caminho das cargas, no qual ações opostas devem se equilibrar e os caminhos não devem se cruzar. Os caminhos são representados pelas linhas poligonais (bielas e tirantes) que formam a treliça e as curvaturas dos caminhos, que representam as mudanças de direção, são representadas nos nós onde ocorrem concentrações de tensões devidas ao encontro de duas ou mais forças. Para o traçado da treliça, deve-se seguir a indicação da NBR 6118:2014 de que as bielas inclinadas devem apresentar inclinação entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . É ressaltado que a posição dessas barras deve ser tal que representem da forma mais próxima possível o campo de tensões elásticas, com seus eixos correspondendo ao centro de gravidade das armaduras e as resultantes das tensões de compressão. As resultantes das ações externas, as reações de apoios e os eixos das barras da treliça convergem nos nós do modelo.

4º - Cálculo elástico das forças que atuam nas barras da treliça (bielas e tirantes). No modelo de bielas e tirantes, as bielas representam as tensões de compressão, os tirantes as tensões de tração e eventualmente, tirantes podem representar campos de tração no

concreto (ou seja, regiões submetidas a forças de tração, mas onde não são necessárias armaduras).

5° - A partir da treliça avaliar a espessura das bielas e encontros de forças nos nós a fim de verificar os limites de tensões estabelecidos pela NBR 6118:2014 para o concreto.

6° - Considerando as forças de tração que atuam nas barras da treliça, dimensionar a armadura de aço a ser utilizada na peça. Calcular ainda o comprimento de ancoragem das barras para que a tensão de tração que atua na armadura possa ser transferida para o concreto de maneira eficiente.

## 5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

---

Comentam-se a seguir trabalhos recentes relacionados com o tema desta Dissertação.

Um estudo desenvolvido por SILVA *et al.* (2020) apresentou uma análise da resistência à punção em lajes lisas através da adaptação de um modelo de bielas e tirantes. Foi comparada a resistência à punção de 30 lajes lisas calculadas via modelo de bielas e tirantes com a resistência calculada pelas normas brasileira, americana e europeia. Os autores validaram o modelo comparando seus resultados com resultados experimentais das lajes lisas, tendo o modelo apresentado melhor média que as estimativas das normas, demonstrando dessa maneira que o modelo modificado utilizado pode se tornar uma alternativa na estimativa da resistência ao puncionamento.

Um estudo realizado por SOUZA e BITTENCOURT (2006) analisou a aplicabilidade do método de elementos finitos e do método das bielas para o dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado. Os autores realizaram a análise de uma viga- parede com duas regiões de descontinuidade, um bloco de fundação sobre duas estacas e um bloco de fundação sobre quatro estacas. O método de elementos finitos foi utilizado para obter o campo de tensões principais nas estruturas e a partir desses campos, foram traçadas treliças representando bielas e tirantes para dimensionar tais elementos. Dentre outras questões, os autores concluíram que a utilização do método das bielas acoplado ao método dos elementos finitos parece ser a melhor estratégia para o dimensionamento e verificação de estruturas complexas.

Entretanto, também alertaram que o método das bielas não pode ser tomado como uma panaceia da engenharia estrutural, como demonstra ser a princípio. Tendo em vista a obrigatoriedade da utilização das armaduras mínimas, imposta pelos códigos normativos, essa ideia de solução geral acaba sendo derrubada, uma vez que tais armaduras podem ser maiores que os tirantes concebidos, descaracterizando assim o modelo inicial. O fato de que para algumas estruturas a armadura de fissuração exigida pelos códigos normativos pode ser maior do que as armaduras dos tirantes dimensionados pelo método das bielas acaba sendo um problema. Um estudo realizado por ISMAIL *et al.* (2021) desenvolveu três diferentes modelos não lineares de elementos finitos utilizando o *software* ATENA para avaliar três diferentes abordagens de projeto disponíveis na literatura para vigas-parede contendo uma grande abertura. Os três métodos de projeto avaliados foram o modelo de KONG e SHARP (1978), o modelo de

MANSUR (2006) e o modelo de Bielas e Tirantes da ACI 318-14. Modelos não lineares de elementos finitos foram utilizados para comparar as três abordagens de projeto e determinar aquela mais eficiente. Os autores concluíram que os projetos baseados nas três abordagens analisadas previram capacidade suficiente para a viga suportar a carga última. A abertura máxima de fissuras para as vigas projetadas de acordo com o modelo de MANSUR (2006) e o modelo de bielas e tirantes foi de aproximadamente 0,6 mm, enquanto para a viga projetada de acordo com KONG e SHARP (1978) foi de 0,8 mm. Os autores indicam que uma armadura adicional pode ser adicionada para limitar a abertura de fissuras ao valor de 0,3 mm para a situação de serviço. Os modelos de KONG e SHARP (1978) e MANSUR (2006) resultam aproximadamente na mesma quantidade de aço, diferenciando-se no arranjo. Já a quantidade de armadura proveniente do método de bielas e tirantes da ACI 318-14 foi aproximadamente 25% superior à outros dois métodos. A viga projetada de acordo com o método de bielas e tirantes apresentou melhor ductilidade do que as vigas projetadas pelos métodos de KONG e SHARP (1978) e MANSUR (2006). Os três modelos de projeto satisfazem à deflexão limite.

Um trabalho realizado por SOUZA e BITTENCOURT (2003) apresentou uma metodologia a ser utilizada para definir modelos de bielas e tirantes que possam capturar com eficiência o comportamento de um elemento estrutural a partir de um *software* chamado VISTA2002 (*Virtual Strut And Tie Analyzer*). Esse *software* é baseado no chamado método das barras virtuais, o qual consiste na formação inicial de um sistema reticulado com diversas configurações possíveis para o encaminhamento das cargas aplicadas até os apoios. Utilizando análise matricial de estruturas, é possível calcular os esforços e os deslocamentos iniciais do modelo admitindo-se inicialmente que todas as barras da treliça possuam uma seção transversal igual a 1,0 cm<sup>2</sup>. Dessa forma, os autores implementaram no programa VISTA2002 uma função que procura minimizar a taxa de armadura, sem que essa diminuição comprometa a deformabilidade e as condições de equilíbrio da estrutura. Inicialmente a estrutura é processada para a verificação do modelo e, em seguida, dá-se início a uma primeira iteração, que consiste em variar a área da seção transversal de cada uma das barras da treliça isoladamente para um valor muito reduzido e observar o efeito que cada uma das alterações produz na função que minimiza a taxa de armadura. A seção transversal reduzida simula a retirada da barra do modelo reticulado e conforme as condições de equilíbrio e deformações seguem sendo preservadas, novas iterações vão sendo realizadas até que sejam retiradas todas as barras possíveis que

havia na configuração inicial do modelo reticulado com várias diversas configurações possíveis para conduzir as cargas até os apoios.

O trabalho desenvolvido por DEMETRIO e AGUIAR (2021) apresentou um estudo aplicando o método de bielas e tirantes para o dimensionamento de vigas de concreto armado com aberturas em diversas posições. O objetivo foi obter um critério de projeto mais eficiente e com detalhamento mais claro em comparação ao dimensionamento tradicional por flexão composta reta. Para obter os modelos de bielas e tirantes os autores utilizaram o *software* SAP 2000 para visualizar a trajetória das forças e dessa forma traçar no *software* Ftool a treliça isostática que representa as bielas e os tirantes. Os autores puderam concluir que o modelo de bielas e tirantes é bastante eficiente para dimensionar as estruturas com regiões de descontinuidade e o resultado do projeto pelo modelo de bielas e tirantes exige menos armadura complementar longitudinal e mais armadura complementar transversal detalhada de forma assimétrica quando comparado com o método de dimensionamento à flexão composta reta. Os autores sugerem ainda que não sejam introduzidas aberturas em regiões próximas aos apoios de forma a não interromper a chegada da biela inclinada nesse apoio, ocasionando perda de resistência. Também é importante que haja uma altura suficiente no banzo comprimido da abertura para não ocorrer a ruptura do concreto e que a altura no banzo tracionado da abertura seja suficiente para acomodar as armaduras permitindo uma boa concretagem. Além disso, é interessante procurar quando possível dispor a abertura em região de força cortante nula, pois dessa maneira há menos influência na resistência da estrutura. Por fim, os autores recomendaram posicionar a abertura mais próximo do banzo tracionado, pois dessa maneira os tirantes verticais são menos solicitados, resultando conseqüentemente em uma menor taxa de aço nas armaduras transversais complementares.

No trabalho desenvolvido por LESSA *et al.* (2020) foi apresentado um estudo associado a quatro mecanismos de falha para um consolo curto de concreto relacionados com esforços de tração e compressão avaliados em um modelo de bielas e tirantes, com aplicação da Teoria da Confiabilidade. Foram analisados quatro modos de falha associados ao Estado Limite Último do consolo. Os modos de falha são os decorrentes do esforço secundário vertical na região da biela comprimida (tração), esforço secundário horizontal na região da biela comprimida (tração), esforço resultante principal no tirante (tração) e esforço na biela (compressão). Os autores concluíram que a maior probabilidade de falha verificada foi em relação ao esforço secundário horizontal de tração na região de equilíbrio de tensões da biela. Já a menor probabilidade de falha foi

referente ao esforço de compressão na biela. Os fatores de importância preponderantes se encontraram nas cargas permanentes e na resistência característica de escoamento à tração do aço e, na análise do esforço de compressão, a resistência característica do concreto se sobressai. Em relação à probabilidade de falha do sistema, os autores notaram que o valor da probabilidade conjunta entre dois modos de ruína aumenta à medida que seu coeficiente de correlação também aumenta e as suas respectivas variáveis apresentam dependência entre si. Por fim, os autores concluíram que a probabilidade de falha do sistema é similar à maior probabilidade de falha calculada, mostrando que a probabilidade do conjunto ocorre na mesma ordem de grandeza que a maior probabilidade de falha calculada.

Um estudo realizado por OZÓG (2019) apresentou a comparação entre seis modelos de bielas e tirantes para uma viga-parede submetida a um carregamento concentrado, contendo uma abertura e mudança de altura da seção transversal. Os seis modelos distintos foram propostos anteriormente por autores diferentes. Na etapa seguinte foram realizadas simulações numéricas das seis vigas analisadas por meio do *software* de análise não linear ATENA (*Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*) considerando um estado de tensão bidimensional. Para modelar o concreto foi utilizado o modelo de material SBETA proposto pelo *software* em questão. O comportamento das vigas-parede sob carga foi analisado em detalhes por uma modelagem estocástica. O objetivo era descobrir os impactos do tipo de modelo de bielas e tirantes e de alguns dados de entrada sobre a capacidade de carga da viga-parede. A modelagem estocástica foi realizada utilizando o *software* SARA. A autora pôde concluir que o valor médio da capacidade de suporte de carga variou de 55,3 kN a 64,6 kN. Diferenças significativas (cerca de 80%) foram observadas na quantidade de armadura necessária para projetar as vigas-parede. O resultado das simulações estocásticas mostrou que os coeficientes de variação são semelhantes para a maioria das vigas-parede testadas e estes são em torno de 10%. Apenas para uma das vigas obteve-se um maior coeficiente de variação, 14%. Os valores de índice de confiabilidade variaram de 7,25 a 10.

Em um trabalho desenvolvido por RODRIGUES e PANTOJA (2021) foi realizada a modelagem e comparação de diversas topologias de bielas e tirantes para uma viga de equilíbrio sob mesmo carregamento através do programa CAST, considerando os dispositivos normativos nacionais. Adotou-se como hipótese básica a mesma espessura de biela para todos os modelos e escoamento da armadura antes do esmagamento da biela

comprimida. Foram propostos pelos autores quatro modelos de treliças diferentes para uma mesma viga com geometria e propriedades dos materiais constantes.

Em um estudo realizado por GHORABA *et al.* (2020) os autores indicam que o método de bielas e tirantes pode ser utilizado para um projeto seguro de estruturas de concreto armado através do caminho de cargas. Por outro lado, o método linear de elementos finitos pode ser utilizado como alternativa no desenvolvimento dos modelos de bielas e tirantes além do método do caminho de cargas. Adicionalmente a isso, a análise não linear pelo método dos elementos finitos pode ainda auxiliar na otimização dos resultados do projeto obtidos no modelo de bielas e tirantes. Conseqüentemente, os dois métodos funcionam bem ao serem utilizados juntos no projeto estrutural das estruturas de concreto armado. Para demonstrar tal conceito, foram utilizados diferentes exemplos que incluem uma viga-parede com grande abertura e variação da altura e vigas-parede contínuas com e sem aberturas. Os autores puderam concluir que tanto o método de elementos finitos não lineares quanto o método de bielas e tirantes são confiáveis como ferramentas de projeto para a previsão da resistência e comportamento de estruturas de concreto armado com regiões de descontinuidade. O método de bielas e tirantes, por ser baseado no teorema do limite inferior da Plasticidade sempre conduz a uma solução segura. Além disso, o método serve como uma ferramenta que permite ao projetista rastrear o fluxo de forças, permitindo, portanto, desenvolver detalhes de armadura eficientes. A análise pelo método dos elementos finitos não lineares apresenta-se como ferramenta útil para a compreensão do comportamento de estruturas de concreto armado com regiões de descontinuidade no que diz respeito à rigidez e às deformações fornecendo uma previsão mais precisa da resistência final do que o método de bielas e tirantes. No entanto, não há garantia de que forneça uma solução segura em todos os casos. Além disso, o esforço de computação do método de elementos finitos não linear é relevante em comparação com o método de bielas e tirantes.

Em um estudo desenvolvido por XIA *et al.* (2020) os autores indicam que o método de bielas e tirantes é eficaz e amplamente utilizado para projetar regiões de descontinuidades em estruturas de concreto armado. Encontrar um modelo de treliça adequado para o projeto é a etapa mais desafiadora e mesmo engenheiros experientes encontram dificuldades para obter modelos representativos para regiões complexas de descontinuidade. Isso é ainda mais difícil quando essas regiões são tridimensionais. Segundo os autores, até o momento, apenas alguns modelos de bielas e tirantes foram propostos por pesquisadores para várias regiões de descontinuidade complexas, o que

deixa os profissionais com pouca orientação. Visando solucionar este problema, os autores propuseram um método para gerar automaticamente modelos de bielas e tirantes otimizados. O método de geração compreende um processo de otimização de topologia que gera formas estruturais otimizadas, maximizando a rigidez, um método de extração de topologia e um método de otimização de forma. Os autores concluíram que os modelos gerados resultaram em projetos mais econômicos e além disso, estudos geométricos e de parâmetros de carregamento demonstram a aplicabilidade e robustez do método proposto.

Em um estudo realizado por MUSTAFA *et al.* (2019), os autores propuseram um modelo de bielas e tirantes para estimar a capacidade última de resistência ao cisalhamento de um consolo de concreto contendo fibras de aço submetido a uma carga vertical e outra horizontal. O modelo proposto leva em consideração o efeito da resistência do concreto, o volume de fibra, a relação de aspecto da fibra, a taxa principal de aço e a taxa de estribos horizontais, a relação da carga horizontal e a relação entre largura e profundidade de cisalhamento. A estimativa da capacidade última ao cisalhamento foi validada com 146 resultados de testes da literatura. Dessa maneira, a comparação mostrou que o modelo proposto apresenta bom desempenho na estimativa da capacidade última de cisalhamento para consolos de concreto armado contendo fibras de aço. Segundo os autores, o valor médio geral da razão entre as forças experimentais e previstas é 1,1 e o desvio padrão é 0,105. Considerando os resultados dos testes existentes, o modelo de bielas e tirantes proposto demonstrou-se menos conservador do que aqueles presentes nas normas americana e europeia. Foram ainda apresentados estudos de sensibilidade para parâmetros da fibra. A relação entre a resistência última ao cisalhamento para consolos de concreto reforçado com fibras de aço e a resistência última ao cisalhamento para consolos de concreto sem fibras foram estudados em relação aos parâmetros (volume e proporção) da fibra de aço considerando a forma da fibra e a relação entre a largura e a profundidade de cisalhamento. Os estudos paramétricos do modelo proposto indicam que a resistência ao cisalhamento final dos consolos com fibras de aço é melhorada com o aumento do volume da fibra, com o aumento da relação de aspecto da fibra, com a redução da relação entre extensão e profundidade de cisalhamento e com o uso de fibras de aço de extremidade em gancho em vez de fibras retas. Em comparação com consolos de concreto sem fibras, a melhora na resistência ao cisalhamento foi de 29% devido à inclusão do volume da fibra e de 1,5%, e 49% devido ao uso de fibra com proporção de aspecto de 100.

Um trabalho desenvolvido por LANES *et al.* (2019) apresentou como objetivo a aplicação de métodos de bielas e tirantes para análises linear e não-linear em alguns elementos estruturais típicos, utilizando o Método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO). Esse algoritmo de otimização topológica considera a redução progressiva da rigidez com a remoção de elementos com baixos valores de tensões. Segundo os autores, o sistema de treliça equivalente resultante da análise pode fornecer maior segurança e confiabilidade. O estudo considerou os comportamentos elástico linear e não linear dos materiais. Para representar o concreto armado foi utilizado o *software* de elementos finitos ABAQUS através do seu modelo constitutivo de dano plástico denominado CDP (*Concrete Damaged Plasticity*). Os autores concluíram que as concepções de modelos otimizados podem ser idealizadas a partir da otimização topológica linear e não linear do concreto. No entanto, é recomendado que, para fins de projeto, a topologia ótima seja adotada de forma que fissuras intensas do material possam ser evitadas.

Em um estudo realizado por CHEN *et al.* (2018) os autores desenvolveram um modelo de bielas e tirantes de fissuração (CSTM) para prever melhor a resistência ao cisalhamento de uma viga-parede. Foram considerados os conceitos principais do modelo de bielas e tirantes, fenômenos experimentais de padrões de fissuras diagonais e a distribuição das deformações das barras longitudinais no vão onde ocorre cisalhamento. O CSTM proposto divide a biela diagonal em duas partes de acordo com a localização da fissura crítica de cisalhamento. Na região acima da fissura crítica, a qual não é uma região afetada pelas fissuras de flexão-cisalhamento a resistência à compressão é definida como a resistência máxima à compressão da biela de concreto usual. A resistência à compressão da região abaixo da fissura crítica é derivada das forças transferidas pelo intertravamento do agregado, armadura da alma e ação de pino de barras longitudinais na superfície da fissura crítica. A melhoria da ação do intertravamento do agregado sob compressão na superfície da fissura crítica e a interação entre a armadura transversal e as barras longitudinais foram teoricamente consideradas. Para um projeto prático, um CSTM simplificado também é proposto. O método proposto é aplicado a 355 amostras de vigas-parede existentes para prever a resistência ao cisalhamento desse tipo de estrutura com e sem armadura de alma. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados de testes existentes e previsões dos modelos de bielas e tirantes existentes. Os autores mostram que a previsão do modelo proposto é melhor do que a de outros modelos. Além disso, segundo eles, os resultados da análise mostram que o CSTM proposto é capaz de

descrever bem a influência dos principais parâmetros de projeto (relação vão de cisalhamento e altura útil, taxa de armadura longitudinal, taxa de armadura da alma, resistência à compressão do concreto e altura útil) na resistência ao cisalhamento de vigas-parede.

## 6. SOFTWARE ATENA

---

Neste capítulo é apresentado o software ATENA, utilizado neste trabalho para realizar as simulações das estruturas dimensionadas a partir do modelo de bielas e tirantes. Este software considera a fissuração do concreto através da energia de fratura e é baseado no método dos elementos finitos. Para a elaboração dos modelos a serem analisados são definidos diversos parâmetros no que diz respeito ao comportamento dos materiais, à aderência entre o concreto e o aço e aos critérios de análise.

Para o desenvolvimento deste tópico foram utilizadas como fontes bibliográficas o site da empresa Cervenka Consulting e o manual “ATENA Theory” obtido no referido site. Na realização do presente trabalho foi utilizada uma versão demo do software Atena, desenvolvido pela empresa Cervenka Consulting, na República Tcheca. O nome “Atena” significa Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis e é voltado para a análise pelo método de elementos finitos de estruturas de concreto e concreto reforçado. Tendo sido validado extensivamente através de dados experimentais e análises, ele é distribuído na Europa, Japão, Coréia, Oriente Médio e Estados Unidos. O programa simula o comportamento real das estruturas de concreto, incluindo a análise da fissuração, esmagamento e também o rendimento do reforço utilizado nas estruturas de concreto reforçado (CERVENKA, 2020).

Existem basicamente duas possibilidades para formular o comportamento geral da estrutura baseando-se em sua forma deformada:

- Formulação de Lagrange

Neste caso estamos interessados no comportamento de partículas infinitesimais de volume  $dV$ . O volume dessas partículas varia em decorrência do carregamento e conseqüentemente, da deformação que ocorre na estrutura. Este método é usualmente utilizado para o cálculo de estruturas da engenharia civil.

- Formulação de Euler

A ideia essencial da formulação de Euler é estudar o "fluxo" da estrutura do material através de volumes infinitesimais e fixos da estrutura. Esta formulação é mais utilizada para análise de fluidos, análise de fluxo de gás etc, onde existem grandes fluxos de material.

Para a análise de estruturas a formulação de Lagrange é a mais adequada, logo, esta formulação será o alvo do presente estudo. Existem duas maneiras de se utilizar a formulação Lagrangiana, sendo a primeira com as equações que governam o problema descritas em função da configuração não deformada da estrutura no tempo igual a zero ( $t = 0$ ) e a segunda com as equações que governam o problema descritas a partir da configuração deformada da estrutura em um determinado instante de tempo ( $t$ ). O primeiro caso é denominado Formulação Total Lagrangiana (TL), enquanto o segundo é chamado de Formulação Lagrangiana Atualizada. O software Atena trabalha com a Formulação Lagrangiana Atualizada e suporta o mais alto nível (3º nível) de comportamento não-linear da estrutura.

Uma análise geral da estrutura geralmente consiste em aplicar vários pequenos incrementos de carga. Para cada um desses incrementos um procedimento de solução iterativa é executado para obter a resposta da estrutura ao final do incremento. Portanto, definindo o início e o fim do incremento de carga por  $t$  e  $t + \Delta t$ , em cada step, nós sabemos o estado da estrutura no tempo  $t$  (de acordo com os passos anteriores) e resolvemos para o estado de tempo  $t + \Delta t$ . Este procedimento é repetido as vezes necessárias para alcançar a totalidade do carregamento.

O programa utiliza dois dos tensores de tensões e deformações que são usualmente utilizados em análises não lineares, sendo estes o Tensor de Cauchy e o tensor de Piola-Kirchhoff II. O tensor de tensões de Cauchy é conhecido da mecânica linear. Ele expressa a força que atua em uma área infinitesimal do corpo deformado no tempo  $t$ . Também é chamado de tensor de tensão de engenharia. O tensor de tensões de Cauchy é o principal meio de se analisar os valores de tensões últimas nos materiais. Já o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff II é formado por tensões fictícias sem representação física, diferente do tensor de tensões de Cauchy. Ele expressa as forças que atuam em uma área infinitesimal do corpo na configuração não deformada, ou seja, este tensor relaciona forças com um formato da estrutura que não existe mais.

Para o material concreto, o Atena permite utilizar um modelo constitutivo denominado SBETA (CCSbetaMaterial). A formulação das relações constitutivas é considerada no estado plano de tensões. Uma abordagem distribuída é utilizada para modelar as propriedades do material, como por exemplo as fissuras e o reforço distribuído na estrutura. Isso significa que as propriedades definidas para um ponto do material são válidas dentro de um certo volume, que neste caso, é associado ao elemento finito inteiro.

O modelo constitutivo é baseado na rigidez e é descrito de acordo com a equação de equilíbrio em um ponto do material.

O comportamento não-linear do concreto no estado biaxial de tensão é descrito por meio da chamada tensão efetiva  $\sigma_c^{ef}$  e a deformação uniaxial equivalente  $\varepsilon^{eq}$ . A tensão efetiva é em muitos casos uma tensão principal. A deformação uniaxial equivalente é introduzida para eliminar o efeito de Poisson no estado plano de tensões. A deformação uniaxial equivalente pode ser considerada como a deformação que seria produzida pela tensão  $\sigma_{ci}$  em um ensaio uniaxial com módulo de elasticidade  $E_{ci}$  associado à direção  $i$ . Dentro desta consideração, a não-linearidade que representa um dano é causada apenas pela tensão  $\sigma_{ci}$ . O diagrama uniaxial equivalente de tensão-deformação completo é mostrado na Figura 6-1.

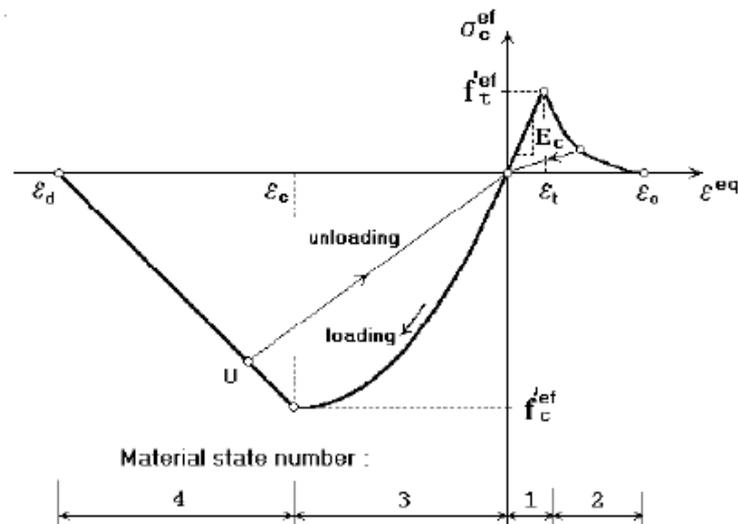


Figura 6-1 - Lei uniaxial equivalente de tensão-deformação para o concreto.

Fonte: ATENA Program Documentation – Part 1.

Os números no diagrama da Figura 6-1 são utilizados nos resultados das análises para indicar o estado de dano do concreto. O descarregamento é uma função linear em relação a origem. Um exemplo de ponto de descarregamento U é mostrado na Figura 6-1. Portanto, a relação entre tensão  $\sigma_c^{ef}$  e deformação  $\varepsilon^{eq}$  não é única e depende do histórico do carregamento. Uma mudança de carregamento para descarregamento ocorre, quando o incremento de deformação efetiva muda de sinal. Se ocorrer um recarregamento subsequente, o caminho de descarregamento linear é seguido até o último ponto de carregamento U ser alcançado novamente e em seguida a função de carregamento é

retomada. O valor de pico da tensão na compressão  $f_c'^{ef}$  e na tração  $f_t'^{ef}$  são calculados de acordo com o estado de tensão biaxial. Portanto, a lei de tensão-deformação uniaxial equivalente reflete o estado biaxial de tensão.

O modelo do material SBETA inclui os seguintes efeitos do comportamento do concreto:

- Comportamento não-linear na compressão incluindo enrijecimento e enfraquecimento;
- Fratura do concreto na tração baseada na mecânica da fratura não-linear;
- Critério de falha de resistência biaxial;
- Redução da resistência a compressão após a fissuração;
- Efeito de enrijecimento na tração;
- Redução da rigidez ao cisalhamento após a fissuração;
- Dois modelos de fissura: direção fixa de fissura e direção rotacionada da fissura.

O modelo de fissuração proposto pelo software ATENA 3D está baseado na fissuração distribuída, chamado de Smearred Crack Model, assumindo que as fissuras são uniformemente distribuídas dentro do elemento finito da malha. Esse modelo consegue representar a propagação de fissuras em estruturas de concreto armado, considerando o material ortotrópico. Dentro desse conceito, duas opções são disponíveis para os modelos de fissuração, a citar: Modelo de fissuras fixas (fixed crack model) e o Modelo de fissuras rotacionadas (rotated crack model) (PUEL, 2018).

No modelo fixo de propagação de fissuras, as fissuras se propagam na mesma direção das tensões principais no momento que a fissuração iniciou. Ao considerar fixa a direção de propagação das fissuras, passa a haver tensões cisalhantes na superfície do plano dessas fissuras e, portanto, as tensões normais atuantes nesse plano não são tensões principais.

Já no modelo rotacionado de propagação de fissuras, a direção da propagação rotaciona de maneira a acompanhar a direção das tensões e deformações principais. Desta forma, nenhuma tensão cisalhante ocorre no plano da fissura e apenas duas tensões normais atuam, sendo estas as tensões principais.

As Figura 6-2 a Figura 6-6 apresentam os parâmetros utilizados para definir o concreto da classe C25 como exemplo.

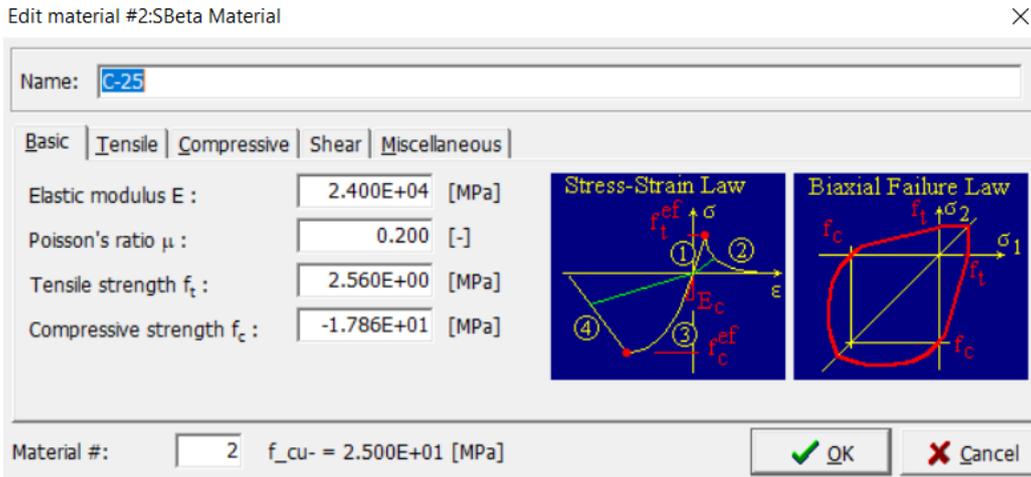


Figura 6-2 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba *Basic*).

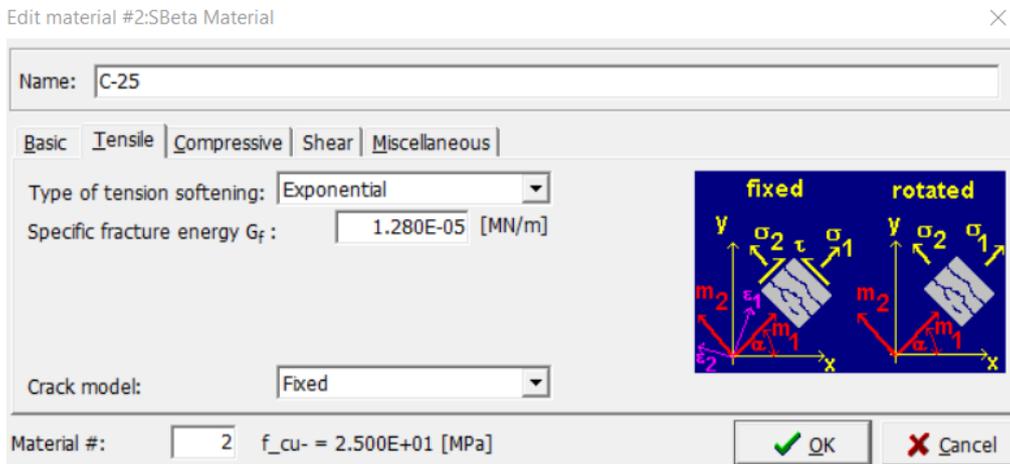


Figura 6-3 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba *Tensile*).

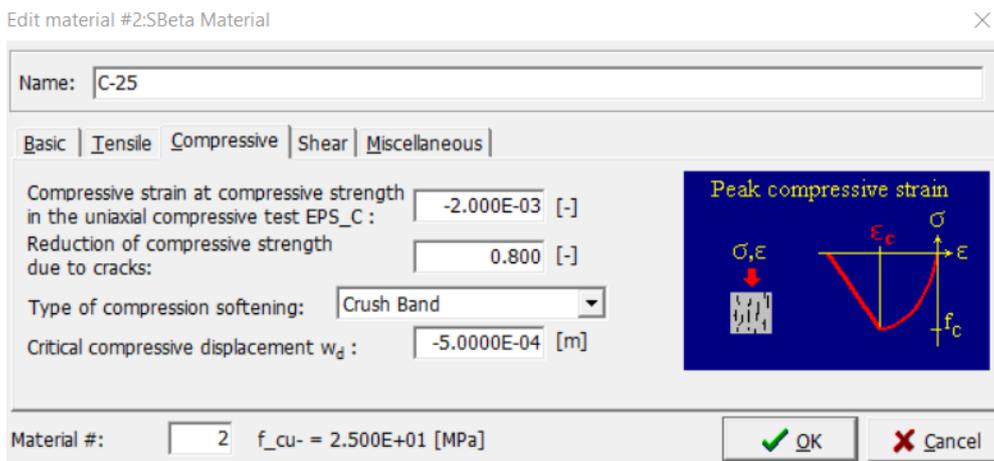


Figura 6-4 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba *Compressive*).

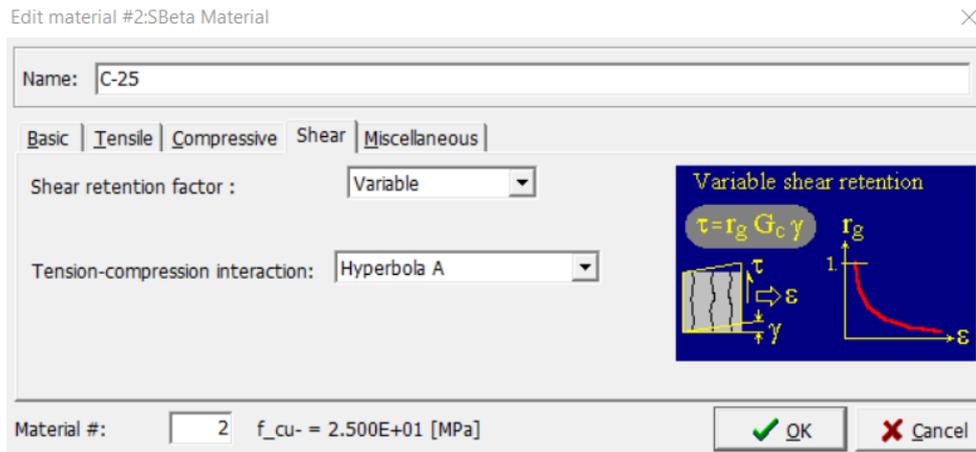


Figura 6-5 – Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba *Shear*).

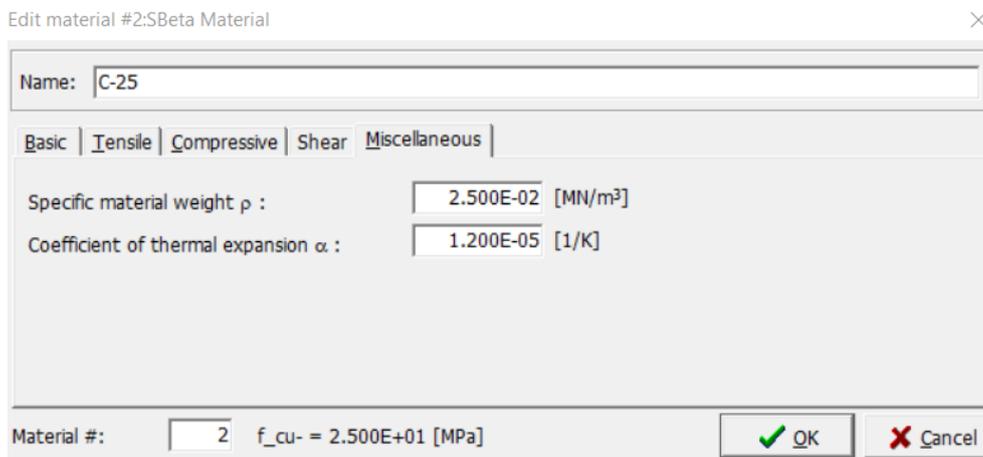


Figura 6-6 - Parâmetros utilizados para definir o concreto C25 (aba *Miscellaneous*).

Para a armadura utilizada foi considerado o diagrama bilinear com patamar de plastificação como é indicado na NBR 6118:2014. Os parâmetros que definem o comportamento das barras de aço CA-50 presente nos modelos estão apresentados nas Figura 6-7 e Figura 6-8.

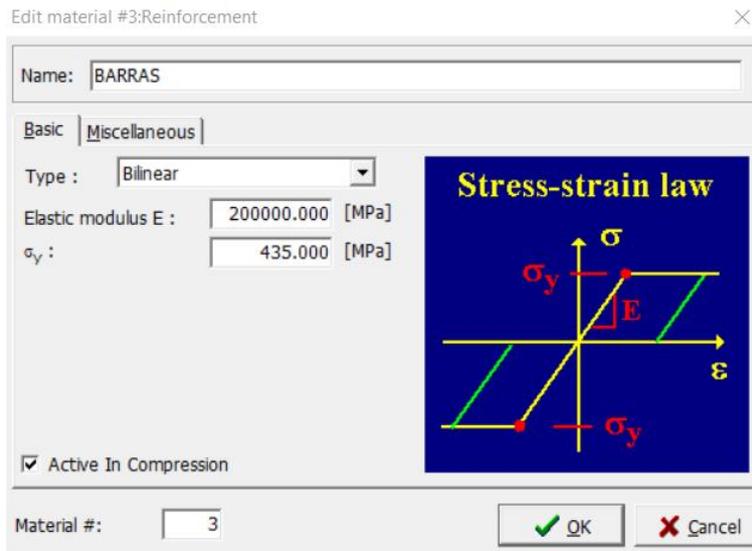


Figura 6-7 – Parâmetros utilizados para definir as barras de aço CA-50 (aba *Basic*).

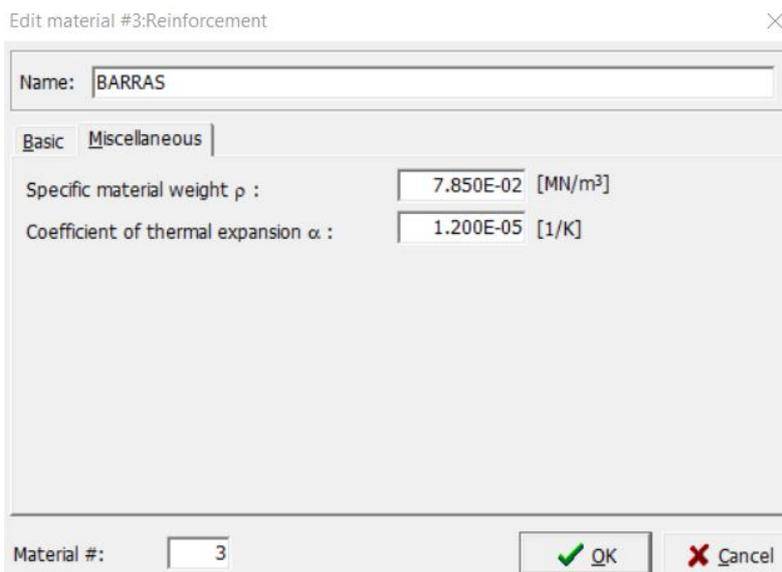


Figura 6-8 - Parâmetros utilizados para definir as barras de aço CA-50 (aba *Miscellaneous*).

Foi ainda definido um material com funcionamento no estado plano de tensões para ser utilizado na definição dos apoios e nos locais de aplicação das cargas. As Figura 6-9 e Figura 6-10 apresentam os parâmetros considerados para o material que define os apoios e os locais de aplicação das cargas.

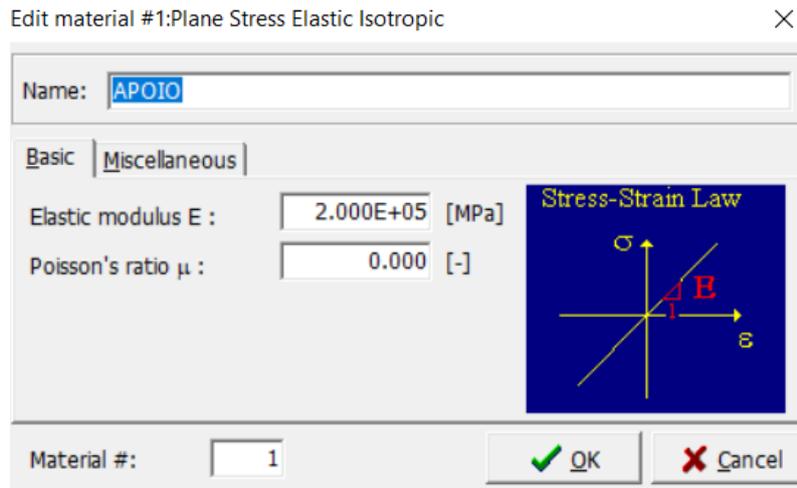


Figura 6-9 – Parâmetros utilizados para o material que define os apoios e os locais de aplicação das cargas (aba *Basic*).

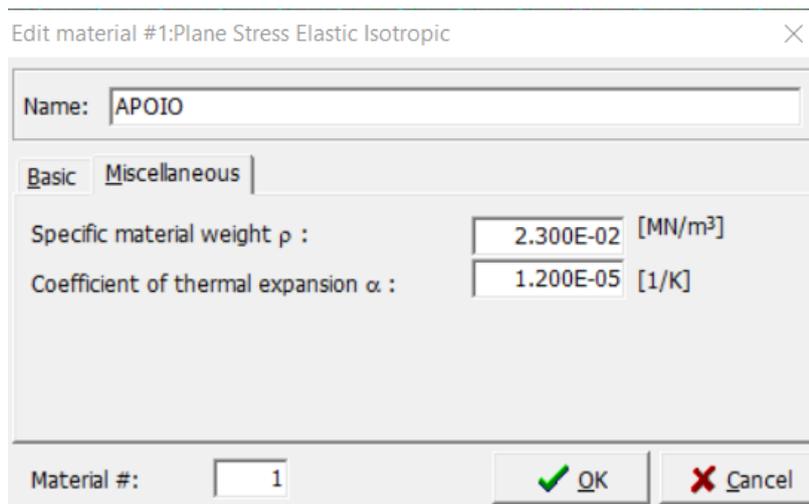


Figura 6-10 - Parâmetros utilizados para o material que define os apoios e os locais de aplicação das cargas (aba *Miscellaneous*).

Para a interação entre o concreto e as armaduras foi considerada a aderência perfeita, como é mostrado na Figura 6-11 .

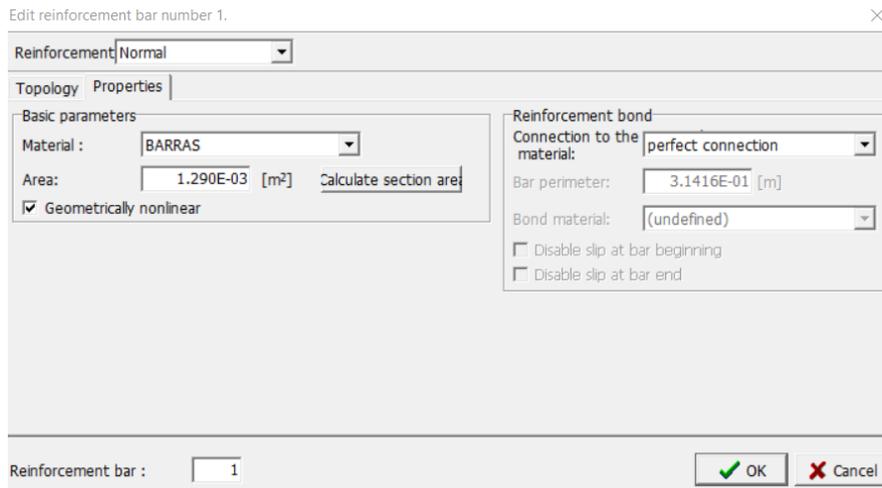


Figura 6-11 – Consideração da perfeita aderência entre o concreto e o aço.

Para a realização das análises são definidos os parâmetros apresentados nas Figura 6-12 a Figura 6-14. Esses parâmetros foram alterados nos diversos modelos a fim de possibilitar a convergência dos resultados para cada uma das estruturas analisadas.

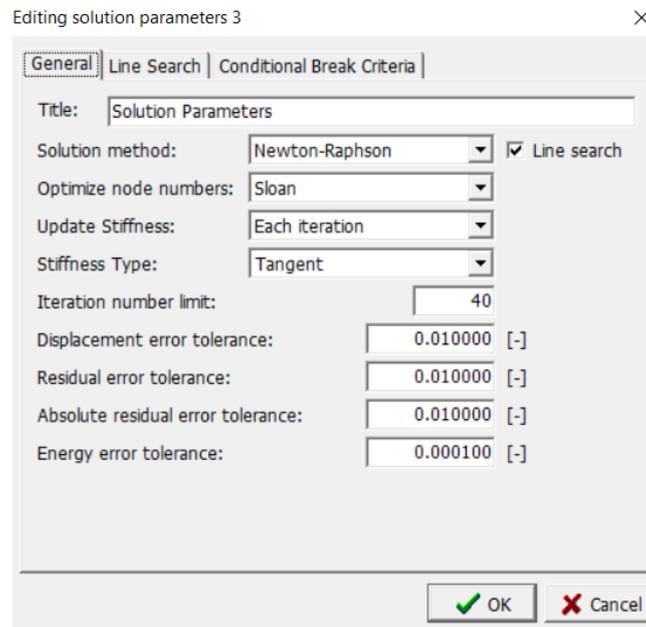


Figura 6-12 – Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo *software* ATENA (aba *General*).

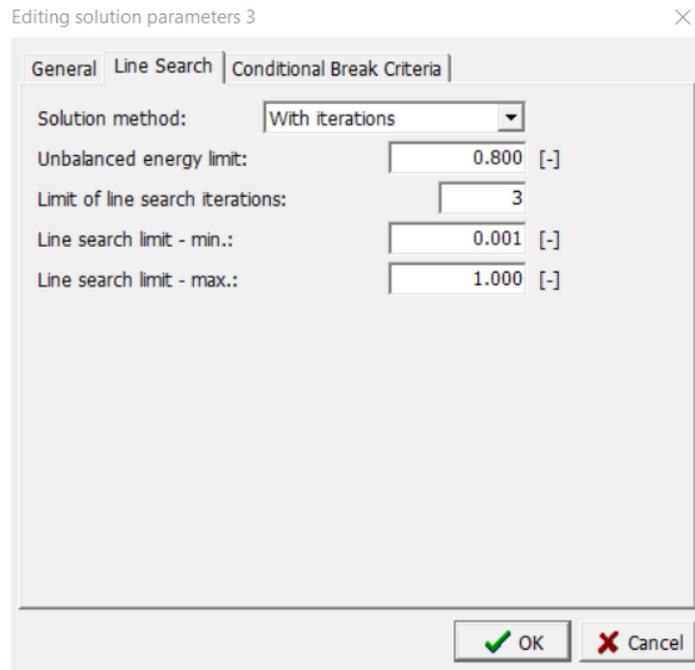


Figura 6-13 - Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo *software* ATENA (aba *Line Search*).

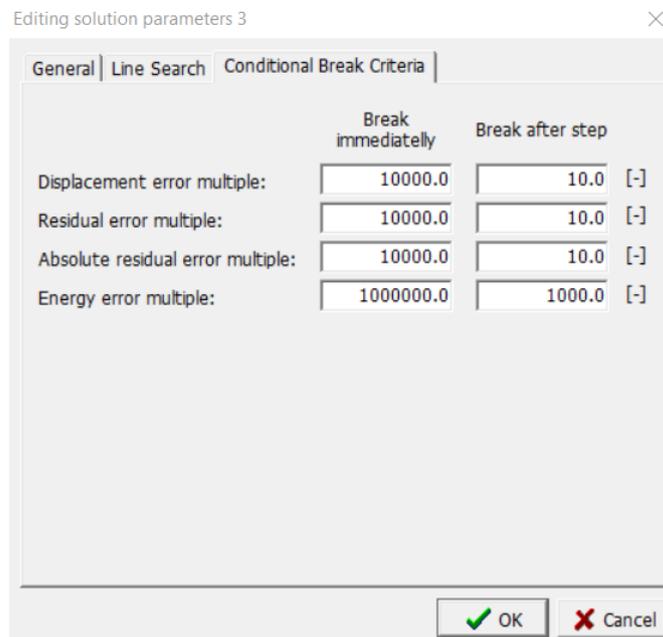


Figura 6-14 - Parâmetros utilizados para a realização das análises realizadas pelo *software* ATENA (aba *Conditional Break Criteria*).

O processo de análise realizado no ATENA se dá através da adição de incrementos de cargas na estrutura. A quantidade de incrementos utilizada é definida pelo usuário do programa e está exemplificada na Figura 6-15.

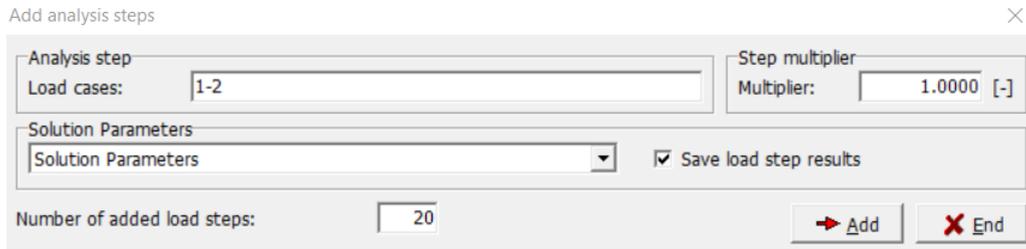


Figura 6-15 – Definição da quantidade de incremento de cargas a ser calculada na estrutura.

## 7. METODOLOGIA

---

Para a realização deste trabalho foi verificado o dimensionamento das estruturas de concreto armado decorrente da aplicação de modelos de bielas e tirantes. Essa verificação se deu através dos resultados gerados pela análise não linear produzida pelo software ATENA.

Inicialmente foram dimensionadas as armaduras dos elementos estruturais através do método de bielas e tirantes baseando-se nos fundamentos desse método, os quais foram apresentados no capítulo 4 deste trabalho. Esse dimensionamento inicial foi obtido buscando uma configuração de armadura que estivesse de acordo com as trajetórias das tensões principais nas estruturas decorrentes dos seus carregamentos. As tensões principais foram determinadas através do software Robot Structural da empresa Autodesk, o qual realiza a análise linear elástica das estruturas pelo método de elementos finitos. Este software não considera a fissuração que ocorre no concreto. É importante dizer que a análise linear elástica das estruturas poderia ter sido realizada no Atena, mas foi obtida através do Robot pelo fato de que antes da realização deste trabalho, o autor não possuía muita experiência com a utilização do Atena. Dessa forma, optou-se pela obtenção das tensões lineares elásticas em um software cuja utilização já era mais conhecida por parte do autor. Assim, foi possível estudar melhor as tensões principais elásticas antes de iniciar a análise no Atena. Na etapa do dimensionamento, as armaduras foram obtidas a partir das forças de tração nos tirantes das treliças que formam os modelos de bielas e tirantes. Essas forças axiais que ocorrem nas barras que formam as treliças foram calculadas através do software Ftool. As bielas comprimidas foram verificadas de acordo com os limites de tensões estabelecidos pela NBR 6118:2014.

Após as estruturas serem dimensionadas pelo método de bielas e tirantes, foi utilizado o software ATENA para verificar o dimensionamento considerando a fissuração do concreto por meio da energia de fratura. Uma vez que a análise não linear foi concluída possibilitou-se analisar os resultados das tensões principais que ocorrem nos elementos estruturais após o concreto fissurar. O objetivo final corresponde a verificar se o dimensionamento proveniente dos modelos de bielas e tirantes sofrem alguma alteração conforme é considerada a fissuração do concreto na análise.

O concreto utilizado em cada estrutura analisada teve suas propriedades mecânicas calculadas a partir da sua resistência à compressão de acordo com o que é estabelecido na NBR 6118:2014. Para todas as estruturas foi utilizado o aço CA 50.

## 8. MODELOS ANALISADOS

---

Para o desenvolvimento dos modelos analisados no presente trabalho, foram utilizados diversos parâmetros referentes aos materiais, os quais foram calculados ou escolhidos para cada um dos diversos modelos analisados. É importante ressaltar que a NBR 6118:2014 considera para o dimensionamento das estruturas de concreto armado no estado limite último, que as tensões de tração que surgem nos elementos são resistidas apenas pela armadura, desconsiderando, portanto, a resistência do concreto à tração. Entretanto, a análise não linear realizada pelo software ATENA gera resultados inconsistentes se for desconsiderada a resistência à tração do concreto e, por isso, foi considerado o valor da resistência à tração média ( $f_{ctm}$ ) do concreto nas modelagens. A resistência  $f_{ctm}$  é a utilizada pela NBR 6118:2014, em seu item 17.3.3.2, para a análise das estruturas no estado limite de serviço de abertura de fissuras.

O parâmetro de energia específica de fratura ( $G_f$ ) utilizado no concreto para o cálculo da fissuração pelo software ATENA foi obtido através do método descrito pelos autores HILLERBORG et al. (1976). A fissura começa a se propagar no momento em que é atingida a tensão resistente de tração do concreto, mas no início da sua abertura a tensão ainda não é igual a zero, decrescendo até atingir este valor conforme a abertura aumenta até a largura de  $w_1$ . O método proposto por estes autores se dá de acordo com:

$$G_f = \int_0^{w_1} \sigma \cdot dw = \frac{f_{ct} \cdot w_1}{2} \quad (8.1)$$

Sendo:

$f_{ct}$  é a resistência à tração do concreto. Neste trabalho considerou-se o valor de  $f_{ctm}$ ;  $w_1$  é a largura da abertura de fissura quando a tensão atinge o valor zero. Esta largura é da ordem de 0,01 mm a 0,02 mm. Neste trabalho foi utilizado o valor de 0,01 mm para este parâmetro.

Os parâmetros utilizados para as análises dos modelos realizados no presente trabalho foram considerados da seguinte maneira:

$f_{ck}$  do concreto → escolhido;

Aço CA = 500 MPa;

$E_{concreto}$  → calculado de acordo com a NBR 6118:2014 a partir do  $f_{ck}$ ;

$E_{aço} = 200 \text{ GPa}$ ;

$G_f$  → calculado a partir do modelo proposto por HILLERBORG *et al.* (1976);

$f_{ct} = f_{ctm}$  → calculado de acordo com a NBR 6118:2014.

Nos modelos realizados no Atena foram consideradas as áreas de aço efetivamente calculadas durante o dimensionamento das estruturas. Portanto, as figuras que apresentam as barras de aço utilizadas são apenas para ilustrar como se daria o detalhamento das armaduras provenientes do dimensionamento pelo modelo de bielas e tirantes. Também não foram inseridos no Atena os comprimentos de ancoragem das barras, visto que neste programa é permitido que o usuário opte por considerar a conexão perfeita entre o aço e o concreto, ou seja, não necessitando de um comprimento de ancoragem para transferir as tensões da armadura para o concreto.

### 8.1. Modelo 01 – Viga simplesmente apoiada com carga concentrada aplicada no meio do vão

O modelo 01 representa uma viga simplesmente apoiada com vão de 8 metros e carga de 200 kN aplicada no meio do vão. Foram considerados apoios de 20 cm x 20 cm, altura da seção transversal de 1,20 m e altura útil ( $d$ ) igual a 1,10 m. A viga representando o Modelo 01 está apresentada na Figura 8-1.

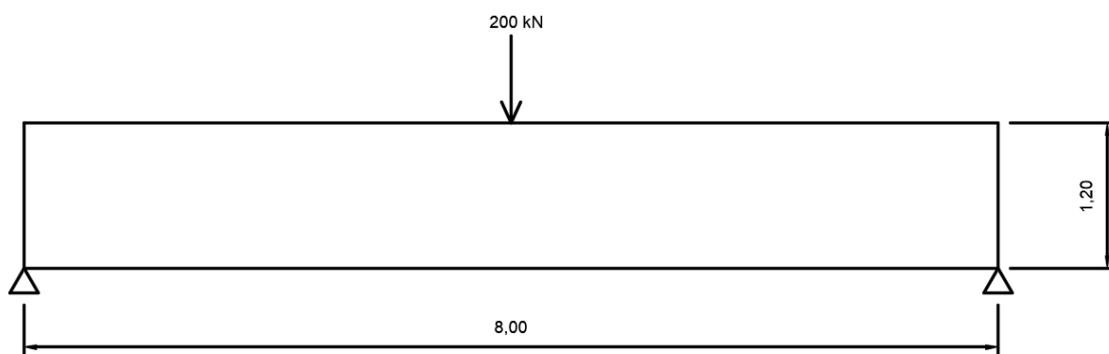


Figura 8-1 – Viga simplesmente apoiada (cotas em metros).

Inicialmente foram obtidas as tensões principais a partir da análise elástica realizada pelo método dos elementos finitos através do software Robot Structural. Essas tensões indicam o formato da treliça a ser utilizada para o método de biela e tirante, pois como está explicado no capítulo 4 deste trabalho, é pretendido que as estruturas apresentem comportamento adequado em serviço, sendo o ideal que as treliças sejam definidas de maneira a estarem o mais próximo possível das trajetórias de tensão obtidas com a Resistência dos Materiais e a Teoria da Elasticidade. Foi utilizada a carga de dimensionamento de  $200 \times 1,4 = 280$  kN aplicada como carga de 280 kN/m distribuída em 1 metro, afim de não inserir no modelo uma região de concentração de tensões elevadas decorrentes da aplicação do carregamento em um único nó do modelo. As tensões principais S1 obtidas a partir da análise linear elástica estão apresentadas na Figura 8-2 e as tensões principais S2 estão mostradas na Figura 8-3.

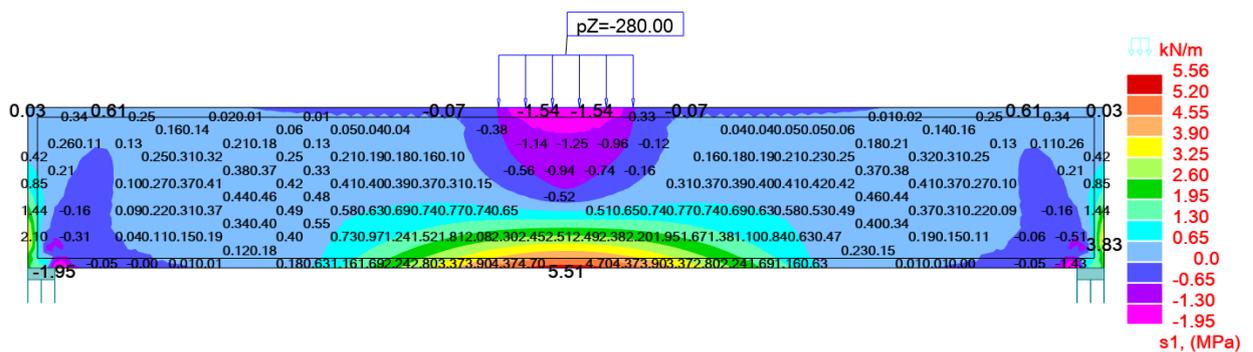


Figura 8-2 - Análise linear elástica das tensões principais S-1 da viga simplesmente apoiada.

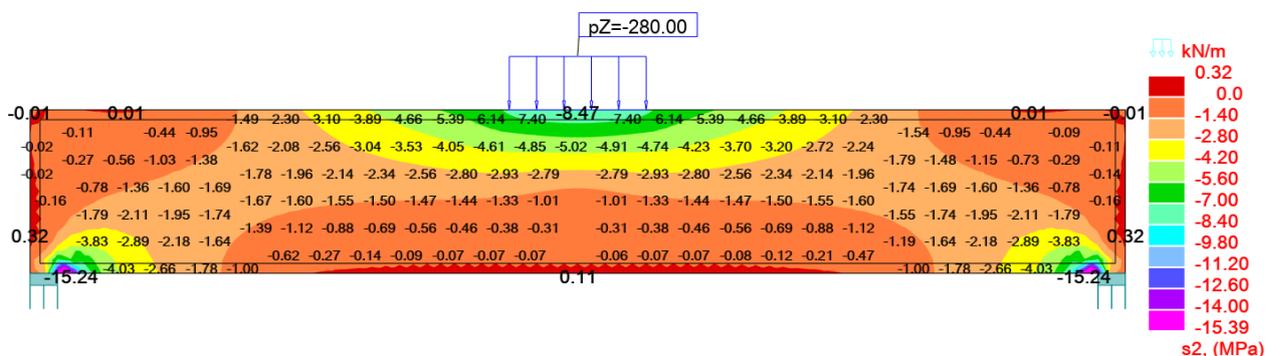


Figura 8-3 – Análise linear elástica das tensões principais S-2 da viga simplesmente apoiada.

A treliça isostática formada para a viga simplesmente apoiada referente ao modelo 01 pode ser observada na Figura 8-4 e foi construída com bielas de compressão inclinadas em 45°. Foram considerados estribos verticais para o dimensionamento da armadura transversal.

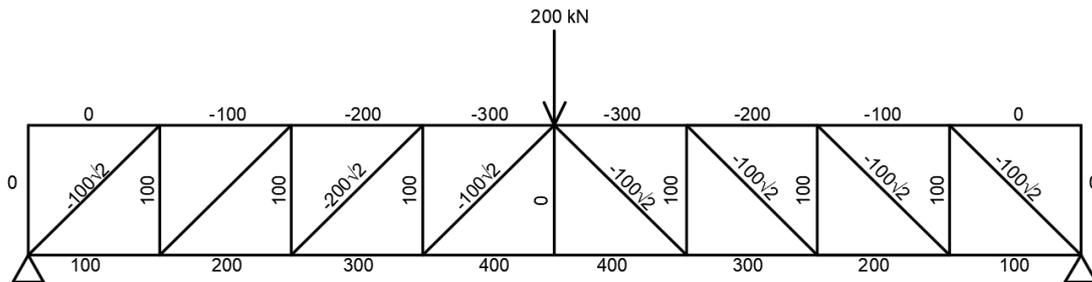


Figura 8-4 – Modelo de treliça isostática para representar o modelo de biela e tirante a ser utilizado para a análise da viga simplesmente apoiada referente ao Modelo 01.

O dimensionamento da viga foi realizado de maneira a verificar as tensões de compressão no concreto e calcular as armaduras de aço a partir das trações presentes nos tirantes:

- Armadura longitudinal referente ao tirante inferior longitudinal

$$A_{sl} = \frac{1,4 \times 400}{\frac{50}{1,15}} = 12,88 \text{ cm}^2 \rightarrow 5\phi 20 \text{ mm} \quad (8.2)$$

- Armadura transversal referente aos tirantes verticais

Como foi explicado no capítulo 3 deste trabalho, a força de tração presente nos estribos verticais é distribuída em um determinado comprimento, o qual resulta em uma armadura distribuída. Desta maneira, tem-se que:

$$F_s = \frac{1,4 \times 100}{z \cdot \cot \theta} = \frac{140}{1 \times 1} = 140 \text{ kN/m} \quad (8.3)$$

$$A_{st} = \frac{140}{\frac{50}{1,15}} = 3,22 \text{ cm}^2/m \rightarrow \emptyset 6.3\text{mm } c/20 \text{ cm} \quad (8.4)$$

- Verificação das bielas de concreto comprimidas

$$\sigma_{biela} = \frac{1,4 \times 100\sqrt{2}}{b \cdot t} = \frac{1,4 \times 100\sqrt{2}}{0,2 \cdot z \cdot \cos\theta} = \frac{1,4 \times 100\sqrt{2}}{0,2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 1400 \text{ kN/m}^2 \quad (8.5)$$

$$f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \times \frac{25000}{1,4} = 9642,85 \text{ kN/m}^2 \quad (8.6)$$

$$\sigma_{biela} < f_{cd2} \rightarrow OK$$

- Verificação da compressão nos apoios, considerando apoios de 20 cm x 20 cm

$$\sigma_{apoiio} = \frac{1,4 \times 100}{0,2 \times 0,2} = 3500 \text{ kN/m}^2 \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} f_{cd3} &= 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,72 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \times \frac{25000}{1,4} \\ &= 11571,42 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\sigma_{apoiio} < f_{cd3} \rightarrow OK$$

- Verificação da compressão no concreto no banzo superior

A profundidade (y) do bloco comprimido é dada por:

$$y = (d - z) \times 2 \quad (8.9)$$

Para  $d = 1,10$  m:

$$y = (1,1 - 1) \times 2 = 0,2 \text{ m} \quad (8.10)$$

$$\sigma_{banzo superior} = \frac{1,4 \times 300}{b \cdot y} = \frac{1,4 \times 300}{0,2 \times 0,2} = 10500 \text{ kN/m}^2 \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{25}{250}\right) \times \frac{25000}{1,4} \\ &= 13660,71 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\sigma_{banzo superior} < f_{cd1} \rightarrow OK$$

Para a apresentação das armaduras foi considerado um cobrimento de 3,0 cm nas faces laterais e na face superior. Os estribos foram dimensionados com ganchos em ângulo reto com ponta reta de 7 cm, como é indicado na NBR 6118:2014 para a ancoragem da armadura transversal. A armadura longitudinal foi dimensionada com gancho em ângulo reto e ponta reta de  $2\phi = 16$  cm. O comprimento de ancoragem retilíneo a ser acrescentado nas barras longitudinais não foi calculado, pois para a análise no software ATENA, não há necessidade de inserir comprimento de ancoragem nas barras, visto que o software permite a consideração da aderência perfeita entre a armadura e o concreto. Desta maneira, as armaduras dimensionadas para a viga do Modelo 01 estão apresentadas na Figura 8-5.

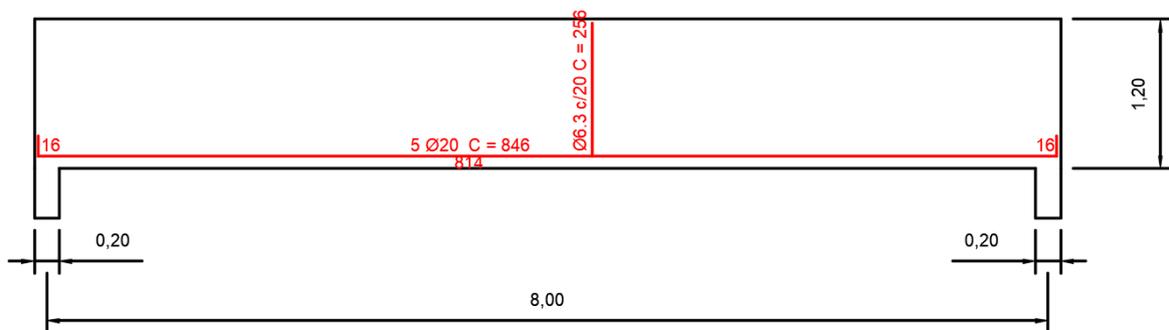


Figura 8-5 – Armaduras dimensionadas para a viga do Modelo 01.

A configuração das armaduras mostrada na Figura 8-5 foi inserida no modelo da viga realizado no software ATENA para a execução da análise não linear. Foram realizados 20 incrementos de carga, desde 0 até o carregamento total de 280 kN. Para evitar concentrações de tensões elevadas no modelo, a carga concentrada foi inserida em um platô de comprimento igual a 1 m constituído por um material no estado plano de tensões. Esse platô transmite para a viga as tensões provenientes do carregamento de maneira a amenizar as elevadas concentrações de tensão oriundas da aplicação da carga em um único nó da viga. A variação do incremento de carga é constante e igual a 0,014 MN, iniciando em 0 e terminando em 0,28 MN. No último incremento, tem-se a carga total aplicada na estrutura. A Figura 8-6 apresenta as armaduras dimensionadas para a viga do Modelo 01, os carregamentos aplicados e as condições de apoio.

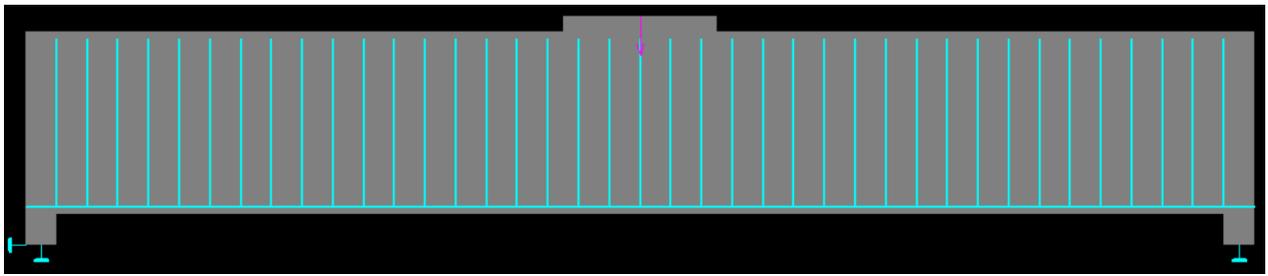


Figura 8-6 – Viga do Modelo 01 dimensionada de acordo com o método de bielas e tirantes.

A Figura 8-7 apresenta as tensões principais S1 e as fissuras que ocorrem na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado na estrutura.

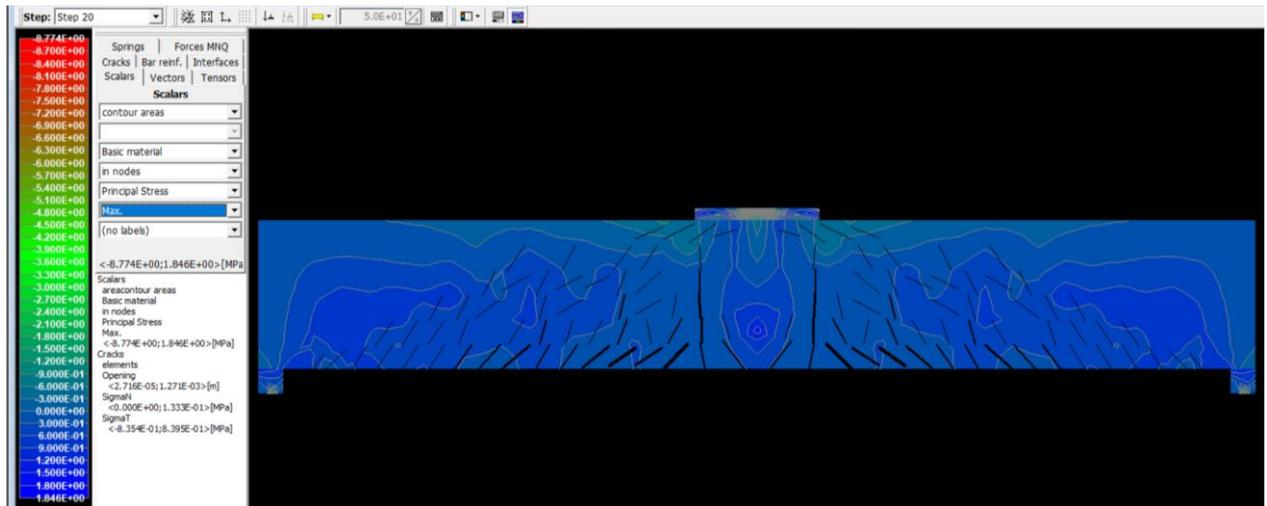


Figura 8-7 – Tensões principais S1 e fissuras na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado.

A Figura 8-8 apresenta as tensões principais S2 e as fissuras que ocorrem na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado na estrutura.

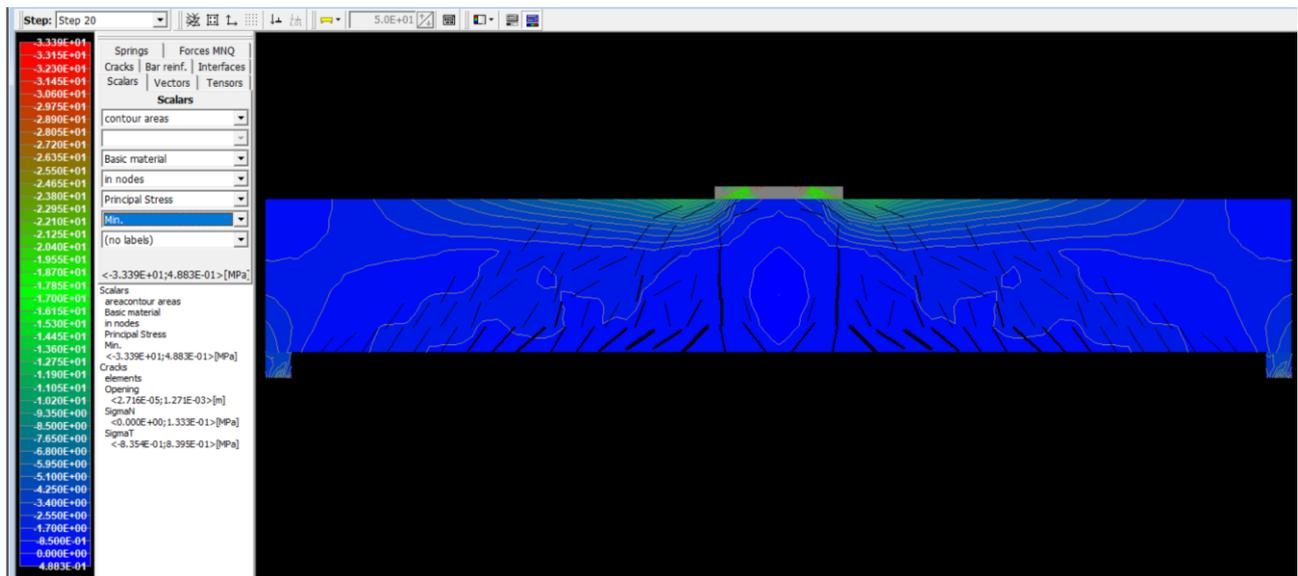


Figura 8-8 - Tensões principais S2 e fissuras na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado.

É possível ainda obter nos resultados da análise realizada pelo software ATENA, os tensores de tensões principais que ocorrem na estrutura. A Figura 8-9 apresenta esses tensores de tensões principais para a viga do Modelo 01.

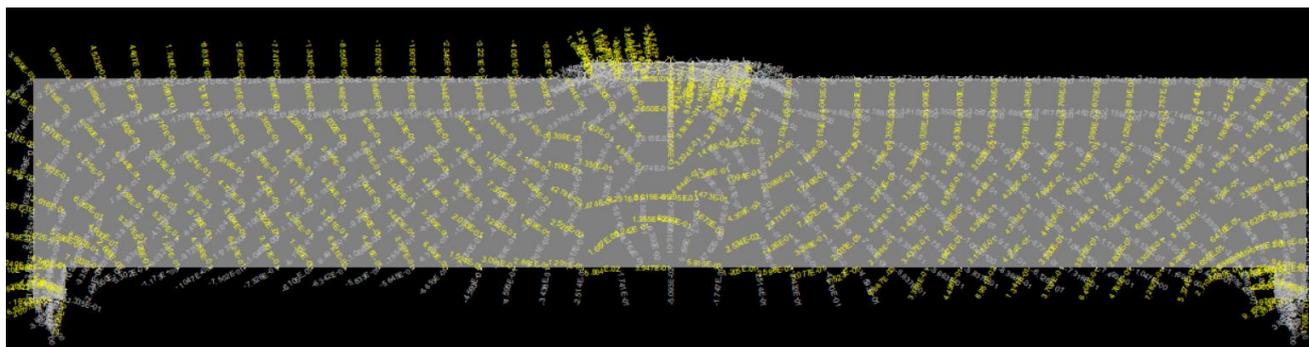


Figura 8-9 – Tensores de tensões principais que ocorrem na viga do Modelo 01 para o carregamento completo aplicado.

A Figura 8-9 mostra uma importante informação a respeito da análise não linear deste elemento estrutural. Apesar dos valores presentes nessa figura apresentarem-se pouco legíveis para a taxa de zoom que engloba toda a viga, eles representam em uma mesma figura, tanto as tensões principais S1 (textos na cor amarela) quanto as tensões principais S2 (textos na cor cinza). Além disso, os textos são dispostos na inclinação da direção em que ocorrem tais tensões principais, ou seja, é possível o usuário do software identificar o caminho das tensões principais atuantes na estrutura observando apenas esta figura.

A Figura 8-10 apresenta as tensões que ocorrem nas armaduras utilizadas na viga e provenientes do dimensionamento oriundo do método de bielas e tirantes.

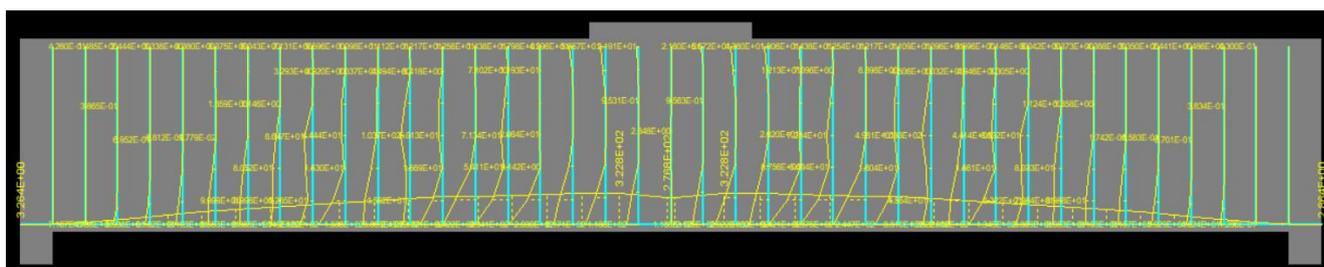


Figura 8-10 – Tensões nas armaduras utilizadas na viga provenientes do dimensionamento pelo método de bielas e tirantes.

Observando a Figura 8-10, é possível perceber que nenhuma barra atingiu a tensão de 435 MPa, a qual é utilizada no dimensionamento das áreas de aço das barras presentes nos elementos estruturais de concreto armado dimensionados no estado limite último. Isso pode ser explicado pelo fato de que na análise não linear realizada pelo software

ATENA, foi considerada uma parcela de resistência à tração do concreto, diferenciando-se do dimensionamento usual, em que todas as tensões de tração que ocorrem nos elementos estruturais são resistidas apenas pelas armaduras.

Observando as Figura 8-7 e 8-8 e sobretudo a Figura 8-9, é possível verificar que para o elemento estrutural analisado, as trajetórias das tensões principais provenientes da análise não linear pelo método dos elementos finitos realizada pelo software ATENA não se diferenciam de maneira considerável das trajetórias oriundas da análise linear elástica realizada também pelo método dos elementos finitos a partir do software Robot Structural. Isso significa que para o elemento estrutural analisado, o modelo de treliça isostática traçado a partir das tensões principais em uma análise linear elástica é válido também para a estrutura trabalhando no estado limite de serviço, pois a consideração das fissuras não mostrou diferenças relevantes nas configurações de tensões principais entre um modelo e outro de análise.

## **8.2. Modelo 02 – Parede engastada com abertura e carga concentrada aplicada**

O Modelo 02 analisado neste trabalho consta de uma parede com abertura, engastada em sua extremidade direita e livre em sua extremidade esquerda. Essa parede foi considerada com largura da seção transversal de 25 cm e nela atua uma carga concentrada de 300 kN com sentido para baixo em sua extremidade livre. A Figura 8-11 apresenta o Modelo 02.

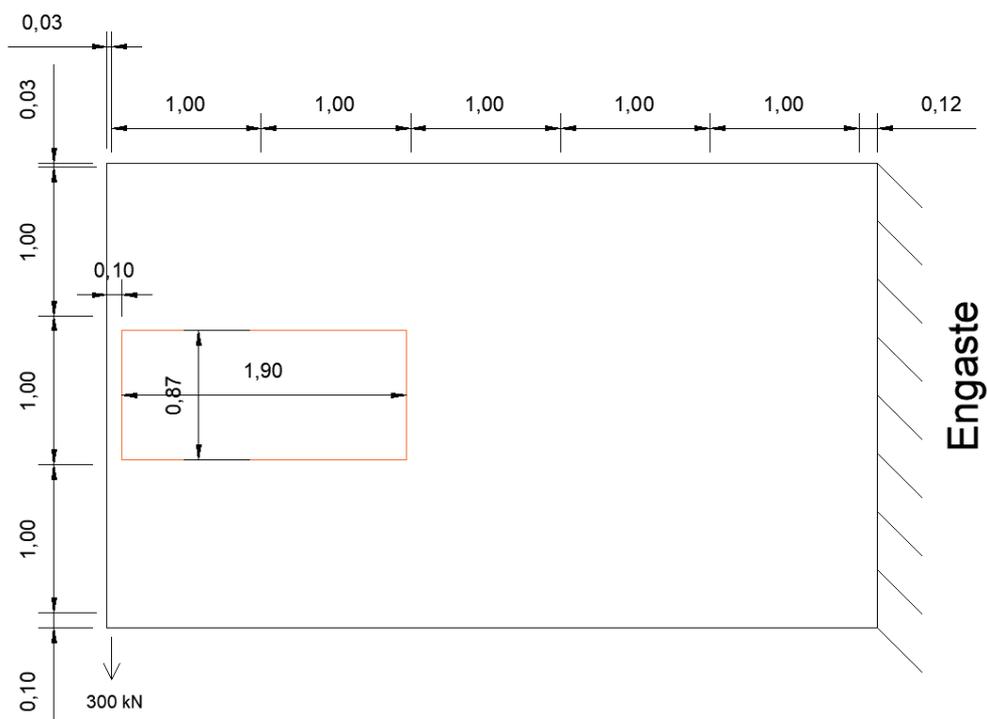


Figura 8-11 – Configuração geométrica do Modelo 02 (cotas em metros).

Para efeito dos cálculos, o vão da parede foi tomado como sendo de 5,00 metros, resultando, desta maneira, em um momento fletor de  $1.500 \text{ kN.m}$  no engaste. Para estabelecer o modelo de bielas e tirantes foi realizada no software Robot Structural a análise das tensões principais elásticas decorrentes deste carregamento por meio do método de elementos finitos. A carga de 300 kN foi inserida como carregamento distribuído ao longo de um comprimento de 20 cm. Isso foi realizado para não ocasionar elevada concentração de tensões provenientes do carregamento concentrado em apenas um nó do modelo. Dessa maneira, foi aplicada uma carga distribuída de  $1.500 \text{ kN/m}$  ao longo de 20 cm. Considerando o fator de 1,4 estabelecido na NBR 6118:2014 para a majoração do carregamento, foi inserida na estrutura a carga de  $2.100 \text{ kN/m}$  ao longo dos 20 cm de comprimento, representando  $420 \text{ kN}$ , ou seja,  $300 \times 1,4 = 420 \text{ kN}$ . A Figura 8-12 apresenta o mapa de tensões principais máximas (S1) na parede com abertura que representa o Modelo 02 de análise, enquanto a Figura 8-13 apresenta o mapa de tensões principais mínimas (S2) que atuam nesse mesmo modelo.

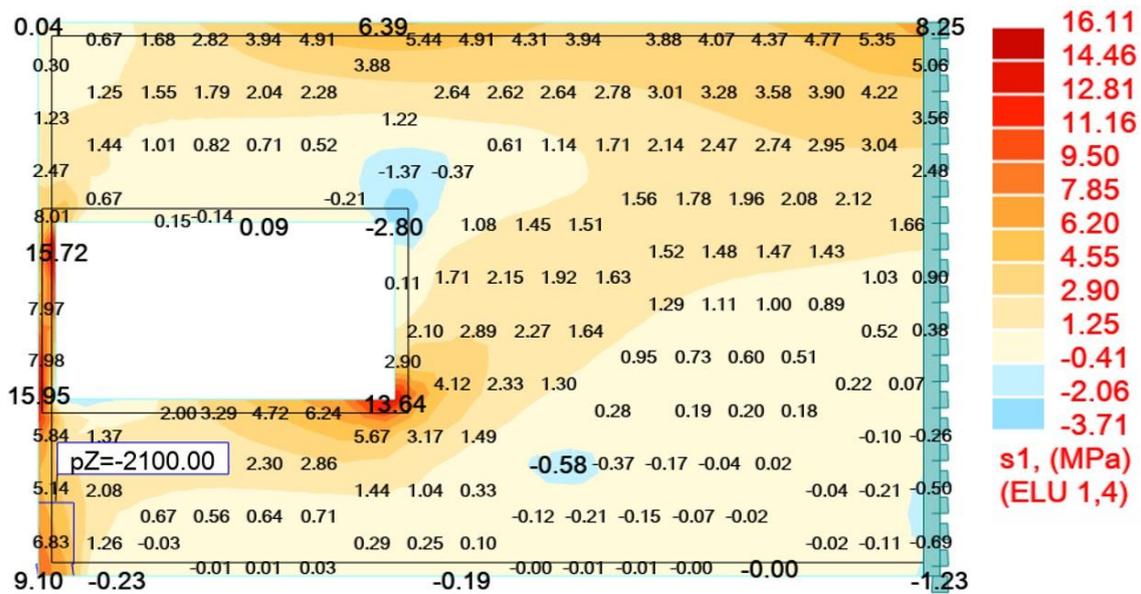


Figura 8-12 - Mapa de tensões principais S1 (MPa) na parede com abertura.

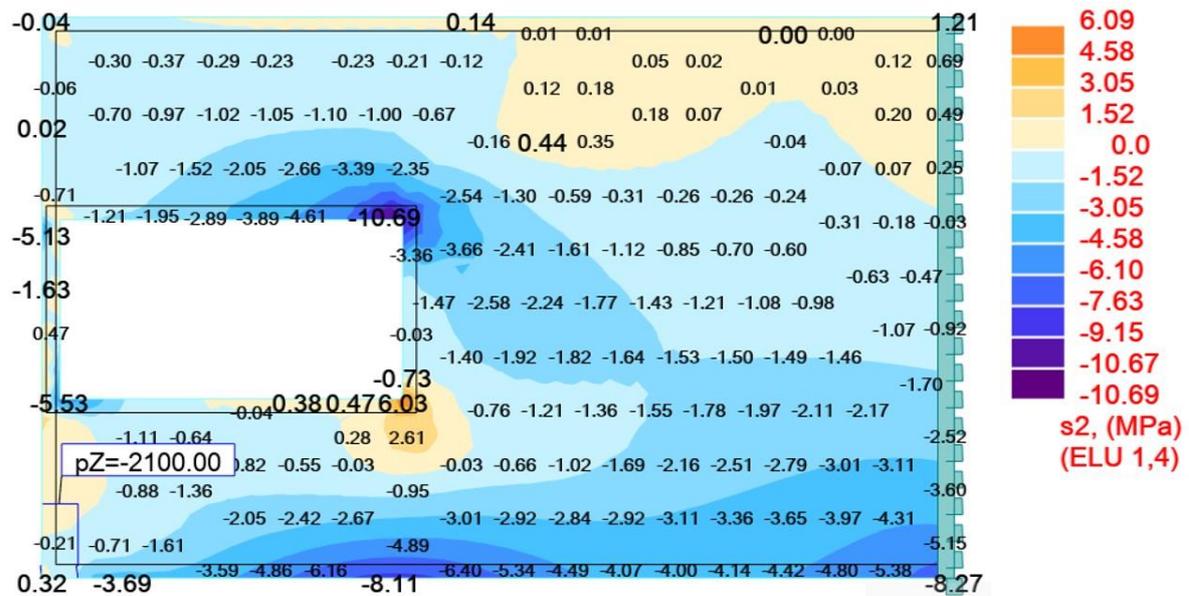


Figura 8-13 - Mapa de tensões principais S2 (MPa) na parede com abertura.

É possível perceber pela Figura 8-12, que existe uma região diagonal com tensões principais de tração que se estende desde a face direita da abertura até o vértice superior direito da parede. Entretanto, neste trabalho não são utilizados estribos inclinados, por isso, foi desenvolvida uma configuração de bielas e tirantes utilizando estribos verticais. A Figura 8-14 apresenta o modelo de bielas e tirantes utilizado.

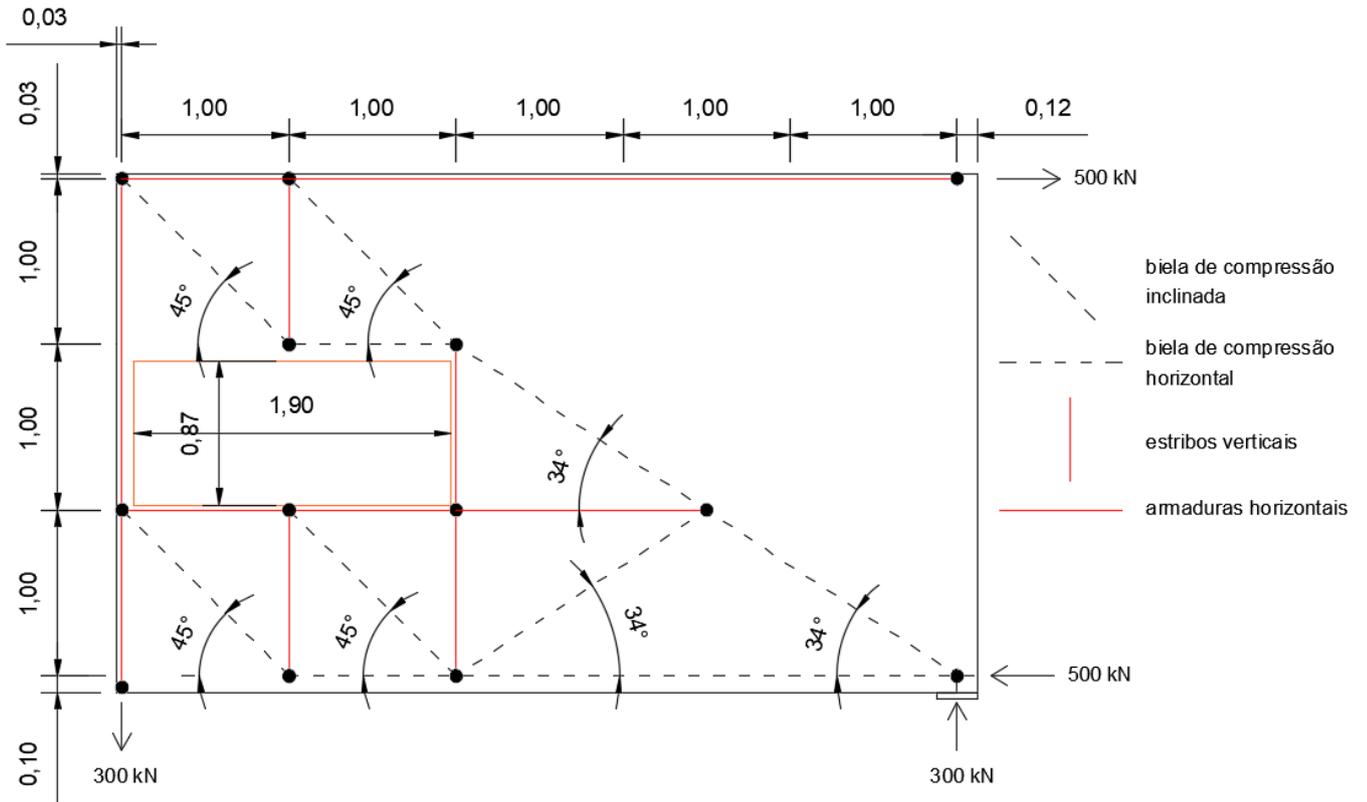


Figura 8-14 – Modelo de bielas e tirantes utilizado para o projeto da parede com abertura.

A Figura 8-15 apresenta as forças axiais que ocorrem nas barras da treliça mostrada na Figura 8-14.

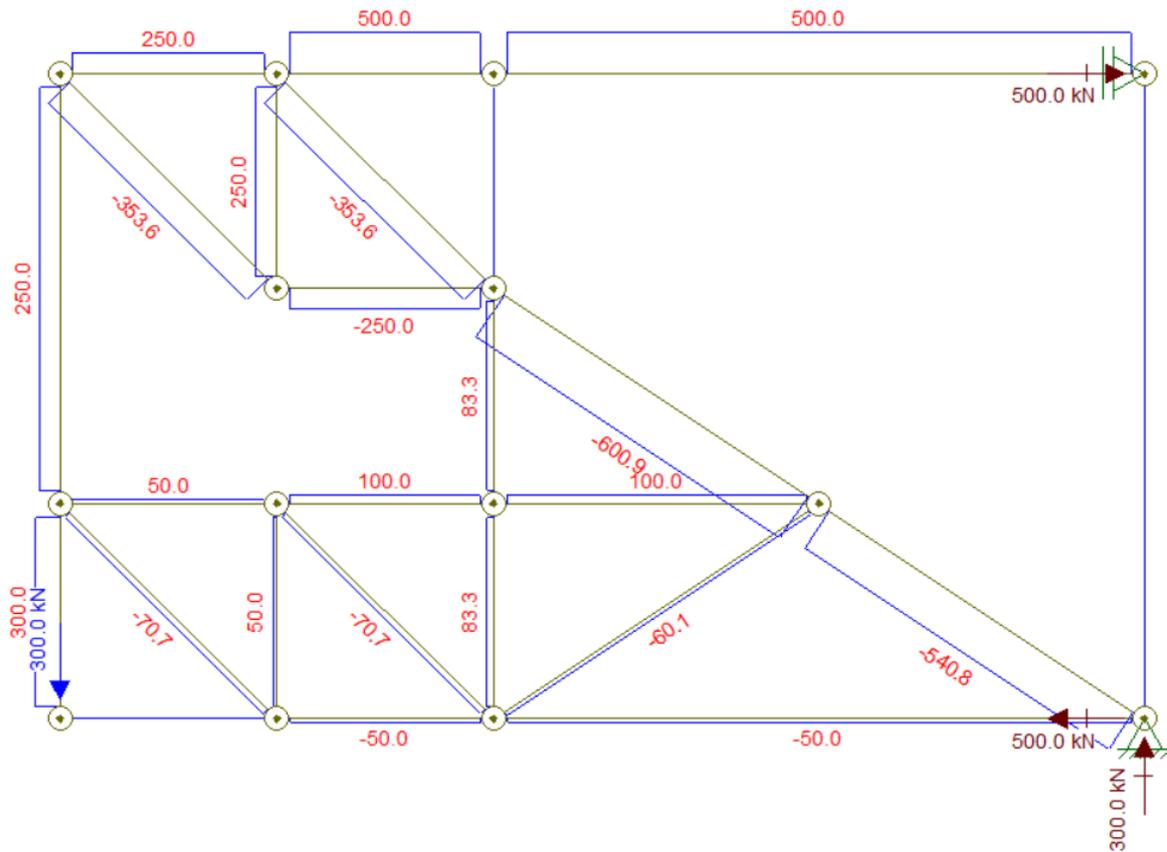


Figura 8-15 – Forças axiais nas barras da treliça que representa o modelo de bielas e tirantes para a parede com abertura.

O dimensionamento foi realizado considerando as seguintes características:

- Cobrimento de 3 cm;
- Aço CA-50;
- Bielas inclinadas em  $45^\circ$  e  $34^\circ$ , lembrando que a NBR6118:2014 permite inclinações de bielas com ângulo cuja tangente varia entre 0,57 e 2;
- Bielas com espessura de 25 cm;
- Estribos verticais distribuídos nas regiões que formam os nós onde atuam forças de tração,

É importante ressaltar que os eixos das barras da treliça representam os centros de gravidade das armaduras e as resultantes das tensões de compressão das bielas. A malha de elementos finitos foi definida com distância de 35 cm entre os nós. A Figura 8-16 apresenta a configuração de projeto para o Modelo 02 analisado neste trabalho, tendo

as armaduras sido dimensionadas através da força de tração majorada pelo fator 1,4 dividida pela tensão de dimensionamento do aço (43,5 kN/cm<sup>2</sup>).

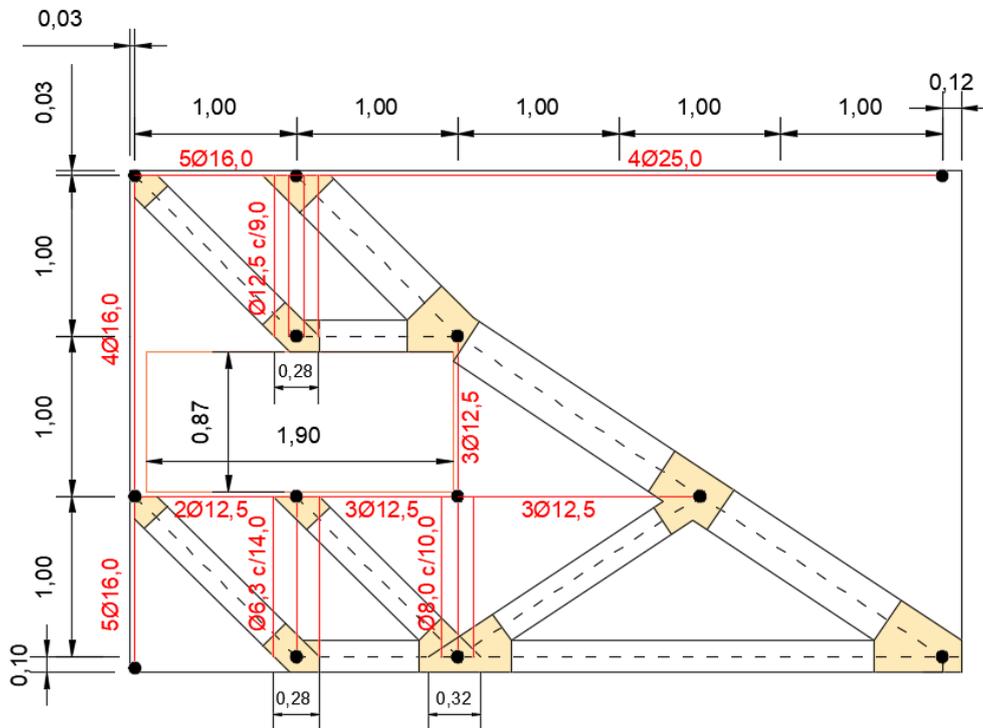


Figura 8-16 – Bielas e armaduras referentes ao projeto do Modelo 02.

A partir da Figura 8-16 é necessário verificar as tensões nas bielas de compressão de acordo com o que é estabelecido pela NBR 6118:2014 e apresentado no Capítulo 3 do presente trabalho.

- Verificação das bielas em regiões de compressão transversal e em nós onde confluem apenas bielas de compressão.

A maior força atuante em uma biela situada em região com tensão de compressão transversal é igual a 250 kN. Dessa maneira:

$$\sigma_{biela} = \frac{1,4 \times 250}{b \cdot t} = \frac{350}{0,25 \times 0,2} = 7.000 \text{ kN/m}^2 = 7,00 \text{ MPa} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned}
 f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\
 &= 16.028,57 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.14}$$

$$\sigma_{biela} < f_{cd1} \rightarrow OK$$

O único nó onde confluem apenas bielas de compressão é aquele situado próximo ao vértice inferior direito da parede e nele atuam quatro forças de compressão que são aplicadas em áreas diferentes. Dessa forma:

- Para a força de 300 kN aplicada na vertical:

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 300}{b \cdot t} = \frac{420}{0,25 \times 0,24} = 7.000 \text{ kN/m}^2 = 7,0 \text{ MPa} \tag{8.15}$$

- Para a força de 500 kN aplicada na horizontal:

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 500}{b \cdot t} = \frac{700}{0,25 \times 0,2} = 14.000 \text{ kN/m}^2 = 14 \text{ MPa} \tag{8.16}$$

- Para a força de 50 kN aplicada na horizontal:

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 50}{b \cdot t} = \frac{70}{0,25 \times 0,2} = 1.400 \text{ kN/m}^2 = 1,40 \text{ MPa} \tag{8.17}$$

- Para a força de 540,8 kN aplicada na diagonal:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 540,8}{b \cdot t} = \frac{757,12}{0,25 \times 0,3} = 10.094,93 \text{ kN/m}^2 \\
 &= 10,1 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}
 f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\
 &= 16.028,57 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.19}$$

Todas as tensões no nó  $\leq 16.028,57 \text{ kN/m}^2$

- Verificação das bielas em regiões onde a resistência à compressão é reduzida pela presença de trações transversais devidas às armaduras e a compressão é transmitida através das fissuras.

A maior força atuante em uma biela situada nessas regiões é igual a 600,9 kN. Dessa maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{biela} &= \frac{1,4 \times 600,9}{b \cdot t} = \frac{841,26}{0,25 \times 0,3} = 11.216,80 \text{ kN/m}^2 \\ &= 11,2 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (8.20)$$

$$\begin{aligned}f_{cd2} &= 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\ &= 11.314,28 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.21)$$

$$11.314,28 \text{ kN/m}^2 > 11.216,80 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

Também devem ser comparadas com  $f_{cd2}$ , as tensões que atuam em nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados. A maior força atuante que incide em um nó nessa condição é igual a 353 kN e no caso mais desfavorável essa força incide no nó proveniente de uma biela com 20 cm de largura. Dessa maneira:

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 353}{b \cdot t} = \frac{494,2}{0,25 \times 0,2} = 9.884,0 \text{ kN/m}^2 = 9,88 \text{ MPa}\quad (8.22)$$

$$\begin{aligned}f_{cd2} &= 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\ &= 11.314,28 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.23)$$

$$11.314,28 \text{ kN/m}^2 > 9.884,0 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

É necessário ainda, verificar a tensão de compressão nos nós onde conflui apenas um tirante tracionado. A maior força que incide em um nó nessa condição é igual a 600,9 kN e essa força incide no nó por meio de uma biela com 30 cm de largura. Dessa maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 600,9}{b \cdot t} = \frac{841,26}{0,25 \times 0,3} = 11.216,8 \text{ kN/m}^2 \\ &= 11,2 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (8.24)$$

$$\begin{aligned}f_{cd3} &= 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\ &= 13.577,14 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.25)$$

$$13.577,14 \text{ kN/m}^2 > 11.216,8 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

É possível verificar que para todas as bielas foram satisfeitas as tensões limites de compressão no concreto estabelecidas pela NBR 6118:2014. Após o dimensionamento das armaduras e verificação das tensões nas bielas de compressão, foi conduzida a modelagem da estrutura no software ATENA. O modelo de parede com sua armadura dimensionada está apresentado na Figura 8-17. O carregamento foi inserido através de uma carga pontual e foram considerados 20 incrementos de carga até o total de 420 kN.

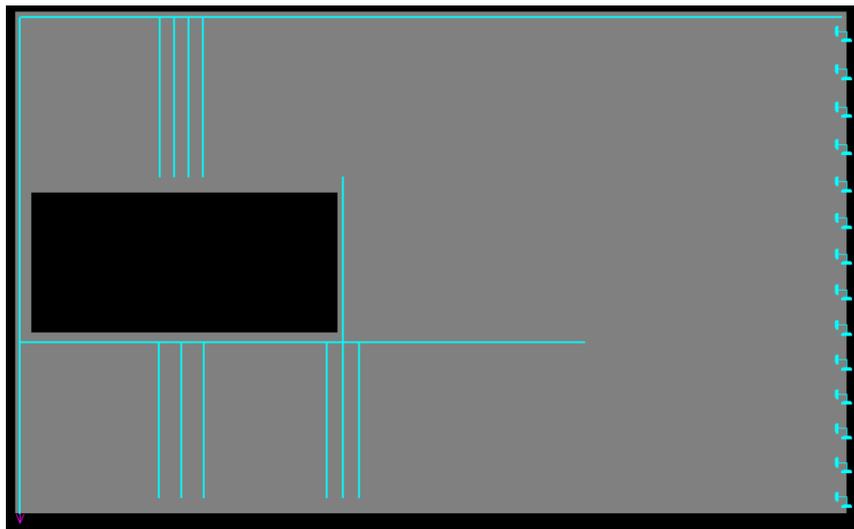


Figura 8-17 - Modelagem no ATENA das armaduras decorrentes da 1ª configuração da parede.

A Figura 8-18 ilustra as tensões principais mínimas no concreto, a abertura das fissuras e as tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 420 kN.

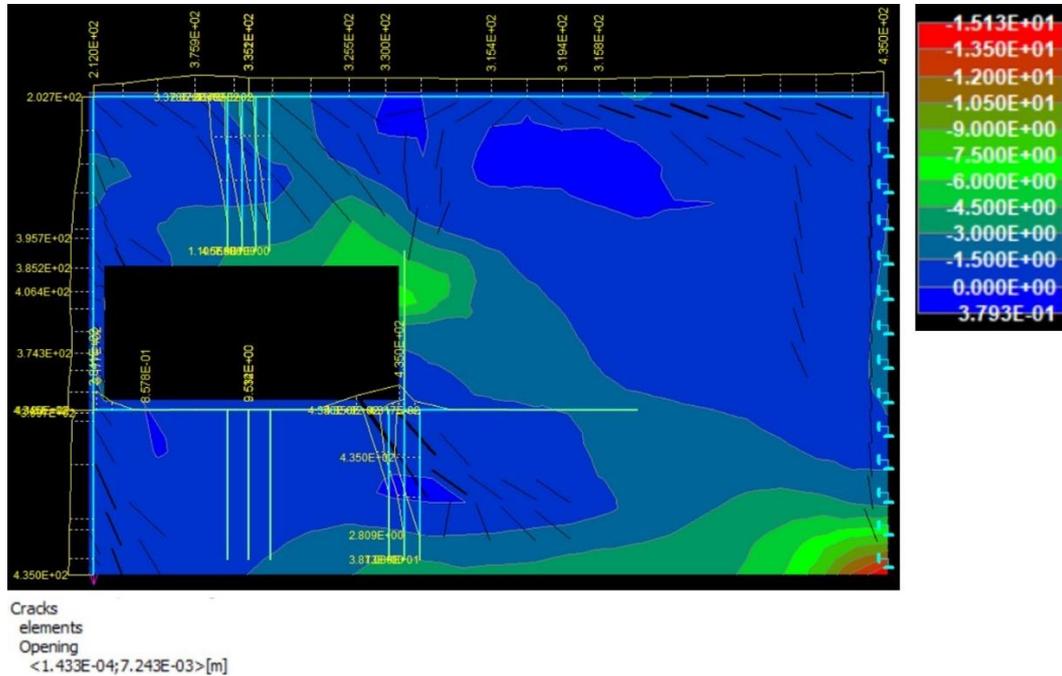


Figura 8-18 – Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 420 kN.

A partir da Figura 8-18 é possível observar que o modelo de bielas e tirantes obtido para a parede permitiu um dimensionamento capaz de cumprir o estado limite último da estrutura, visto que o concreto não atingiu sua resistência última em nenhum local e o aço atingiu sua resistência de cálculo apenas em alguns pontos. Ao comparar a Figura 8-13 com a Figura 8-18, é possível se observar um aspecto interessante. As tensões principais de compressão no concreto não alteram sua configuração entre a análise linear elástica (realizada no Robot) e a análise não linear, considerando a fissuração (realizada no ATENA). A Figura 8-19 apresenta as tensões principais máximas no concreto e as barras da armadura para o carregamento de 84 kN, referente ao 4º incremento de carga, que corresponde ao carregamento imediatamente anterior ao surgimento da primeira fissura na estrutura.

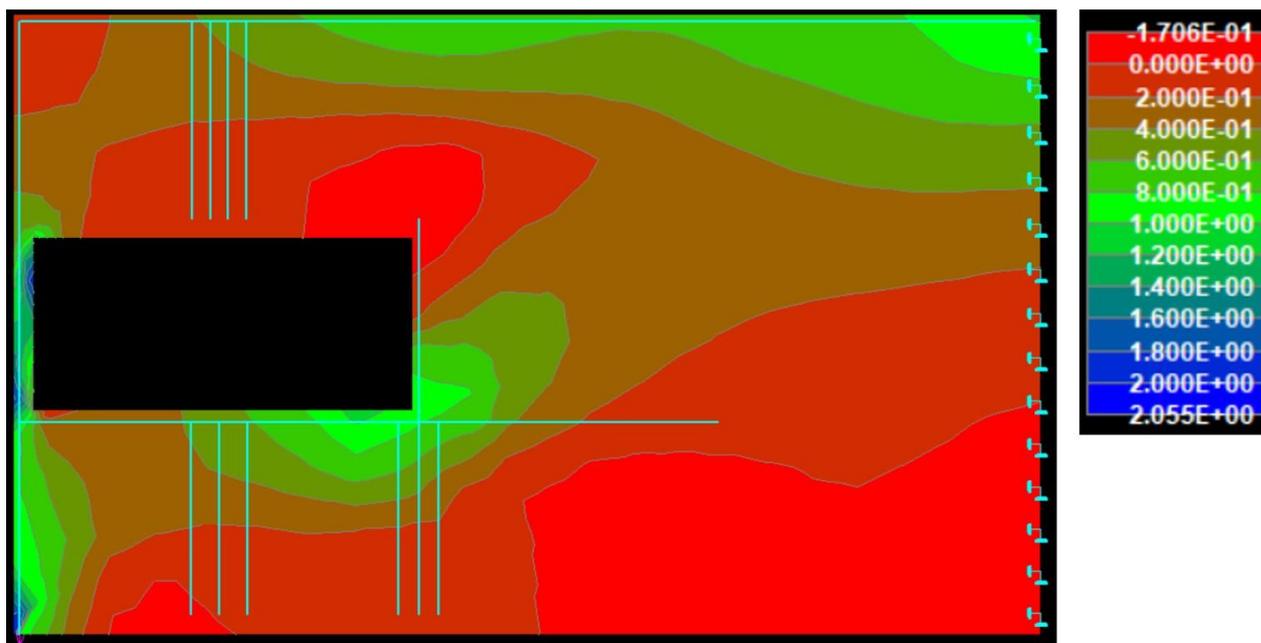


Figura 8-19 – Tensões principais máximas no concreto e barras da armadura para o carregamento de 84 kN.

A comparação da Figura 8-12 com a Figura 8-19 aponta similaridade entre a configuração das tensões principais máximas no concreto decorrentes da análise linear realizada no Robot (para o carregamento de 420 kN) e a análise não linear considerando a fissuração apresentada no ATENA (para o carregamento de 84 kN, imediatamente antes da formação da primeira fissura). É interessante notar que conforme as tensões de tração superam a resistência à tração do concreto, os valores referentes às tensões de tração nessas regiões passam a sofrer uma redução, podendo inclusive passar a apresentar regiões de compressão entre as fissuras. Isso pode ser observado na Figura 8-20 (carregamento de 210 kN, referente ao 10° incremento de carga), na Figura 8-21 (carregamento de 315 kN, referente ao 15° incremento de carga) e na Figura 8-22 (carregamento total de 420 kN, referente ao 20° incremento de carga).

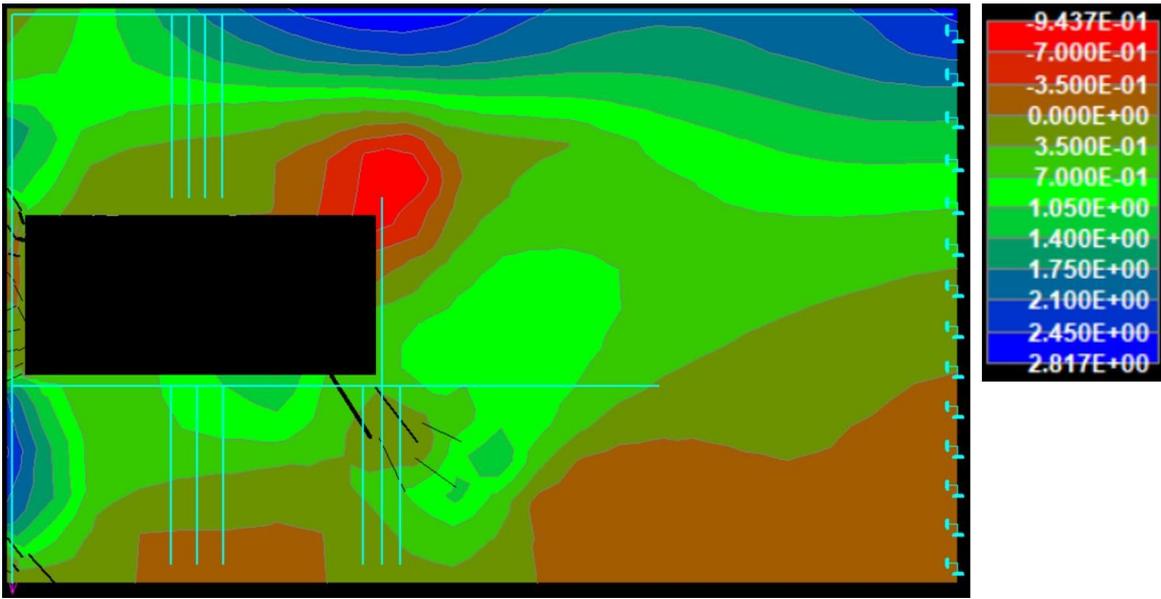


Figura 8-20 – Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 210 kN.

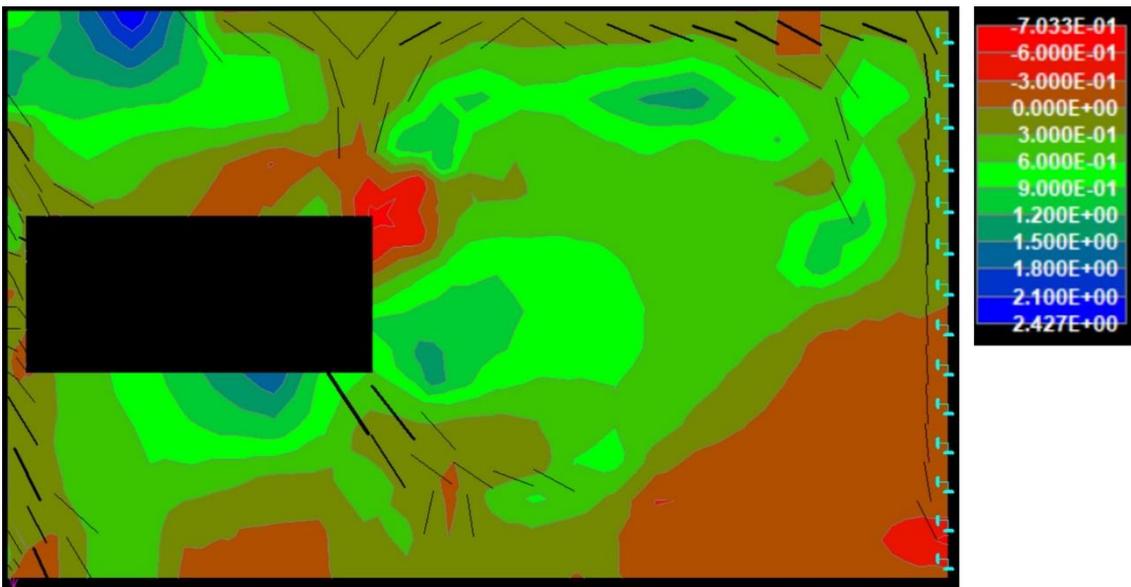


Figura 8-21 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 315 kN.

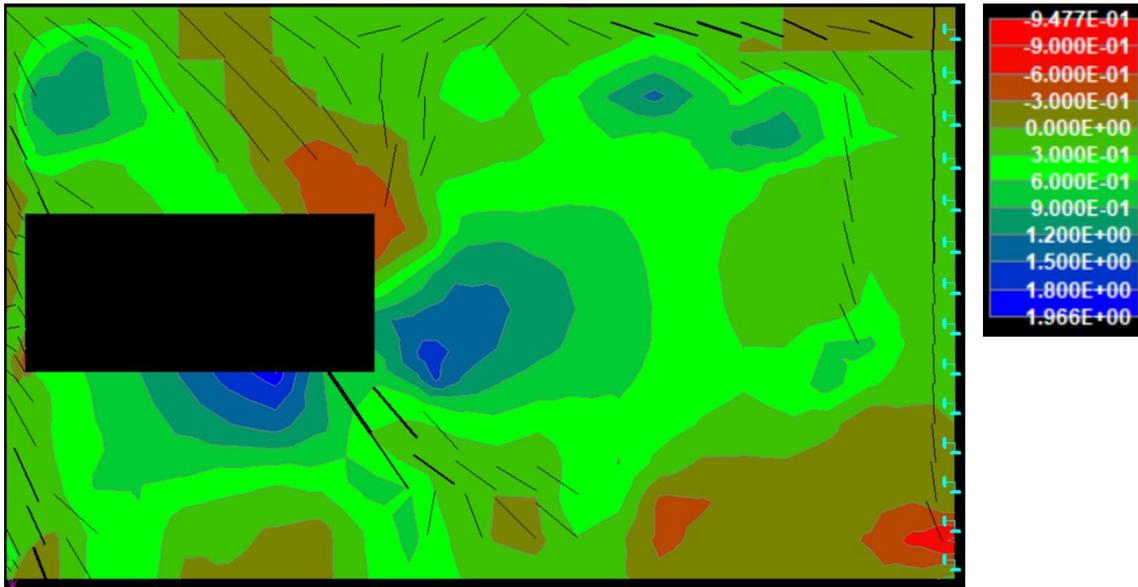


Figura 8-22 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 420 kN.

Observando a Figura 8-22 é possível notar uma linha de fissuras praticamente verticais que ocorrem paralelamente à face direita da parede, onde está localizado o engaste. Para justificar a ocorrência dessas fissuras, é interessante chamar a atenção para a diagonal de tração que se estende desde a face direita da abertura até a região próxima ao vértice superior direito da parede, a qual está mostrada na Figura 8-19.

A Figura 8-23 apresenta as tensões principais máximas no concreto na região próxima ao vértice superior direito da parede para o 11º incremento de carga, imediatamente antes da ocorrência das fissuras nessa região. Esse carregamento corresponde a 231 kN.

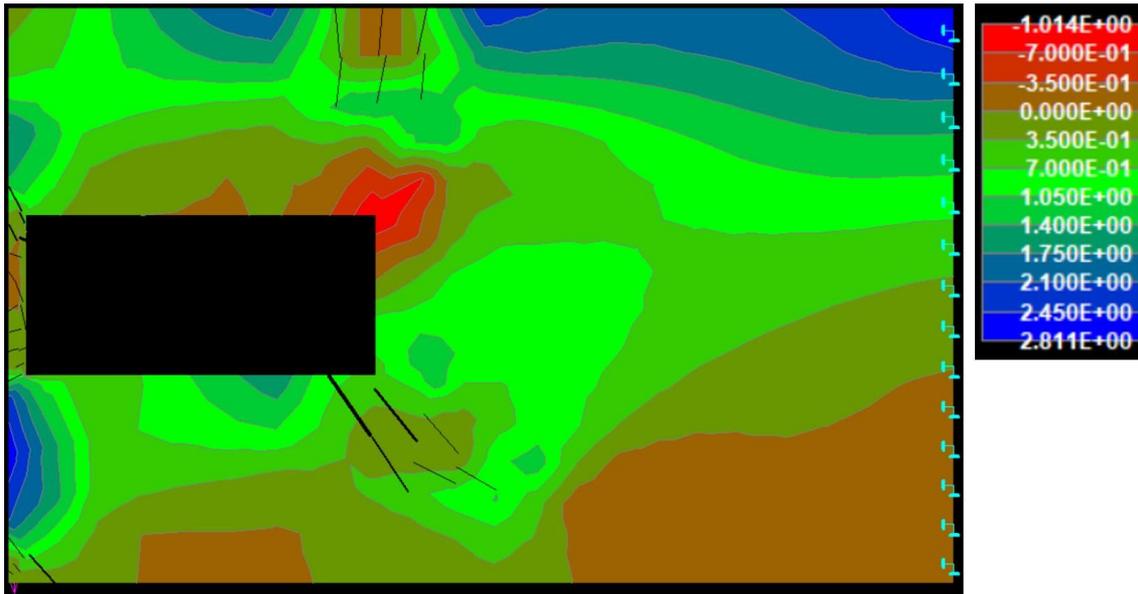


Figura 8-23 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 231 kN.

É possível observar na Figura 8-23, que a região próxima ao vértice superior direito da parede apresenta valores de tensões de tração próximos à resistência de tração considerada para o concreto (2,9 MPa). Observando a região próxima ao vértice inferior direito da parede, é possível constatar que para o 11º incremento de carga, essa região apresenta tensões principais máximas de compressão no concreto. No entanto, quando é visualizado o próximo incremento de carga, ou seja, o 12º incremento, referente ao carregamento de 252 kN, surgem fissuras praticamente verticais ao longo de um comprimento paralelo e próximo à face direita da parede, desde a região próxima ao seu vértice inferior esquerdo até a região próxima ao seu vértice superior direito. Essas fissuras surgem para esse incremento de carga mesmo que para o incremento imediatamente anterior essa região não estivesse apresentando tensões principais de tração próximas à tensão resistente do concreto. As tensões principais máximas no concreto e as fissuras ocasionadas no 12º incremento de carga estão apresentadas na Figura 8-24.

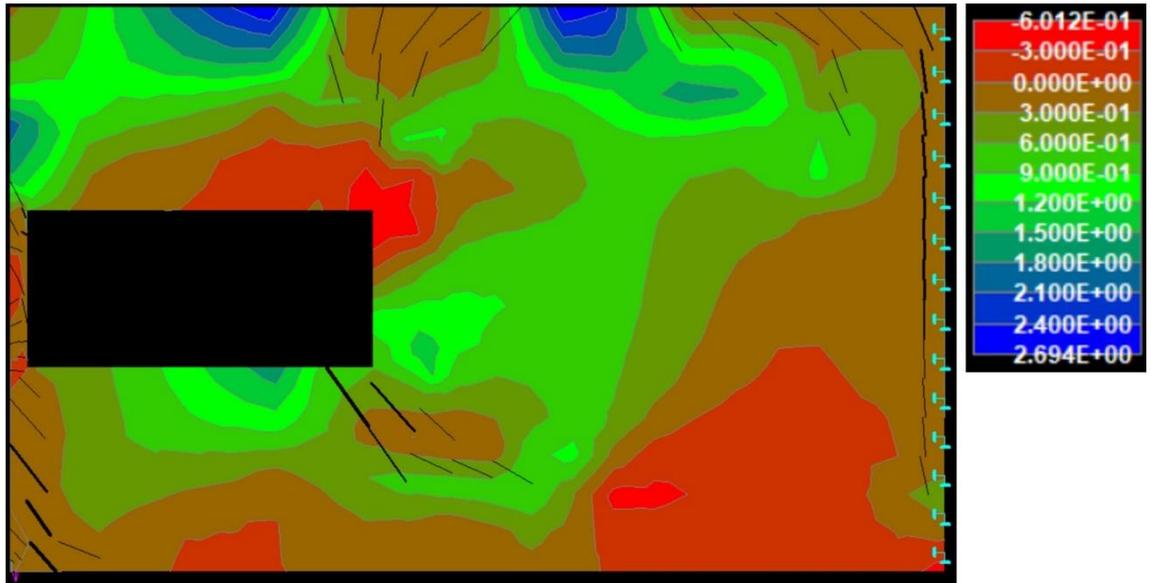


Figura 8-24 - Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento de 252 kN.

Para explicar o surgimento dessas fissuras praticamente verticais que se estendem paralelamente à face direita da parede ao longo da quase totalidade desse comprimento é possível se pensar na hipótese de que essa região possa ter atingido a resistência à tração do concreto em um instante entre o 11º e o 12º incremento de carga mesmo que no 11º incremento ela não apresentasse valores de tensões principais máximas que estivessem próximos à resistência à tração considerada para o concreto. Isso pode ter ocorrido após a região próxima ao vértice superior direito da parede ter atingido o valor de resistência à tração do concreto e dessa maneira, ao fissurar, essa região reduz sua capacidade de absorver tensões de tração, podendo ter surgido alguns picos de tensões na região onde ocorrem as fissuras paralelas à face direita da parede, explicando assim, o surgimento dessas fissuras.

É interessante observar que essa hipótese indica que as fissuras podem ocorrer em locais que não apresentariam tensões de tração próximas à resistência à tração do concreto para um determinado incremento de carga, mas que mesmo assim, no incremento posterior essa resistência seja atingida decorrente de outra região no entorno que superou a resistência à tração. Essa região então, passa a sofrer redução na sua capacidade de absorver novas tensões de tração, podendo ocasionar picos de tensões em regiões no seu entorno.

Dessa forma, o modelo de bielas e tirantes apresentado para o dimensionamento da parede com abertura foi capaz de atender ao estado limite último. Convém levar em consideração o fato de que as barras verticais são distribuídas ao longo da dimensão da região dos nós onde atuam forças de tração na treliça e sendo assim, quanto maior for a largura considerada para as bielas, maior será a região em que as armaduras verticais serão distribuídas.

### 8.3. Modelo 03 – Consolo curto

O modelo 03 é composto por um consolo curto em que uma carga  $P$  é aplicada. Essa carga  $P$  tem valor característico de 400 kN e a revisão da NBR 6118:2014, a qual está sendo desenvolvida no momento em que este trabalho é desenvolvido, indica que para consolos curtos as cargas devem ser majoradas por um fator de 1,2 além do fator de 1,4 que já estava previsto na NBR 6118:2014. Dessa maneira, a carga majorada aplicada é de  $P = 400 \times 1,4 \times 1,2 = 672 \text{ kN}$ . Foi utilizado o aço CA-50, concreto C-30 e uma largura da seção transversal igual a 25 cm. A Figura 8-25 apresenta a ilustração do Modelo 03, referente ao consolo curto com a carga  $P$  aplicada.

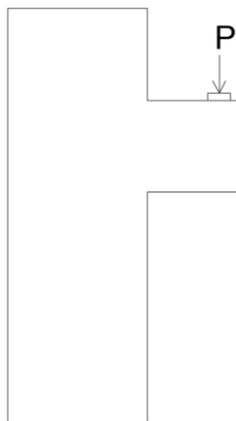


Figura 8-25 – Modelo 03, referente ao consolo curto.

Para traçar o modelo de bielas e tirantes, foi inicialmente realizada a análise linear elástica das tensões principais que ocorrem na estrutura com o software Robot Structural. A carga foi aplicada como carregamento uniformemente distribuído em um comprimento de 43 cm. Ou seja, distribuindo-se 672 kN em 0,43 m, tem-se 1562,79 kN/m. A Figura 8-26 apresenta as tensões principais máximas que ocorrem na estrutura na análise linear

elástica e a Figura 8-27 apresenta as tensões principais mínimas na estrutura para esse mesmo tipo de análise.

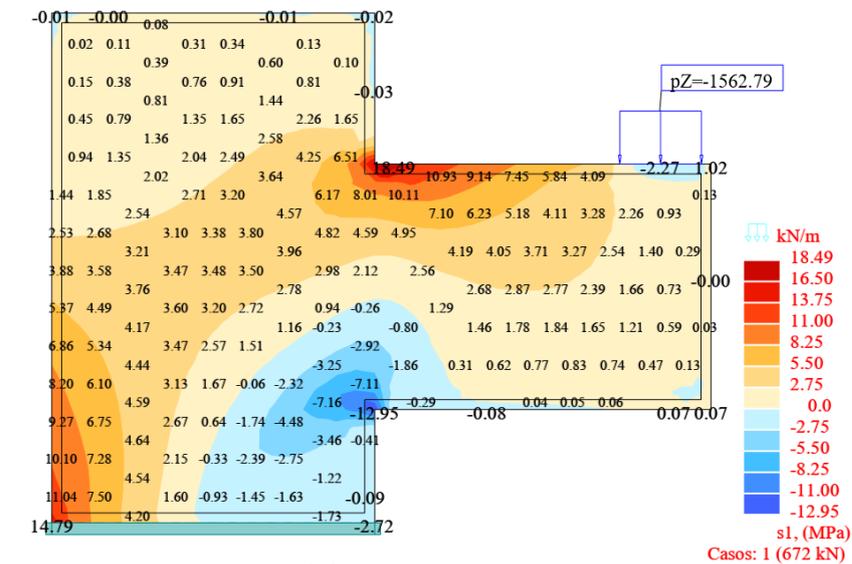


Figura 8-26 - Tensões principais máximas que ocorrem na estrutura na análise linear elástica.

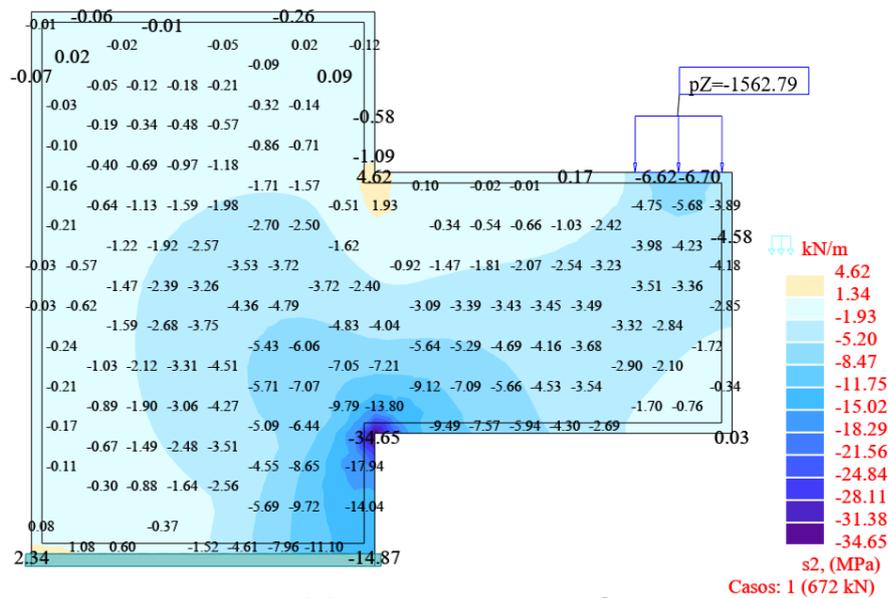


Figura 8-27 - Tensões principais mínimas que ocorrem na estrutura na análise linear elástica.

O modelo de bielas e tirantes que equilibra esse sistema estrutural está apresentado na Figura 8-28.

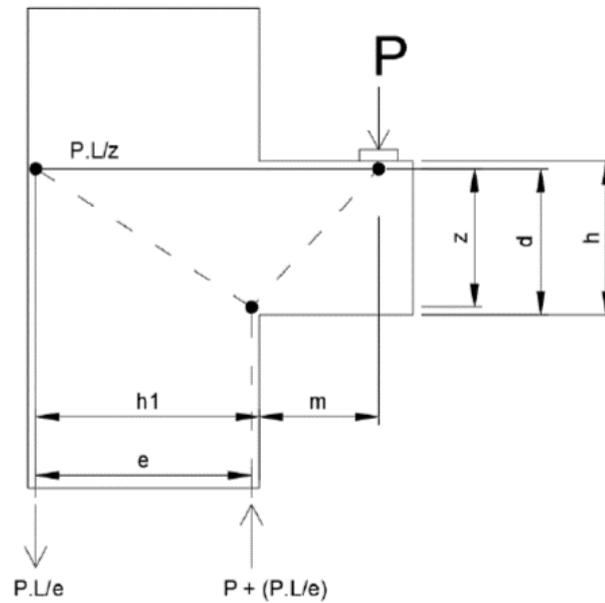


Figura 8-28 – Modelo de bielas e tirantes para o consolo curto.

É possível perceber na Figura 8-28 que existe um nó onde atuam apenas forças de compressão. A verificação das tensões no concreto se dá a partir da análise deste nó, o qual indica a espessura necessária que deve haver nas bielas de compressão para que o concreto esteja submetido a níveis de tensões dentro dos limites estabelecidos pela NBR 6118:2014. As componentes que formam o triângulo neste nó estão mostradas na Figura 8-29.

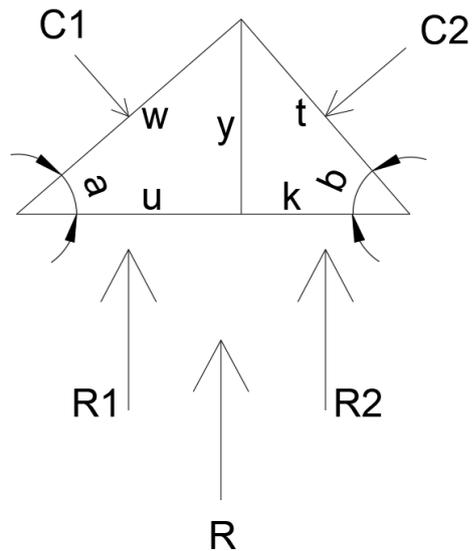


Figura 8-29 – Detalhe das componentes de compressão do triângulo formado.

Observando-se a Figura 8-28, é possível perceber que as componentes  $h_1$ ,  $m$ ,  $d$  e  $h$  são conhecidas previamente, pois fazem parte da geometria da estrutura e da disposição das armaduras. Essas componentes são definidas para este exemplo como:

$$h_1 = 1,60 \text{ m}$$

$$m = 1,50 \text{ m}$$

$$d = 1,20 \text{ m}$$

$$h = 1,30 \text{ m}$$

Dessa maneira é possível calcular as componentes  $k$  e  $y$  do triângulo de pressões mostrado na Figura 8-29. Esse cálculo é baseado na Figura 8-30.

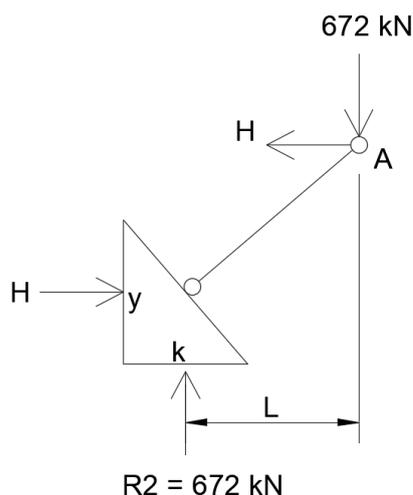


Figura 8-30 – Parte direita do triângulo hidrostático.

O valor do comprimento  $k$  deve ser suficiente para que a tensão no concreto seja igual ou inferior à  $f_{cd1}$ , pois, como visto anteriormente, um nó onde atue apenas tensões de compressão deve apresentar tensões inferiores a esse limite dado pela NBR 6118:2014. Portanto:

$$f_{cd1} = 0,85 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times f_{cd} \quad (8.26)$$

$$f_{cd1} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} = 16028,6 \text{ kPa} \quad (8.27)$$

$$k = \frac{672}{0,25 \times 16028,6} = 0,1677 \text{ m} \quad (8.28)$$

$$L = m + \frac{k}{2} \quad (8.29)$$

$$L = 1,5 + \frac{0,1677}{2} = 1,58385 \cong 1,58 \text{ m} \quad (8.30)$$

Para se calcular o valor da força horizontal H, realiza-se o equilíbrio de momentos fletores em relação ao ponto A. Dessa maneira:

$$P.L - H.\left(d - \frac{y}{2}\right) = 0 \quad (8.31)$$

$$H.\left(d - \frac{y}{2}\right) = P.L \quad (8.32)$$

Mas:

$$P = k.b.f_{cd1} \quad (8.33)$$

Da mesma maneira que foi feito para calcular o valor de  $k$ , para que a força horizontal que incide no nó hidrostático seja inferior a  $f_{cd1}$ :

$$H = y.b.f_{cd1} \quad (8.34)$$

Substituindo:

$$y.d.f_{cd1}\left(d - \frac{y}{2}\right) = k.b.f_{cd1}.L \quad (8.35)$$

Portanto:

$$y.d - \frac{y^2}{2} = k.L \quad (8.36)$$

$$-\frac{y^2}{2} + y.d - k.L = 0 \quad (8.37)$$

$$y^2 - 2.y.d + 2.k.L = 0 \quad (8.38)$$

$$y = \frac{2.d \pm \sqrt{4.d^2 - 8.k.L}}{2} \quad (8.39)$$

$$y = d - \sqrt{d^2 - 2.k.L} \quad (8.40)$$

Para que haja possibilidade de redistribuição de momentos fletores, é indicado pela NBR 6118:2014 que  $y \leq 0,8 \times 0,45 \cdot d$ . Assim:

$$y = 1,2 - \sqrt{1,2^2 - 2 \times 0,1677 \times 1,58385} = 0,2467 \text{ m} \quad (8.41)$$

Sendo:

$$0,8 \times 0,45 \times 1,2 = 0,432 \text{ m} \quad (8.42)$$

$$0,2467 \text{ m} \leq 0,432 \text{ m} \quad \rightarrow OK$$

Dessa maneira é possível calcular o braço de alavanca  $z$ , o qual está apresentado na Figura 8-28.

$$z = d - \frac{y}{2} \quad (8.43)$$

$$z = 1,2 - \frac{0,2467}{2} = 1,0766 \text{ m} \quad (8.44)$$

A força horizontal  $H$  de tração que incide no ponto A pode ser calculada através do equilíbrio de momentos em relação ao ponto B indicado na Figura 8-31.

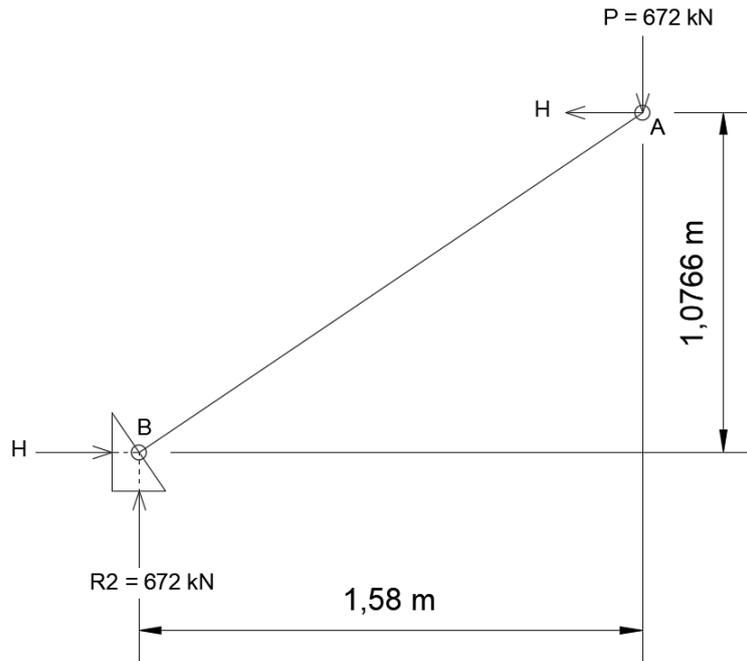


Figura 8-31 – Parte direita do triângulo hidrostático com os valores de  $z$  e  $L$  calculados.

Portanto:

$$H \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) - P \cdot L = 0 \quad (8.45)$$

$$H = \frac{P \cdot L}{d - \frac{y}{2}} \quad (8.46)$$

$$H = \frac{672 \times 1,58}{1,2 - \frac{0,2467}{2}} = 988,6 \text{ kN} \quad (8.47)$$

A partir da força de tração  $H$  calculada é possível calcular a armadura ( $A_s$ ) necessária para suportar esse esforço.

$$A_s = \frac{988,57}{\frac{50}{1,15}} = 22,7 \text{ cm}^2 \rightarrow (8 \text{ } \emptyset 20) \quad (8.48)$$

$$\rightarrow (4 \text{ laços de } \emptyset 20)$$

Após o cálculo dos comprimentos  $k$ ,  $L$  e  $y$ , pode-se calcular o comprimento  $u$ , mostrado na Figura 8-32.

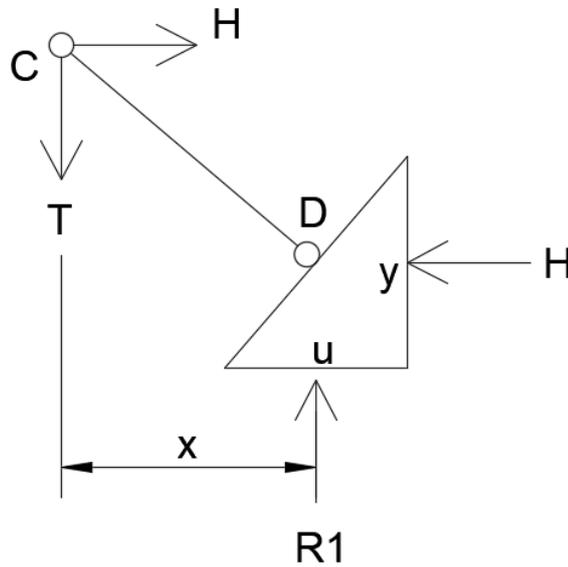


Figura 8-32 - Parte esquerda do triângulo que recebe apenas tensões de compressão.

Realizando o equilíbrio de momentos fletores no ponto C:

$$T \cdot \left( h_1 - k - \frac{u}{2} \right) = H \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) \quad (8.49)$$

Mas:

$$T = u \cdot b \cdot f_{cd1} \quad (8.50)$$

$$H = y \cdot b \cdot f_{cd1} \quad (8.51)$$

Assim:

$$u \cdot b \cdot f_{cd1} \cdot \left( h_1 - k - \frac{u}{2} \right) = y \cdot b \cdot f_{cd1} \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) \quad (8.52)$$

$$u \cdot h_1 - u \cdot k - \frac{u^2}{2} = y \cdot d - \frac{y^2}{2} \quad (8.53)$$

$$-\frac{u^2}{2} + (h_1 - k) \cdot u - y \cdot d + \frac{y^2}{2} = 0 \quad (8.54)$$

$$\frac{u^2}{2} + (k - h_1) \cdot u + y \cdot d - \frac{y^2}{2} = 0 \quad (8.55)$$

$$u = \frac{(h_1 - k) \pm \sqrt{(k - h_1)^2 - 2 \cdot y \cdot d + y^2}}{1} \quad (8.56)$$

Portanto:

$$u = \frac{(1,6 - 0,1677) - \sqrt{(0,1677 - 1,6)^2 - 2 \times 0,2467 \times 1,2 + 0,2467^2}}{1} \quad (8.57)$$

$$u = 0,19931 \text{ m} \quad (8.58)$$

Dessa forma, é possível calcular a força  $R_1$ :

$$R_1 = 0,19931 \times 0,25 \times 16028,6 = 798,6653 \text{ kN} \cong 798,7 \text{ kN} \quad (8.59)$$

Para que ocorra o equilíbrio de forças na vertical é necessário que a força de tração  $T$  seja igual à força de compressão  $R_1$ . Dessa maneira, pode ser calculada a armadura ( $A_s$ ) originada a partir da força de tração  $T$ .

$$A_s = \frac{798,7}{\frac{50}{1,15}} = 18,4 \text{ cm}^2 \rightarrow (10 \text{ } \emptyset 16) \quad (8.60)$$

Uma vez que se tenha calculado os comprimentos  $k$  e  $u$ , é possível realizar o cálculo do comprimento  $e$ , apresentado na Figura 8-28.

$$e = h_1 - k - \frac{u}{2} \quad (8.61)$$

$$e = 1,6 - 0,1677 - \frac{0,19931}{2} = 1,3326 \text{ m} \quad (8.62)$$

De acordo com a Figura 8-28:

$$T = \frac{P.L}{e} = \frac{672 \times 1,58385}{1,3326} = 798,7 \text{ kN} \rightarrow OK \quad (8.63)$$

$$H = \frac{P.L}{z} = \frac{672 \times 1,58385}{1,0766} = 988,6 \text{ kN} \rightarrow OK \quad (8.64)$$

Uma vez que todas as forças na treliça tenham sido calculadas e as armaduras referentes aos tirantes tracionados tenham sido obtidas, a NBR 6118:2014 estabelece ainda que para consolos curtos deve ser inserida uma armadura de costura. Isso é fundamental para permitir uma ruptura dúctil do consolo e evitar uma redução da carga de ruptura. Os consolos curtos devem possuir armadura de costura mínima igual a 40% da armadura do tirante, distribuída na forma de estribos horizontais em uma altura igual a  $2/3$  de  $d$ , ou seja,  $(2/3).d = 0,80 \text{ m}$ .

$$A_{s,\text{costura}} = \frac{40}{100} \times 22,7 = 9,08 \text{ cm}^2 \rightarrow (12 \text{ } \emptyset 10) \quad (8.65)$$

$\rightarrow 6 \text{ laços } \emptyset 10 \text{ c}/12,5$

Após os cálculos de todas as armaduras, a configuração das bielas, das forças resultantes e das barras de aço podem ser observadas na Figura 8-33.

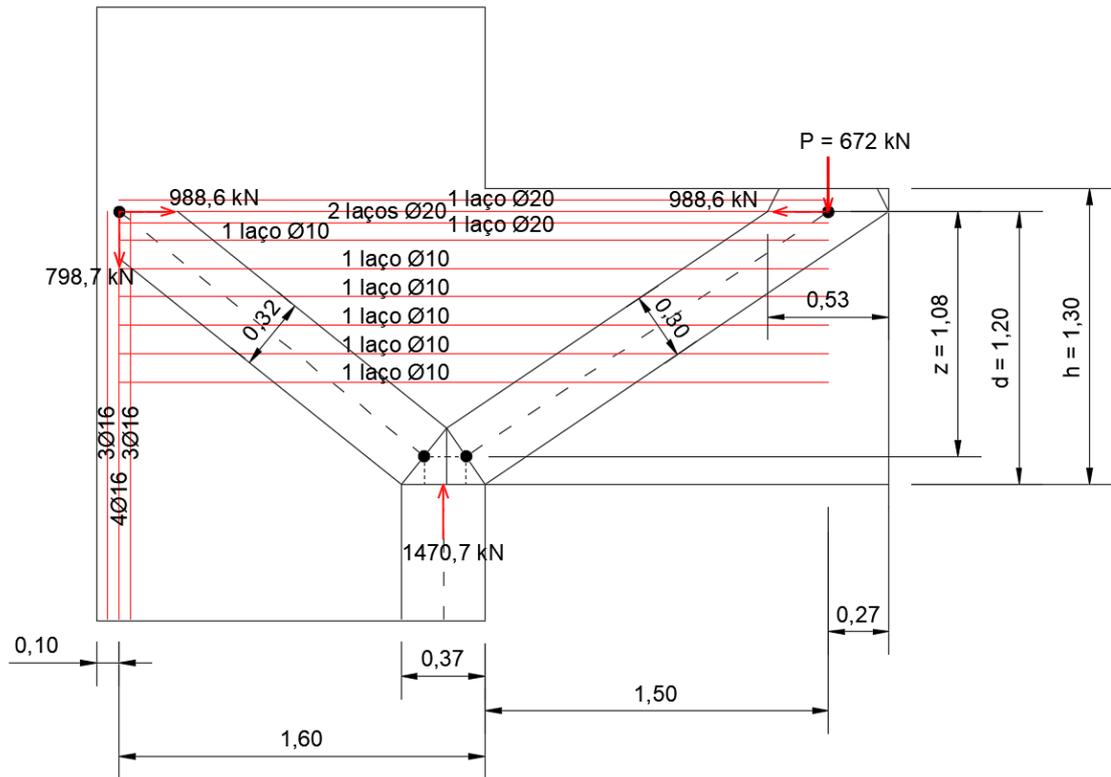


Figura 8-33 – Configuração das bielas, das forças resultantes e das barras de aço para o consolo curto analisado.

Para finalizar o dimensionamento do consolo curto, é necessário verificar a tensão no local de aplicação da força  $P$  e também realizar a verificação das tensões nas próprias bielas. Segundo a NBR 6118:2014 em seu item 22.5.1.2.c, para a verificação da biela no ponto de aplicação da carga, pode ser considerada a abertura da carga sob a área de aplicação em uma inclinação mínima de 2:1. Essa tensão deve ser inferior à  $f_{cd3}$ .

$$f_{cd3} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} = 13577 \text{ kN/m}^2 \quad (8.66)$$

A tensão ( $\sigma_c$ ) no local de aplicação da carga considerando uma inclinação de 2:1 para a abertura da carga é:

$$\sigma_c = \frac{672}{0,25 \times 0,53} = 5071,7 \text{ kN/m}^2 \quad (8.67)$$

$$5071,7 \text{ kN/m}^2 < 13577 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

Em relação à verificação das tensões de compressão nas bielas, o limite estabelecido é  $f_{cd1}$ .

$$f_{cd1} = \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} = 18857 \text{ kN/m}^2 \quad (8.68)$$

$$\sigma_c = \frac{1195,35}{0,25 \times 0,30} = 15938 \text{ kN/m}^2 \quad (8.69)$$

$$155938 \text{ kN/m}^2 < 18857 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

$$\sigma_c = \frac{1270,93}{0,25 \times 0,32} = 15886,6 \text{ kN/m}^2 \quad (8.70)$$

$$15886,6 \text{ kN/m}^2 < 18857 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

Após o dimensionamento das armaduras e verificação das tensões nas bielas de compressão, foi conduzida a modelagem da estrutura no software ATENA. O modelo de consolo curto com sua armadura dimensionada está apresentado na Figura 8-34. O carregamento foi inserido através de uma carga distribuída em um comprimento de 43 cm e foram considerados 20 incrementos de carga até a totalidade de 672 kN. A face inferior do pilar foi considerada engastada e os incrementos de carga foram considerados na unidade de MN.

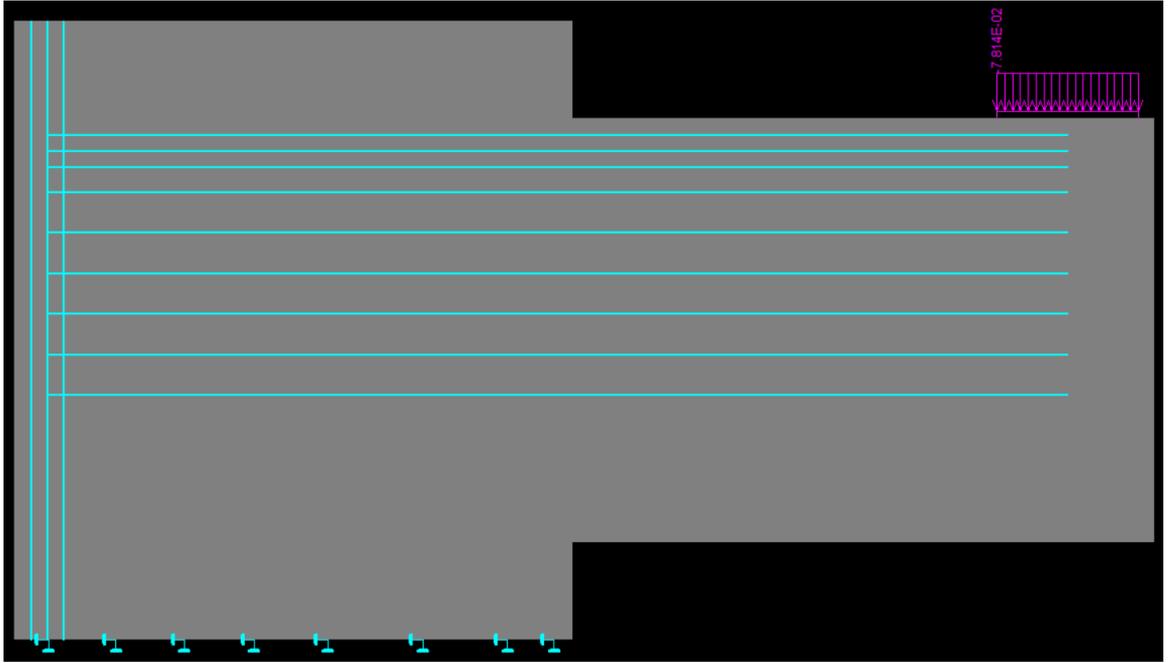


Figura 8-34 – Armaduras dimensionadas para o consolo curto, face inferior do pilar engastada e incremento de carga.

A Figura 8-35 ilustra as tensões principais mínimas no concreto, a abertura das fissuras e as tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 672 kN, ou seja, para o último incremento de carga.

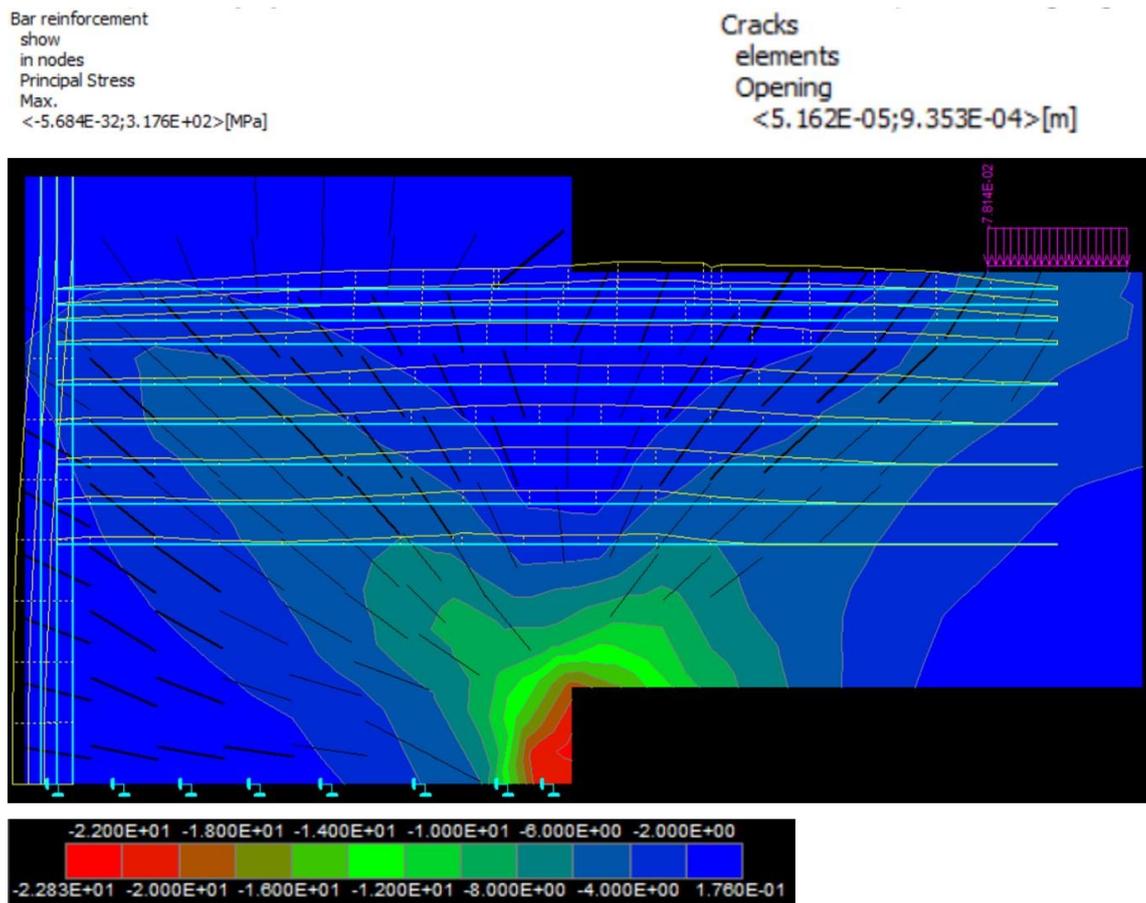


Figura 8-35 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para o carregamento total de 672 kN.

A partir da Figura 8-35 é possível observar que a maior largura de fissura foi de 0,94 mm, entretanto, é importante destacar que este valor foi calculado para o carregamento no estado limite último e não para o carregamento no estado limite de serviço. O modelo de bielas e tirantes obtido para o consolo curto permitiu um dimensionamento capaz de atender ao estado limite último da estrutura em relação aos esforços de tração, visto que as armaduras não atingiram sua tensão limite em nenhum ponto. Já em relação ao concreto, a simulação realizada no ATENA gerou resultados de tensões de compressão de 22,8 MPa, ou seja, acima do valor limite de  $f_{cd1}$  indicado pela NBR 6118:2014. A região onde ocorrem esses valores de tensão acima do limite está situada em um local próximo ao triângulo que recebe concentração de tensões de compressão no modelo de bielas e tirantes. Ao se comparar a Figura 8-13 com a Figura 8-35, é possível observar um aspecto interessante. As tensões principais mínimas no concreto não alteram sua configuração entre a análise linear elástica (realizada no Robot) e a análise não linear, considerando a fissuração (realizada no ATENA). Entretanto, os valores das tensões na

análise linear elástica apresentam-se superiores aos valores das tensões provenientes da análise não linear considerando a fissuração do concreto. A Figura 8-36 apresenta as tensões principais máximas no concreto e as barras da armadura para o carregamento de 201,6 kN, referente ao 6º incremento de carga, que corresponde ao carregamento imediatamente anterior ao surgimento da primeira fissura na estrutura.

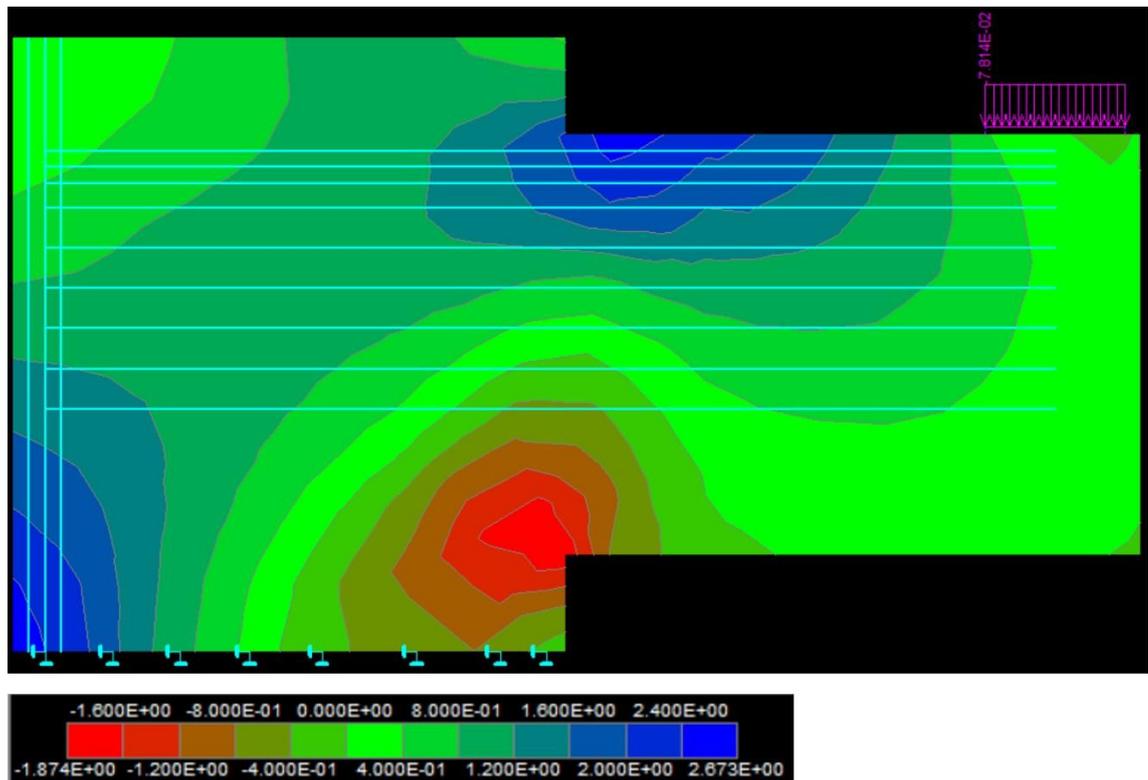


Figura 8-36 - Tensões principais máximas no concreto e barras da armadura para o carregamento de 201,6 kN, referente ao 6º incremento de carga.

A comparação da Figura 8-36 com a Figura 8-26 mostra que tanto o Robot quanto o ATENA geraram configurações de tensões principais máximas similares antes da ocorrência da primeira fissura no concreto. Entretanto, conforme o concreto fissura, essa configuração de tensões principais máximas é bastante alterada no ATENA. A Figura 8-37 apresenta a configuração de tensões principais máximas no consolo curto gerada pelo ATENA para o carregamento total de 672 kN.

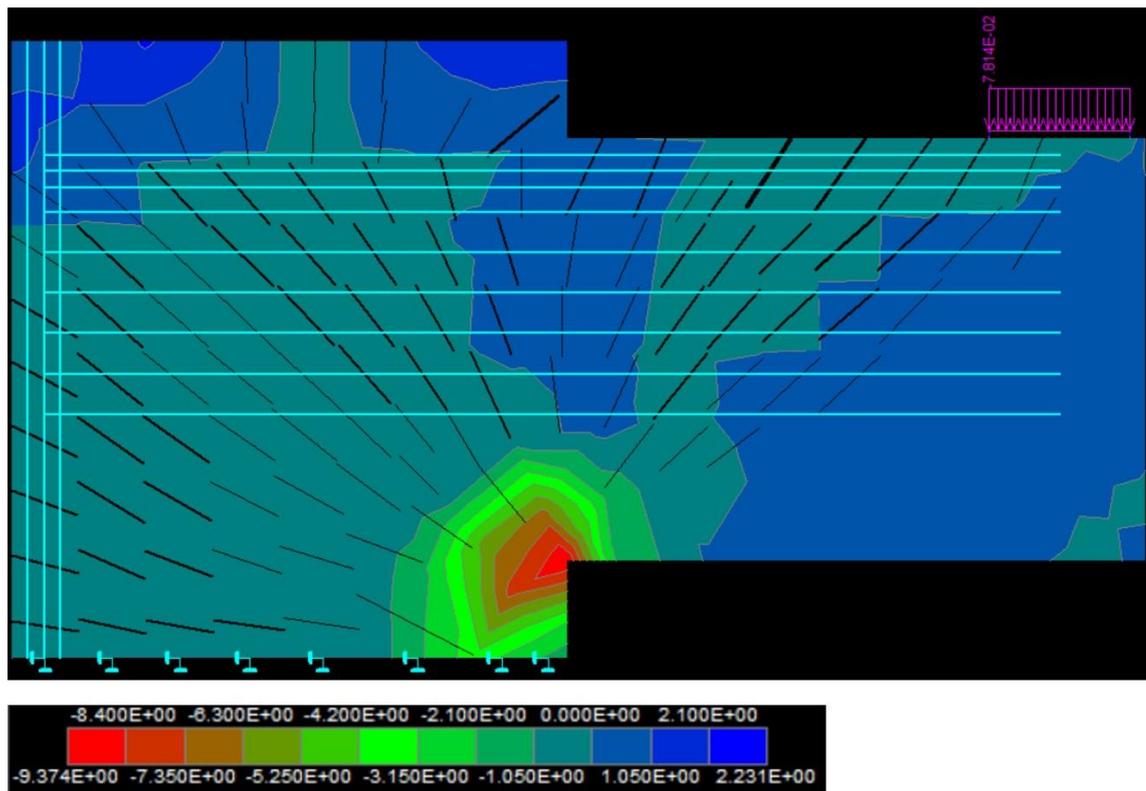


Figura 8-37 - Configuração de tensões principais máximas no consolo curto gerada pela Atena para o carregamento total de 672 kN.

É interessante notar que nas regiões onde ocorrem as fissuras, as tensões principais máximas de tração no concreto sofrem redução em seus valores, podendo, inclusive, tornarem-se tensões de compressão em algumas regiões. Dessa maneira, é possível concluir que a configuração das tensões principais mínimas no concreto não sofre alterações significativas entre a análise linear elástica e a análise não linear considerando as fissuras no concreto. O dimensionamento do consolo curto através do método de bielas e tirantes foi capaz de atender ao estado limite último para a tração, visto que nenhum ponto das armaduras atingiu a tensão limite, mas em relação à compressão, alguns pontos atingiram a tensão limite do concreto. O dimensionamento pelo método de bielas e tirantes não foi capaz de prever armaduras para alguns locais onde surgem fissuras na estrutura.

#### 8.4. Modelo 04 – Viga com redução de altura no apoio

O modelo 04 consiste em uma viga com redução de altura nos apoios. Essa viga é biapoiada, apresenta um vão de 8,0 m e uma carga de 200 kN aplicada no meio desse vão. Foi utilizado o aço CA-50, concreto C-30 e uma largura da seção transversal igual a 25 cm. A Figura 8-38 apresenta a ilustração do Modelo 04.

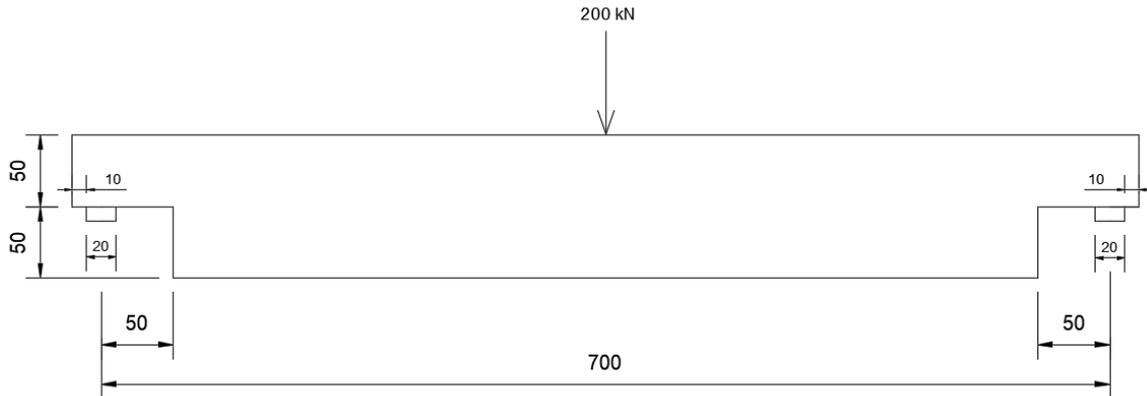


Figura 8-38 – Modelo 04, referente à viga biapoiada com redução da altura nos apoios (cotas em cm).

Para estabelecer o modelo de bielas e tirantes foi realizada no software Robot Structural a análise das tensões principais elásticas decorrentes deste carregamento por meio do método de elementos finitos. A carga de 200 kN foi inserida como carregamento distribuído ao longo de um comprimento de 20 cm. Isso foi realizado para não ocasionar elevada concentração de tensões provenientes do carregamento concentrado em apenas um nó do modelo. Dessa maneira, foi aplicada uma carga distribuída de 1.000 kN/m ao longo de 20 cm. Considerando o fator de 1,4 estabelecido na NBR 6118:2014 para a majoração do carregamento, foi inserida na estrutura a carga de 1.400 kN/m ao longo dos 20 cm de comprimento, representando 280 kN, ou seja,  $200 \times 1,4 = 280 \text{ kN}$ . A Figura 8-39 apresenta o mapa de tensões principais máximas (S1) na viga do Modelo 04 de análise, enquanto a Figura 8-40 apresenta o mapa de tensões principais mínimas (S2) que atuam nesse mesmo modelo.

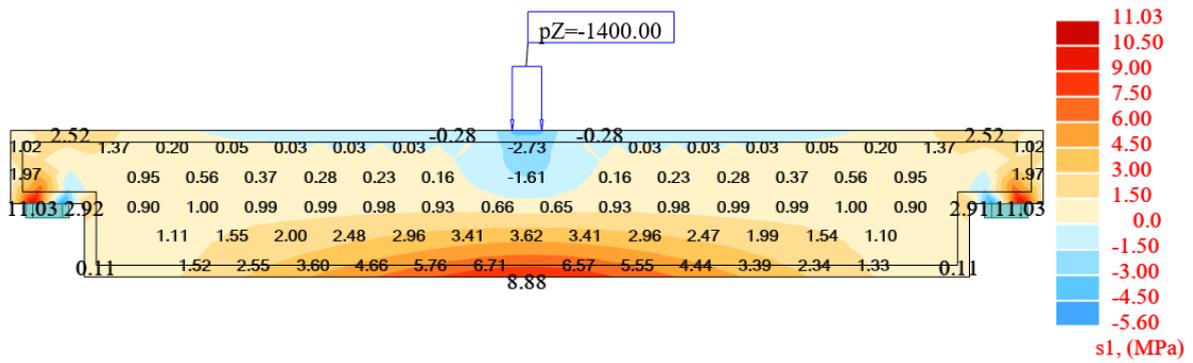


Figura 8-39 – Tensões principais máximas (S1) que atuam na viga do Modelo 04.

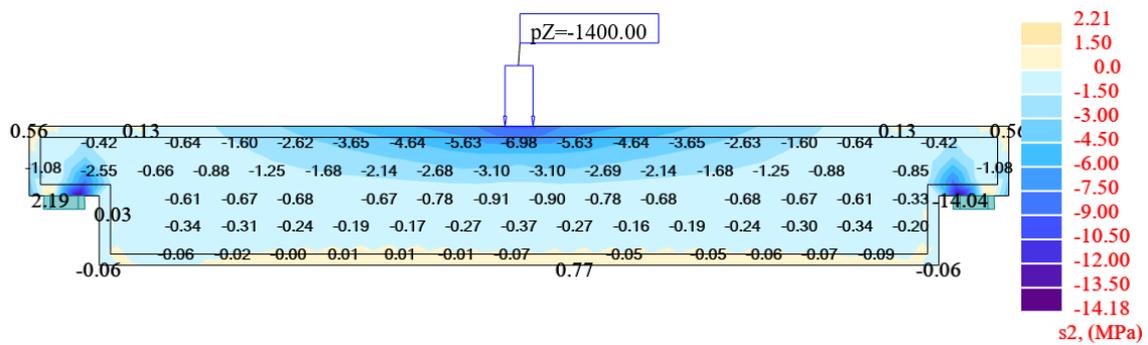


Figura 8-40 - Tensões principais mínimas (S2) que atuam na viga do Modelo 04.

A Figura 8-41 apresenta o modelo de bielas e tirantes utilizado para a viga com redução de altura nos apoios.

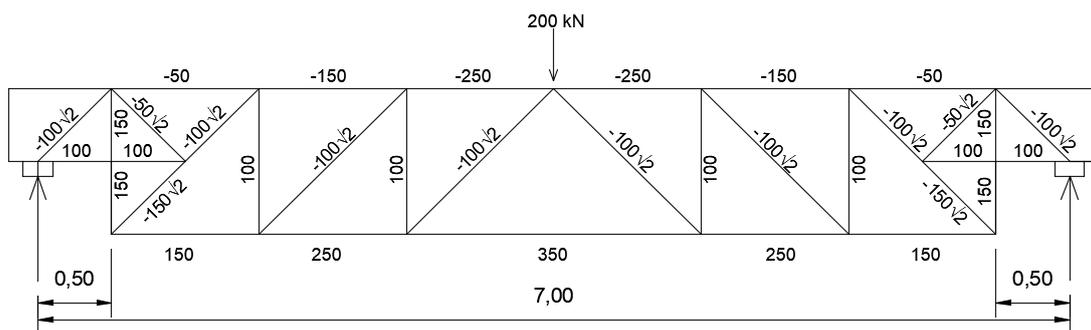


Figura 8-41 – Modelo de bielas e tirantes para a viga bi-apoiada com redução de altura nos apoios.

Para a verificação das tensões nas bielas de compressão e dimensionamento das armaduras a partir do modelo apresentado na Figura 8-41, foram realizadas algumas alterações na geometria da viga, com o objetivo de tornar o problema mais próximo da

realidade. Essas alterações se deram de maneira a considerar 3,0 cm de cobrimento nas regiões onde existem armaduras além de levar em consideração um aumento de 10,0 cm na altura da seção transversal. Esse aumento na altura da seção se dá para que seja respeitado o critério de que os eixos das barras da treliça representam os centros de gravidade das armaduras e as resultantes das tensões de compressão das bielas. Dessa maneira, a biela referente ao banzo superior comprimido representa uma faixa de concreto de 20 cm de largura. As alterações na viga podem ser observadas na Figura 8-42 e o detalhamento das armaduras está apresentado na Figura 8-43.

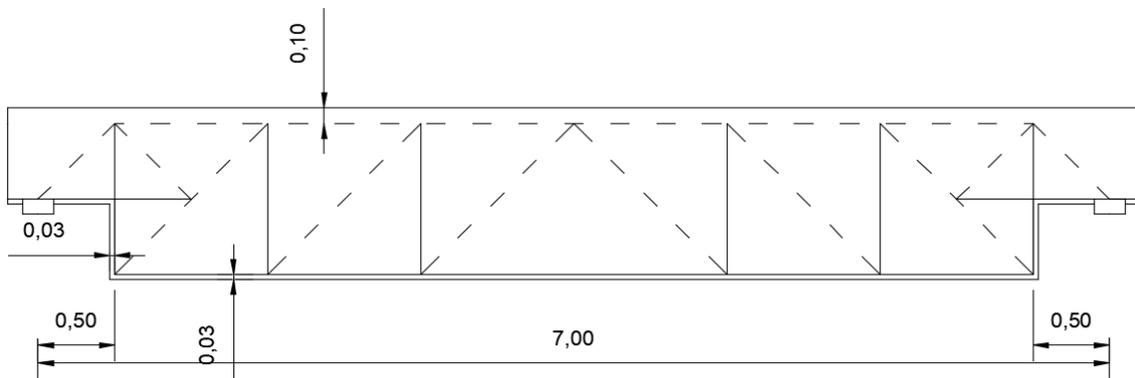


Figura 8-42 – Alterações realizadas na viga para tornar o problema mais próximo da realidade.

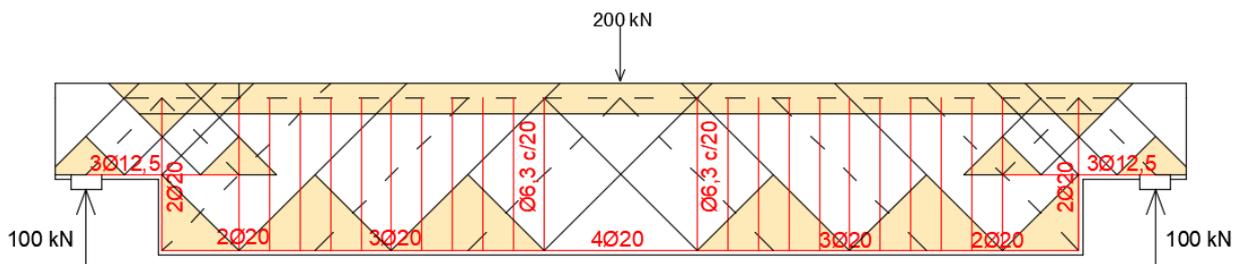


Figura 8-43 – Dimensionamento das armaduras para o Modelo 04.

O dimensionamento das armaduras foi decorrente das forças de tração apresentadas no modelo de bielas e tirantes da Figura 8-41 majoradas pelo fator 1,4, indicado na NBR 6118:2014. A verificação das tensões nas bielas e nos nós do modelo está descrita a seguir.

- Tensão de compressão no banzo superior

$$\sigma_{biela} = \frac{1,4 \times 250}{0,25 \times 0,2} = 7000 \text{ kN/m}^2 \quad (8.71)$$

$$\begin{aligned} f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \\ &= 16028,57 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.72)$$

$$7000 \text{ kN/m}^2 < 16028,57 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

- Tensão de compressão em nós onde apenas ocorre compressão

O nó onde é inserido o carregamento de 200 kN é o caso mais desfavorável para um nó submetido apenas a força de compressão. Dessa maneira, a maior força que atua nesse nó é 250 kN, aplicada na mesma área que foi verificada no cálculo para o banzo superior, ou seja, resultando na mesma tensão de  $7000 \text{ kN/m}^2$ . Essa tensão é também comparada com  $f_{cd1}$ , portanto:

$$7000 \text{ kN/m}^2 < 16028,57 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

- Tensão de compressão em bielas diagonais, localizadas em regiões fissuradas

O caso mais desfavorável para uma biela diagonal se dá na biela submetida à força de compressão de  $100\sqrt{2}$  que chega no apoio, pois a largura dessa biela é inferior à largura das bielas inclinadas com maior comprimento. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_{biela} &= \frac{1,4 \times 100\sqrt{2}}{0,25 \cdot z \cdot \cos\theta} = \frac{1,4 \times 100\sqrt{2}}{0,25 \times 0,5 \times \cos(45)} \\ &= 2240 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.73)$$

$$f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \quad (8.74)$$

$$= 11314,28 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{biela} < f_{cd2} \rightarrow OK$$

- Verificação da compressão em nós onde confluem dois ou mais tirantes em regiões fissuradas

O caso mais desfavorável para um nó nessas condições se dá para uma força de compressão de  $150\sqrt{2}$ . Dessa maneira:

$$\sigma_{biela} = \frac{1,4 \times 150\sqrt{2}}{0,25 \cdot z \cdot \cos\theta} = \frac{1,4 \times 150\sqrt{2}}{0,25 \times 1 \times \cos(45)} \quad (8.75)$$

$$= 1680 \text{ kN/m}^2$$

$$f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \quad (8.76)$$

$$= 11314,28 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{nó} < f_{cd2} \rightarrow OK$$

- Verificação da compressão em nós onde conflui apenas um tirante em regiões fissuradas

O caso mais desfavorável para um nó nesta condição se dá no nó do apoio. Considerando um apoio com largura de 20 cm, tem-se a seguinte tensão de compressão:

$$\sigma_{apoio} = \frac{1,4 \times 100}{0,25 \times 0,2} = 2800 \text{ kN/m}^2 \quad (8.77)$$

$$f_{cd3} = 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \quad (8.78)$$

$$= 13577,14 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{\text{apoio}} < f_{cd3} \rightarrow OK$$

Buscando obter uma configuração de armaduras capaz de levar a estrutura a atender o estado limite de serviço de abertura de fissuras, foi considerado um acréscimo de 40% da armadura principal nas regiões dos apoios. Isso está baseado no mesmo conceito que a NBR 6118:2014 utiliza para conferir maior ductilidade ao elemento estrutural no caso de consolos curtos. Segundo essa norma, os consolos curtos devem possuir armadura de costura mínima igual a 40% da armadura do tirante, distribuída na forma de estribos horizontais em uma altura igual a  $2/3$  de  $d$ . Portanto, aplicando essa consideração para a viga com redução de altura nos apoios, tem-se a seguinte armadura de costura a ser inserida:

$$d = 0,60 \text{ m} \rightarrow \frac{2d}{3} = 0,40 \text{ m} \quad (8.79)$$

$$A_{s,\text{costura}} = \frac{40}{100} \times 3,22 = 1,288 \text{ cm}^2 \rightarrow (7 \text{ } \emptyset 5) \quad (8.80)$$

$$\rightarrow 4 \text{ laços } \emptyset 5 \text{ c}/10$$

A armadura de costura acrescentada nas regiões dos apoios pode ser observada na Figura 8-44.

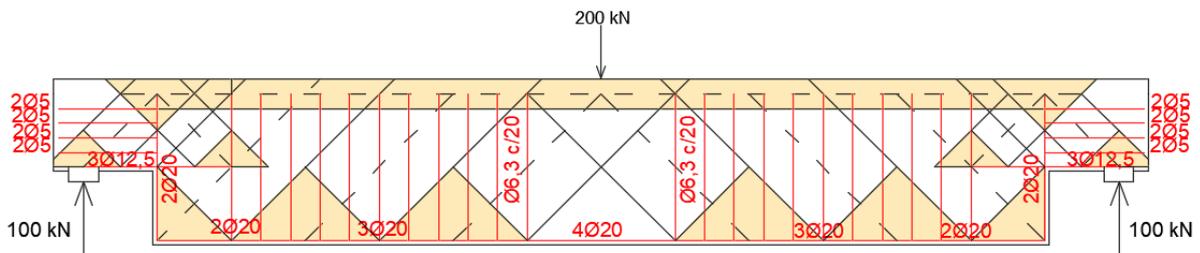


Figura 8-44 – Viga com armadura de costura acrescentada nas regiões dos apoios.

Foi também acrescentada armadura de pele nessa viga, tendo em vista o que é indicado na NBR 6118:2014 para vigas com altura superior a 60 cm. Essa norma estabelece que a mínima armadura lateral deve ser 0,10 % da área de concreto que representa a alma da viga em cada face e composta por barras de CA-50 ou CA-60, com espaçamento não maior que 20 cm devidamente ancorada nos apoios, não sendo necessária uma armadura superior a  $5 \text{ cm}^2/\text{m}$  por face. Dessa maneira:



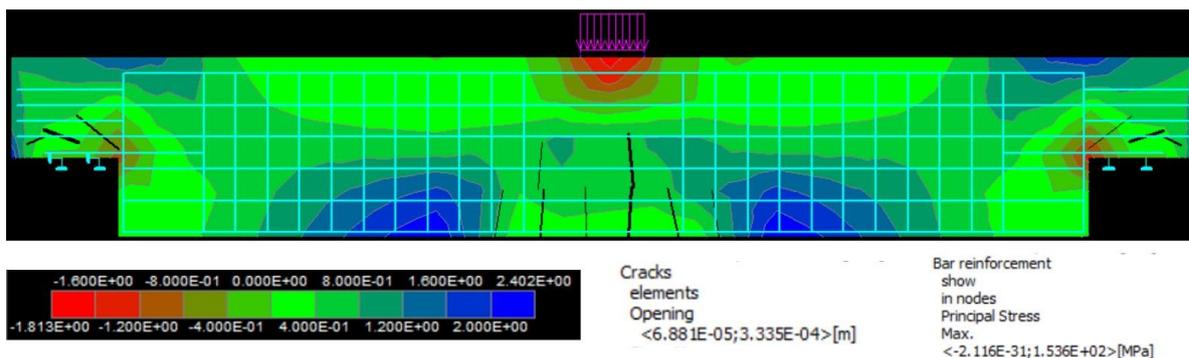


Figura 8-46 - Tensões principais máximas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 280 kN.

A Figura 8-47 apresenta a configuração das tensões principais mínimas no concreto, a abertura das fissuras e as tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 280 kN, ou seja, no 20° e último incremento de carga.

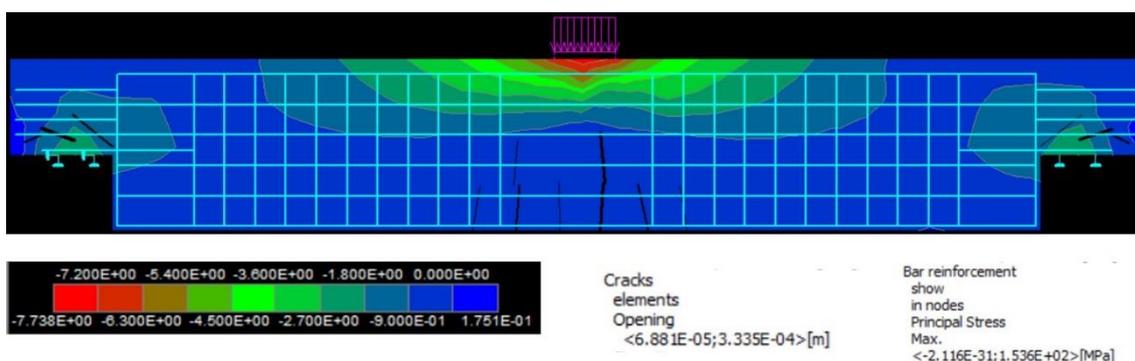


Figura 8-47 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura das fissuras e tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 280 kN.

A análise da Figura 8-46 e da Figura 8-47 mostra que as tensões de compressão no concreto permaneceram abaixo dos valores da resistência deste material e as tensões nas barras da armadura também mantiveram-se abaixo das tensões resistentes de dimensionamento do aço. É interessante notar que a configuração das tensões principais mínimas no concreto não apresentou mudança significativa quando comparada com a configuração dessas mesmas tensões para a análise linear elástica realizada no Robot, ou seja, sem considerar a fissuração do concreto.

Ao realizar a comparação da Figura 8-39 com a Figura 8-46, é possível verificar que as configurações das tensões principais não sofrem alteração significativa. Isso é interessante, pois mostra que o dimensionamento das armaduras através do método de bielas e tirantes formado a partir da análise elástica das tensões principais, gera uma configuração de barras de aço que não seria significativamente alterada ao se considerar a fissuração do concreto na análise.

### 8.5. Modelo 05 – Bloco com duas estacas

O modelo 05 é composto por um bloco de fundação com duas estacas de diâmetro igual a 40 cm. Esse bloco apresenta uma carga centrada de 1200 kN proveniente do pilar e suas dimensões estão ilustradas na Figura 8-48. Foram utilizados o aço CA-50, o concreto C-30 e considerada uma espessura do bloco de 60 cm.

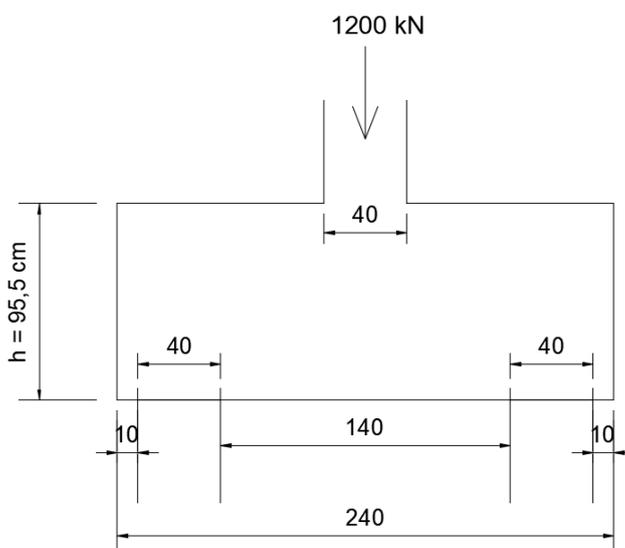


Figura 8-48 – Bloco de duas estacas referente ao Modelo 05 (cotas em cm).

Para traçar a treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes foi realizada uma análise linear elástica por elementos finitos com tensões principais geradas na estrutura a partir do carregamento de 1200 kN aplicado no bloco. Essa análise foi realizada no software Robot Structural com o carregamento aplicado de forma distribuída no comprimento de 40 cm referente à largura do pilar. Esse carregamento foi multiplicado pelo fator de majoração das cargas indicado na NBR 6118:2014, igual a 1,4. Dessa forma

foi aplicada a carga de 4200 kN/m ao longo de 40 cm. As tensões principais máximas estão apresentadas na Figura 8-49 e as tensões principais mínimas podem ser observadas na Figura 8-50.

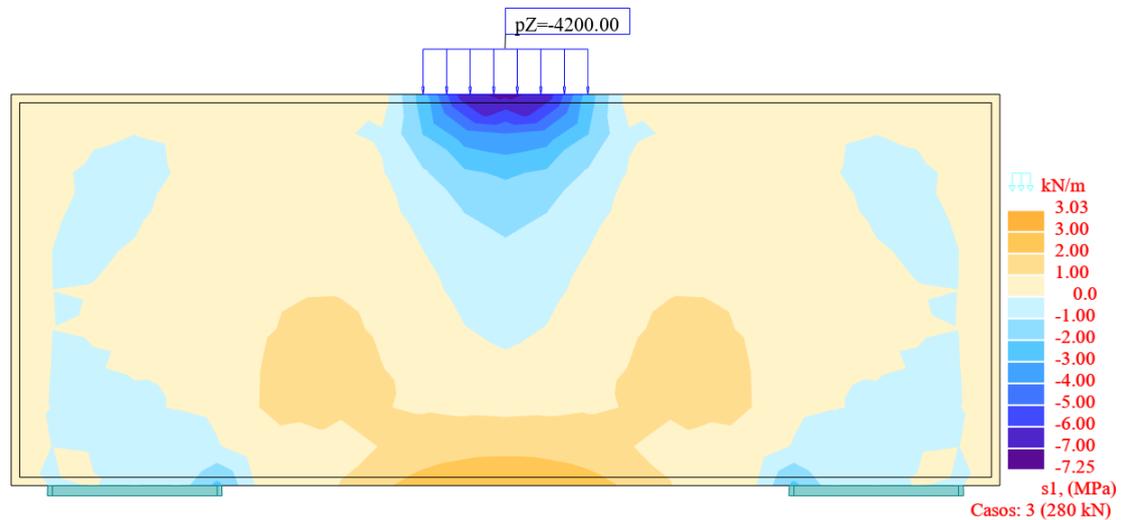


Figura 8-49 – Tensões principais elásticas máximas para o Modelo 05.

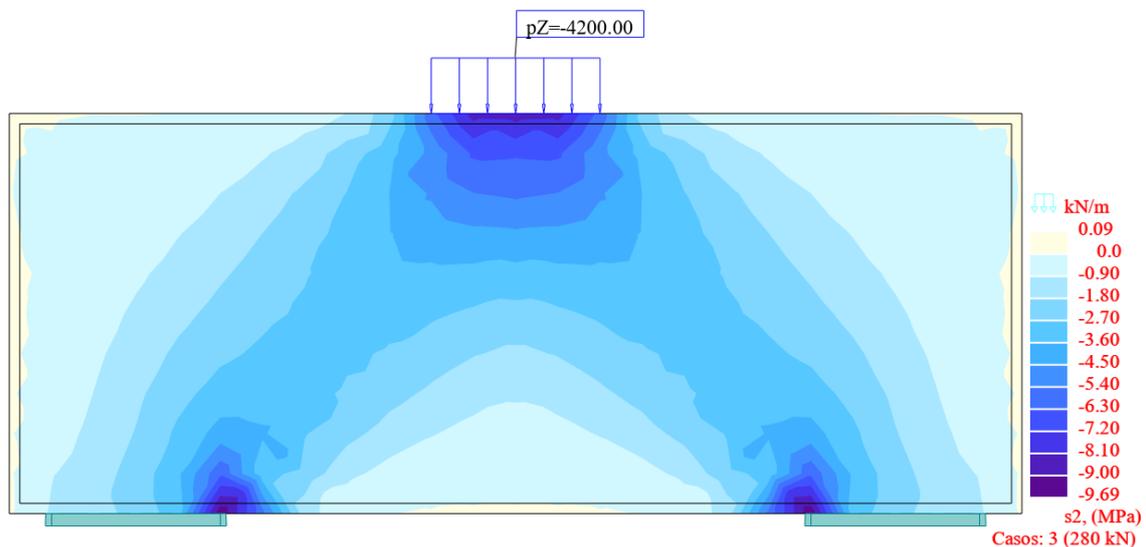


Figura 8-50 - Tensões principais elásticas mínimas para o Modelo 05.

A partir da análise elástica das tensões principais que ocorrem no bloco para o carregamento atuante, foi possível traçar o modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 8-51.

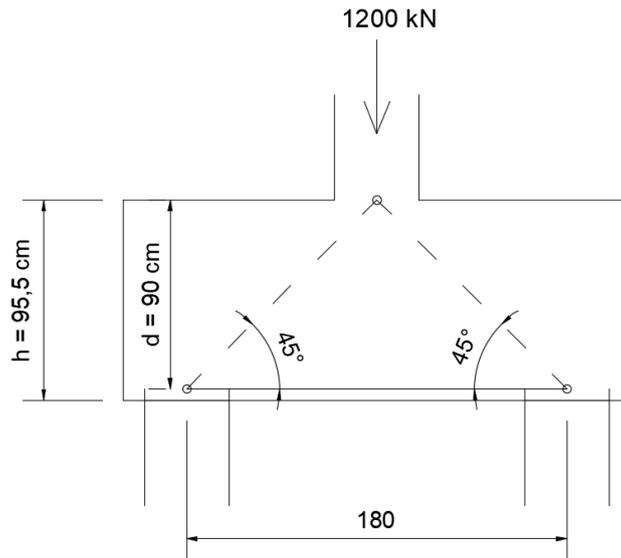


Figura 8-51 – Modelo de bielas e tirantes para o bloco de duas estacas submetido a um carregamento centrado.

As forças axiais nas barras que compõem o modelo de bielas e tirantes apresentado na Figura 8-51 podem ser observadas na Figura 8-52.

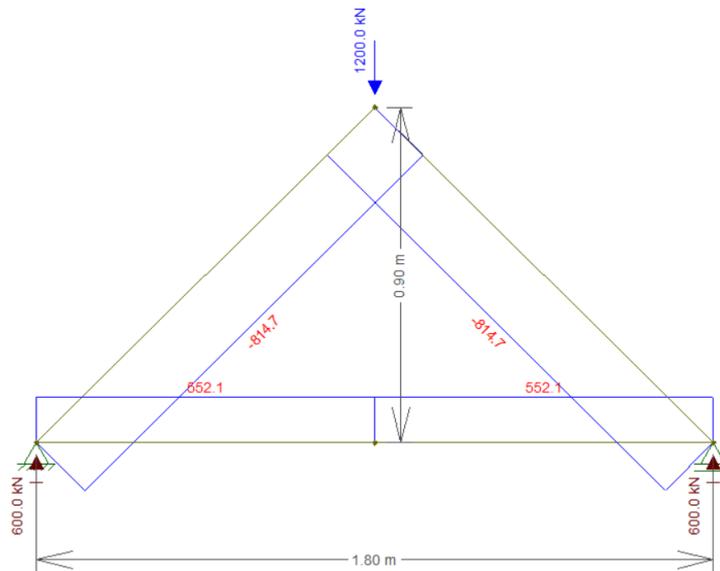


Figura 8-52 – Forças axiais atuantes nas barras do modelo de bielas e tirantes.

- Tensão de compressão em nós onde apenas ocorre compressão

O nó onde é inserido o carregamento de 800 kN é o caso mais desfavorável para um nó submetido apenas a força de compressão. A tensão decorrente dessa força atuando nesse nó deve ser comparada com  $f_{cd1}$ , portanto:

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 1200}{0,40 \times 0,40} = \frac{1680}{0,4 \times 0,4} = 10500 \text{ kN/m}^2 \quad (8.83)$$

$$f_{cd1} = 0,85 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \times f_{cd} \quad (8.84)$$

$$f_{cd1} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} = 16028,6 \text{ kPa} \quad (8.85)$$

$$10500 \text{ kN/m}^2 < 16028,57 \text{ kN/m}^2 \rightarrow OK$$

- Tensão de compressão em bielas diagonais, localizadas em regiões fissuradas

As duas bielas diagonais apresentam força de compressão de 814,7 kN e a tensão atuante nessas bielas deve ser comparada com  $f_{cd2}$ . Portanto:

$$\sigma_{biela} = \frac{1,4 \times 814,7}{0,6 \times 0,28} = \frac{1140,58}{0,6 \times 0,28} = 6789,2 \text{ kN/m}^2 \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} f_{cd2} &= 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \\ &= 11314,28 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.87)$$

$$\sigma_{biela} < f_{cd2} \rightarrow OK$$

- Verificação da compressão em nós onde conflui apenas um tirante em regiões fissuradas

Os nós onde ocorrem essa condição são aqueles referentes aos apoios (estacas). Considerando estacas com diâmetro de 40 cm, tem-se a seguinte tensão de compressão:

$$\sigma_{nó,estaca} = \frac{1,4 \times 600}{\frac{\pi \times 0,4^2}{4}} = 6684,5 \text{ kN/m}^2 \quad (8.88)$$

$$\sigma_{nó,biela} = \frac{1,4 \times 814,7}{0,6 \times 0,28} = \frac{1140,58}{0,6 \times 0,28} = 6789,2 \text{ kN/m}^2 \quad (8.89)$$

$$\begin{aligned} f_{cd3} &= 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30000}{1,4} \\ &= 13577,14 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (8.90)$$

$$\sigma_{nó(estaca \ e \ biela)} < f_{cd3} \rightarrow OK$$

O cálculo da armadura se dá com a força de tração atuante no tirante horizontal da treliça isostática. Portanto:

$$A_s = \frac{1,4 \times 552,1}{\frac{50}{1,15}} = 17,8 \text{ cm}^2 \rightarrow 6\emptyset 20 \text{ mm} \quad (8.91)$$

Foi ainda utilizada uma armadura mínima lateral de 5 cm<sup>2</sup>/m de acordo com o item 17.3.5.2.3 da NBR 6118:2014. Dessa maneira:

$$A_{s,lateral} = 5 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \text{estribos horizontais com duas pernas } \emptyset 8\text{mm } c/20 \text{ cm}$$

A Figura 8-53 apresenta as bielas de concreto e o detalhamento das armaduras dimensionadas para o bloco de 2 estacas.

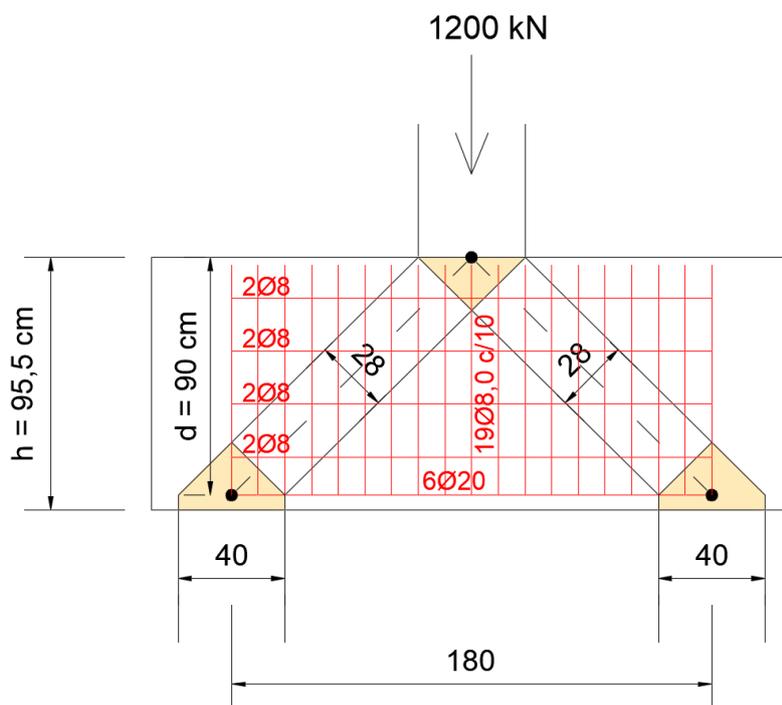


Figura 8-53 – Bielas de concreto e armaduras dimensionadas para o bloco de 2 estacas.

Uma vez realizado o dimensionamento das armaduras e verificadas as tensões de compressão nos nós e nas bielas do modelo, foi utilizado o software ATENA para verificar as tensões principais nessa estrutura considerando a fissuração do concreto. O carregamento de 1200 kN foi inserido como carga linear uniformemente distribuída ao longo de um comprimento de 40 cm de acordo com a largura do pilar. Isso foi realizado para não inserir no modelo elevadas concentrações de tensões, que ocorreriam se a carga fosse aplicada em apenas um nó da estrutura. Esse carregamento foi aplicado por meio de 20 incrementos de carga, cujo valor na unidade de MN é igual a 0,21 MN/m. As estacas foram consideradas como apoios do modelo e, portanto, foram considerados dois apoios referentes à essas duas estacas. Figura 8-54 apresenta a configuração das tensões principais máximas no concreto, a abertura das fissuras e as tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 1200 kN, ou seja, no 20º e último incremento de carga.

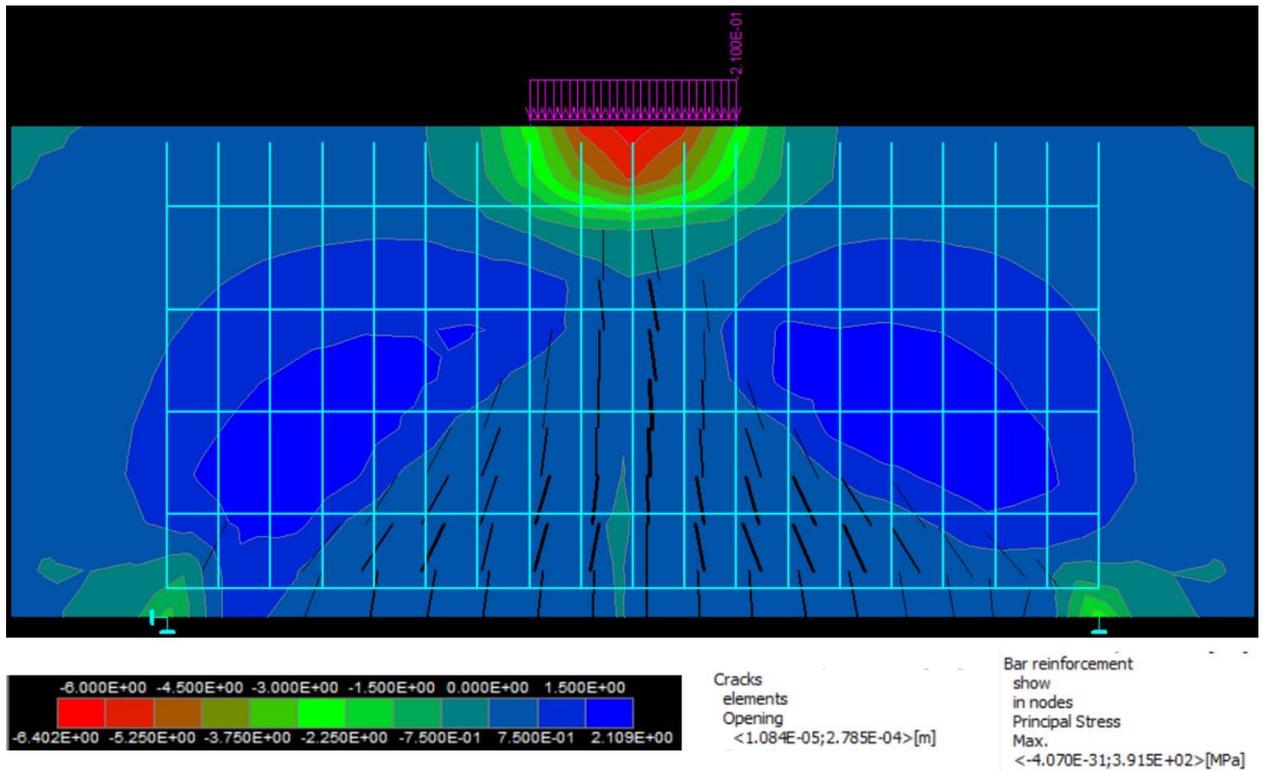


Figura 8-54 – Tensões principais máximas no concreto e abertura de fissuras para o carregamento de 1200 kN.

A Figura 8-55 apresenta a configuração das tensões principais mínimas no concreto, a abertura das fissuras e as tensões principais nas barras da armadura para a viga submetida ao carregamento total de 1200 kN.

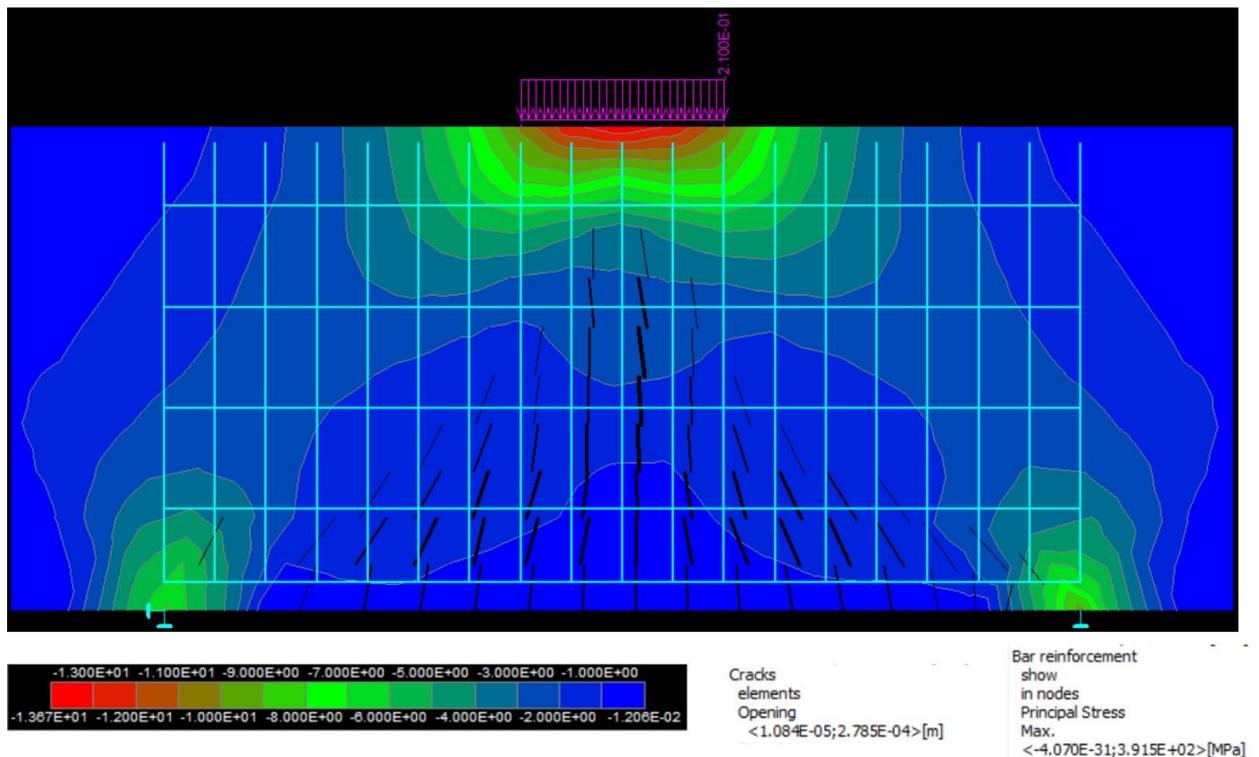


Figura 8-55 - Tensões principais mínimas no concreto, abertura de fissuras e tensões principais nas barras para o carregamento de 1200 kN.

A análise da Figura 8-55 mostra que as tensões de compressão no concreto permaneceram abaixo dos valores da resistência deste material e as tensões nas barras da armadura também permaneceram abaixo das tensões resistentes de dimensionamento do aço. É interessante notar que a configuração das tensões principais mínimas no concreto não apresentou mudança significativa quando comparada com a configuração dessas mesmas tensões para a análise linear elástica realizada no Robot, sem considerar a fissuração do concreto.

É possível ainda verificar que a configuração das tensões principais não sofre alteração de maneira significativa entre a análise elástica e a análise considerando a fissuração do concreto. Isso demonstra que o dimensionamento das armaduras pelo método de bielas e tirantes baseado nas tensões principais calculadas a partir da análise linear elástica gera uma configuração de barras de aço que não seria alterada ao se considerar a fissuração do concreto na estrutura.

### 8.6. Modelo 06 – Viga com abertura analisada por AGUIAR (2018)

O trecho analisado da viga referente ao Modelo 06 está apresentado na Figura 8-56. A seção transversal apresenta largura de 20 cm e são utilizados concreto C-30 e aço CA-50. Para o modelo em questão foi considerado um carregamento uniformemente distribuído de 28,367 kN/m e um momento fletor negativo no apoio central da viga de 140 kN.m.

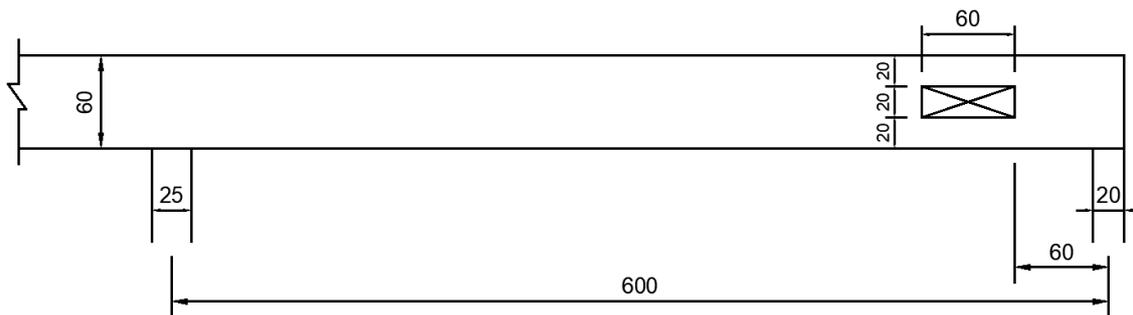


Figura 8-56 – Modelo 06, viga com abertura próxima ao apoio (cotas em cm).

A Figura 8-57 apresenta o carregamento distribuído e o momento fletor aplicados na viga, as forças nodais que representam essas ações no modelo de treliça e o modelo de bielas e tirantes utilizado, em que as linhas tracejadas representam as bielas de compressão e as linhas cheias são os tirantes tracionados. Todas as bielas inclinadas possuem inclinação de  $45^\circ$ , sendo que a região da treliça acima da abertura apresenta bielas inclinadas com dimensão na horizontal de 12,5 cm e na vertical de mesmo valor.

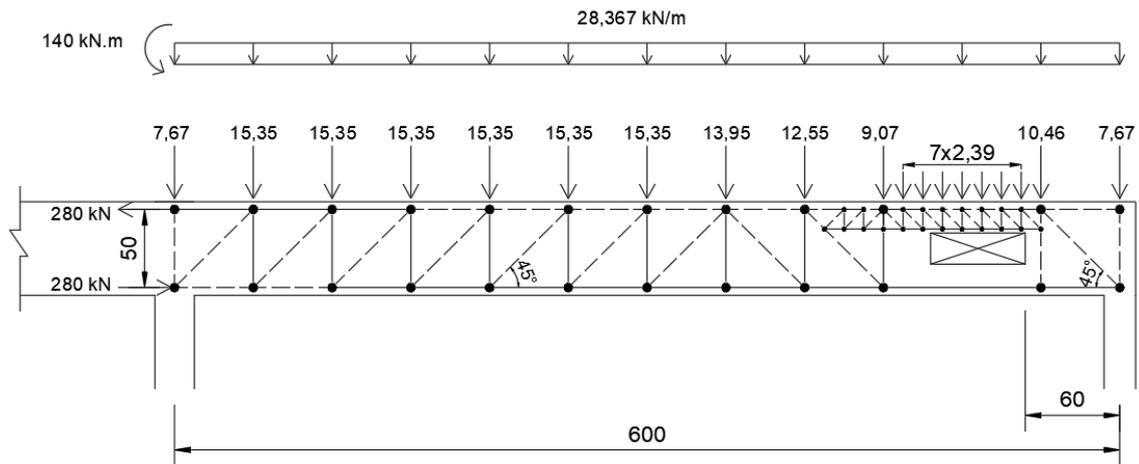


Figura 8-57 – Treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes para a viga do Modelo 06 (cotas em cm).

As forças normais nas barras da treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes estão apresentadas na Figura 8-58 e a região acima da abertura tem suas forças mostradas em melhor visualização na Figura 8-59.

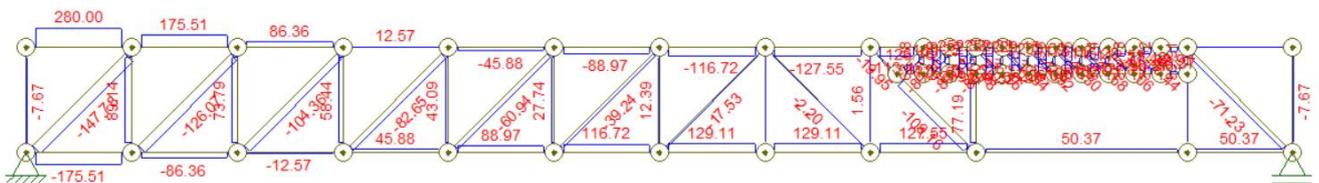


Figura 8-58 – Forças normais nas barras da treliça isostática que representa o modelo de bielas e tirantes.

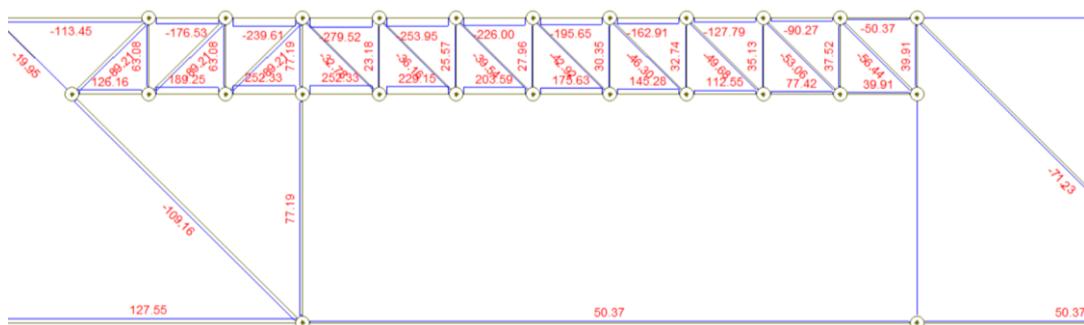


Figura 8-59 – Melhor visualização das forças nodais na região da treliça acima da abertura.

Na Figura 8-60 estão apresentadas as bielas de compressão com suas larguras, os tirantes tracionados (representados na cor vermelha) e os nós onde confluem as bielas e os tirantes. A Figura 8-61 por sua vez, apresenta as mesmas informações, porém oferecendo uma melhor visualização desses itens na região acima da abertura da viga.

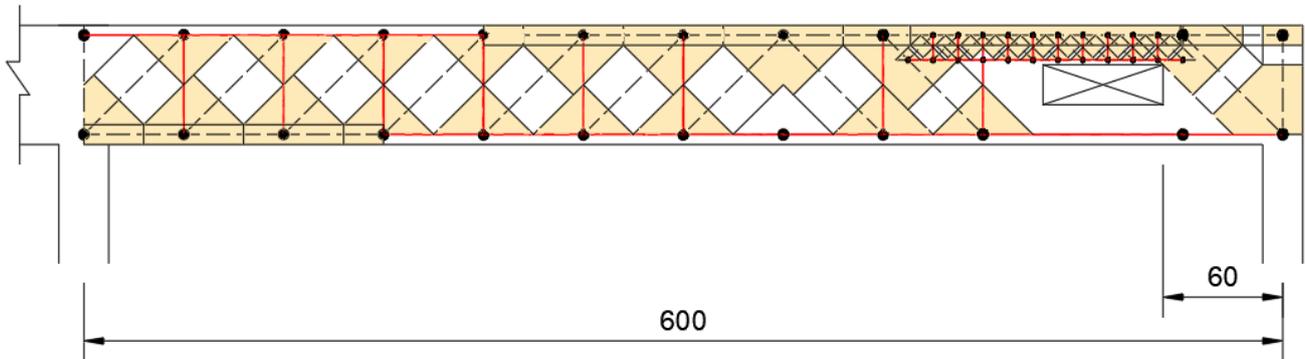


Figura 8-60 – Largura das bielas e nós onde confluem as barras da treliça.

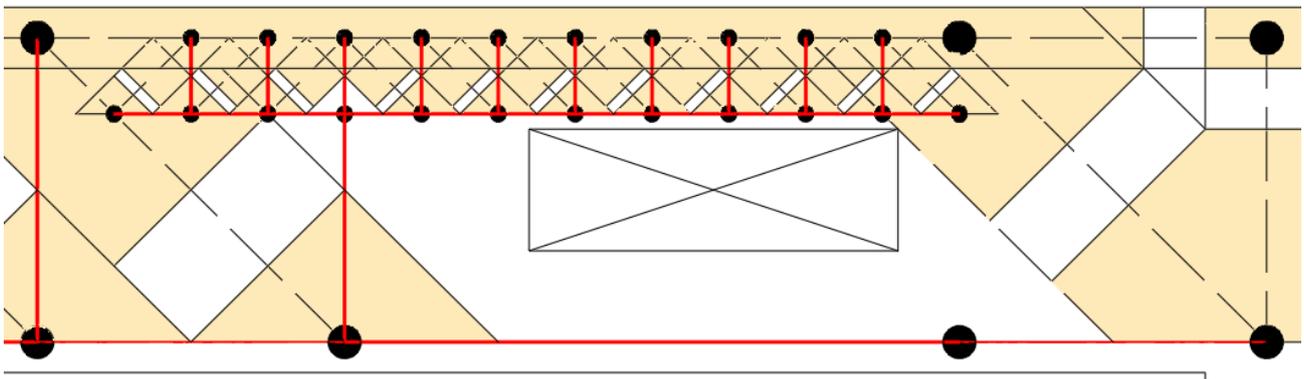


Figura 8-61 – Largura das bielas e nós onde confluem as barras da treliça na região acima da abertura da viga.

A maior força atuante em uma biela situada em região com tensão de compressão transversal é igual a 175,51 kN. Dessa maneira:

$$\begin{aligned} \sigma_{biela} &= \frac{1,4 \times 175,51}{b \cdot t} = \frac{245,7}{0,20 \times 0,10} = 12.285 \text{ kN/m}^2 \\ &= 12,3 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (8.92)$$

$$\begin{aligned}
 f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\
 &= 16.028,57 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.93}$$

$$\sigma_{biela} < f_{cd1} \rightarrow OK$$

O caso mais desfavorável para um nó onde confluem apenas bielas de compressão é aquele situado no banzo superior da treliça a 3,50 m de distância na horizontal do nó referente ao apoio esquerdo. Nele atuam quatro forças de compressão que são aplicadas em áreas diferentes. Dessa forma:

- Para a força de 127,55 kN aplicada na horizontal (direita do nó):

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 127,55}{b \cdot t} = \frac{178,57}{0,20 \times 0,1} = 8.928 \text{ kN/m}^2 = 8,93 \text{ MPa} \tag{8.94}$$

- Para a força de 116,72 kN aplicada na horizontal (esquerda do nó):

$$\sigma_{nó} = \frac{1,4 \times 116,72}{b \cdot t} = \frac{163,408}{0,20 \times 0,1} = 8.170 \text{ kN/m}^2 = 8,17 \text{ MPa} \tag{8.95}$$

- Para a força de 17,53 kN aplicada na diagonal (esquerda):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 17,53}{b \cdot t} = \frac{24,542}{0,20 \times 0,3536} = 347 \text{ kN/m}^2 \\
 &= 0,347 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{8.96}$$

- Para a força de 2,20 kN aplicada na diagonal:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 2,20}{b \cdot t} = \frac{3,08}{0,20 \times 0,3536} = 43,55 \text{ kN/m}^2 \\
 &= 0,0435 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{8.97}$$

$$\begin{aligned}
 f_{cd1} &= 0,85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\
 &= 16.028,57 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.98}$$

*Todas as tensões no nó < f<sub>cd1</sub>      OK*

- Verificação das bielas em regiões onde a resistência à compressão é reduzida pela presença de trações transversais devidas às armaduras e a compressão é transmitida através das fissuras.

A maior força atuante em uma biela inclinada de maior dimensão situada nessas regiões é igual a 147,78 kN e para as bielas inclinadas de menor dimensão, o maior valor de compressão é de 89,21 kN. Dessa maneira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{biela} &= \frac{1,4 \times 147,78}{b \cdot t} = \frac{206,892}{0,20 \times 0,3536} = 2925 \text{ kN/m}^2 \\
 &= 2,93 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{8.99}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{biela} &= \frac{1,4 \times 89,21}{b \cdot t} = \frac{124,894}{0,20 \times 0,0884} = 7064 \text{ kN/m}^2 \\
 &= 7,06 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{8.100}$$

$$\begin{aligned}
 f_{cd2} &= 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\
 &= 11.314,28 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{8.101}$$

*Todas as tensões < f<sub>cd2</sub>      →      OK*

Também devem ser comparadas com  $f_{cd2}$ , as tensões que atuam em nós onde confluem dois ou mais tirantes tracionados. Dessa maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 147,55}{b \cdot t} = \frac{206,57}{0,20 \times 0,3536} = 2920,95 \text{ kN/m}^2 \\ &= 2,92 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (8.102)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 89,21}{b \cdot t} = \frac{124,894}{0,20 \times 0,0884} = 7064 \text{ kN/m}^2 \\ &= 7,06 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (8.103)$$

$$\begin{aligned}f_{cd2} &= 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,6 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\ &= 11.314,28 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.104)$$

$$\sigma_{nó} < f_{cd2} \quad \rightarrow \quad OK$$

É necessário ainda, verificar a tensão de compressão nos nós onde conflui apenas um tirante tracionado. A maior força que incide em um nó nessa condição é igual a 279,52 kN e essa força incide no nó por meio de uma biela com 10 cm de largura no banzo superior da treliça na região acima da abertura da viga. Dessa maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{nó} &= \frac{1,4 \times 279,52}{b \cdot t} = \frac{391,328}{0,20 \times 0,1} = 19.566 \text{ kN/m}^2 \\ &= 19,6 \text{ MPa}\end{aligned}\quad (8.105)$$

$$\begin{aligned}f_{cd3} &= 0,72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times \frac{30.000}{1,4} \\ &= 13.577,14 \text{ kN/m}^2\end{aligned}\quad (8.106)$$

$$\sigma_{nó} > f_{cd3} \quad \rightarrow \quad \text{NÃO OK}$$

De forma a ser atendido este critério em uma análise mais refinada, a largura da biela deveria ser de 0,144m.

Após a verificação das tensões nos nós e nas bielas comprimidas, foram dimensionadas as armaduras e suas distribuições. A Figura 8-62 apresenta o dimensionamento da viga. A NBR 6118:2014 indica que a armadura de pele deve ser

prevista para vigas com seções transversais com altura acima de 60 cm e, portanto, não foi considerada armadura de pele para a viga.

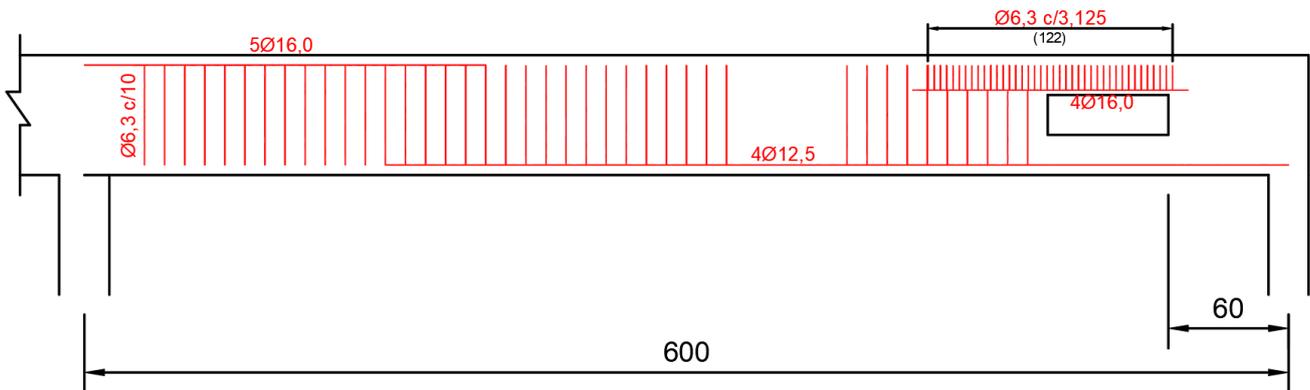


Figura 8-62 – Viga do Modelo 06 dimensionada.

A partir do dimensionamento obtido, foi conduzida a modelagem da estrutura no software ATENA. Foram utilizados 20 incrementos de carga até a totalidade do carregamento uniformemente distribuído de  $28,367 \times 1,4 = 39,7 \text{ kN/m}$ , majorado pelo fator 1,4 de acordo com a NBR 6118:2014. O mesmo foi considerado para o momento fletor aplicado através de um binário de forças de  $280 \times 1,4 = 392 \text{ kN}$  aplicadas na extremidade esquerda da viga a uma distância de 50 cm entre si. Para isso foram também considerados 20 incrementos de carga. A malha de elementos finitos foi discretizada com uma dimensão básica de 18 cm. A Figura 8-63 apresenta as tensões principais máximas no concreto e as fissuras para o 20º e último incremento de carga na viga.

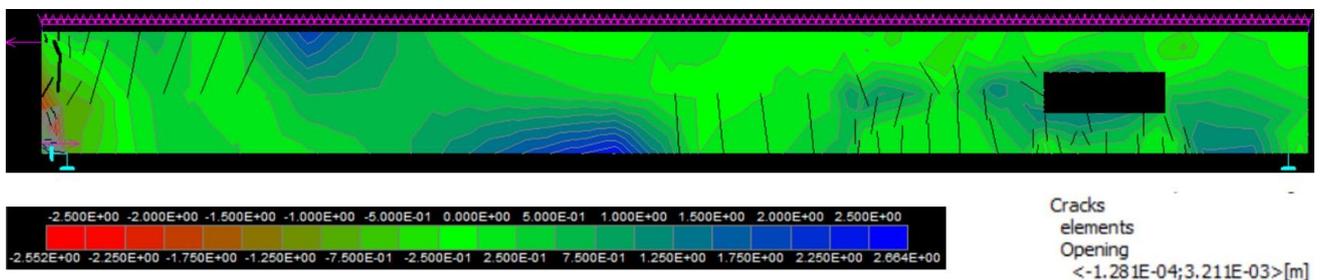


Figura 8-63 – Tensões principais máximas no concreto e fissuras para o carregamento total aplicado na viga.

A Figura 8-64 apresenta as tensões principais mínimas no concreto e as fissuras para o último incremento de carga aplicado na viga.

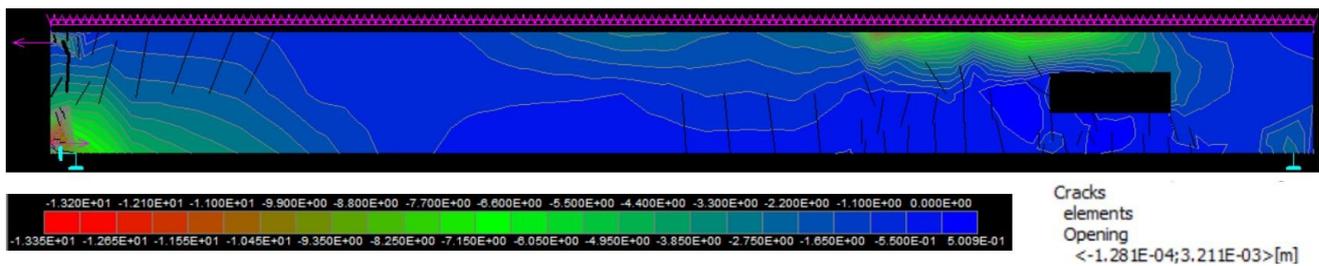


Figura 8-64 – Tensões principais mínimas no concreto e fissuras para o carregamento total aplicado na viga.

A partir da análise das Figura 8-63 e 8-64 é possível notar que a configuração das fissuras se dá mais pronunciadamente nas regiões da viga onde foram identificadas as maiores forças de tração no modelo de bielas e tirantes. Além disso, as maiores tensões principais de compressão também ocorrem nos locais onde o modelo de bielas e tirantes identificou as maiores forças de compressão, sendo estas a região acima da abertura e o canto inferior da extremidade esquerda da viga. A Figura 8-65 ilustra as barras da armadura e as tensões principais atuantes nessas barras.

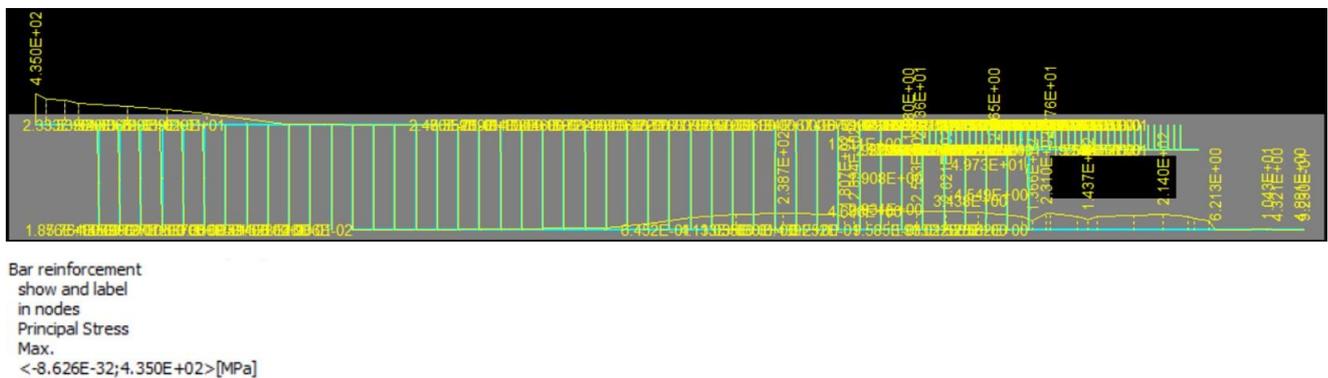


Figura 8-65 – Tensões principais nas barras da armadura presente na viga.

A análise da Figura 8-65 mostra que os maiores valores de tensões principais nas barras ocorrem nas regiões onde o modelo de bielas e tirantes identificou as maiores forças de tração com o aço atingindo sua tensão de escoamento no canto superior da face esquerda da viga. É interessante notar que a tensão principal atuante em diversas regiões das barras está abaixo da tensão de escoamento do aço, mas isso ocorre porque uma vez que o modelo de bielas e tirantes apresenta forças de tração que variam ao longo de um tirante, a armadura dimensionada não é calculada para variar a cada trecho do tirante, mas sim para suportar a maior força de tração atuante naquele determinado tirante.

É possível observar nas Figura 8-63 e 8-64 que a abertura máxima de fissura é da ordem de 3,2 mm, ou seja, valor superior ao que é permitido pela NBR 6118:2014 para qualquer classe de agressividade ambiental. Porém, é necessário notar que esse valor de abertura de fissura foi obtido com a modelagem utilizando as cargas majoradas pelo fator de 1,4 indicado na NBR 6118:2014 para ser utilizado no dimensionamento das estruturas. Porém, para analisar a abertura de fissuras em uma estrutura de concreto essa norma indica que as cargas atuantes não devem ser majoradas.

Por isso, foi realizada uma modelagem no ATENA para a viga do Modelo 06 utilizando as cargas sem majoração para que a partir dessa modelagem pudessem ser analisadas as aberturas de fissuras na viga. A Figura 8-66 apresenta a abertura de fissuras para a modelagem da viga sem considerar a majoração das cargas.



Figura 8-66 – Abertura de fissuras na viga do Modelo 06 sem majoração das cargas.

É possível perceber a partir da análise da Figura 8-66, que apesar da abertura máxima de fissura ter sido reduzida para 2,0 mm, este valor ainda está em desacordo com o que é permitido pela NBR 6118:2014 para qualquer classe de agressividade ambiental. Isso mostra que o modelo de bielas e tirantes conseguiu obter um dimensionamento satisfatório para a viga analisada, no entanto, devem ser previstas armaduras adicionais visando a redução da abertura de fissura, já que para o caso em questão, em que a seção transversal da viga apresenta altura de 60 cm, a NBR 6118:2014 não indica armadura de pele. A Figura 8-67 apresenta a evolução das tensões principais máximas conforme aumentam as fissuras na viga.

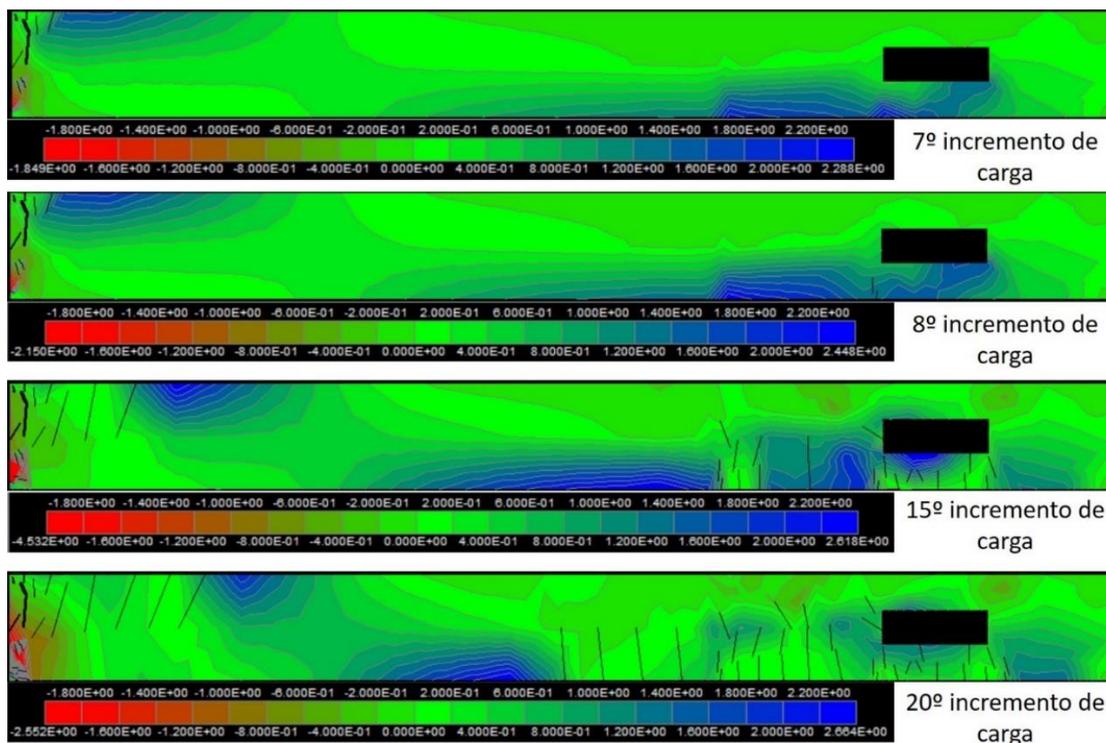


Figura 8-67 – Evolução das tensões principais máximas no concreto.

A partir da análise da Figura 8-67 é possível notar que conforme as fissuras aumentam em uma região, as tensões principais máximas de tração nessas regiões reduzem. Isso é importante, pois mostra que os modelos de bielas e tirantes, os quais são traçados a partir da análise elástica das tensões que ocorrem em uma estrutura, resultam em uma configuração de armaduras que não é alterada significativamente após a estrutura fissurar.

### 8.7. Modelos referentes a parede, nós de pórticos, vigas com alturas diferentes e viga em balanço

Neste item do trabalho foram realizadas análises sucintas para 6 elementos estruturais. Essas análises focaram apenas em observar a configuração das tensões principais na análise linear elástica e nos modelos não lineares considerando a fissuração do concreto.

O primeiro modelo foi desenvolvido no software ATENA. Esse modelo consta da metade de uma parede de concreto armado sem abertura submetida a uma carga



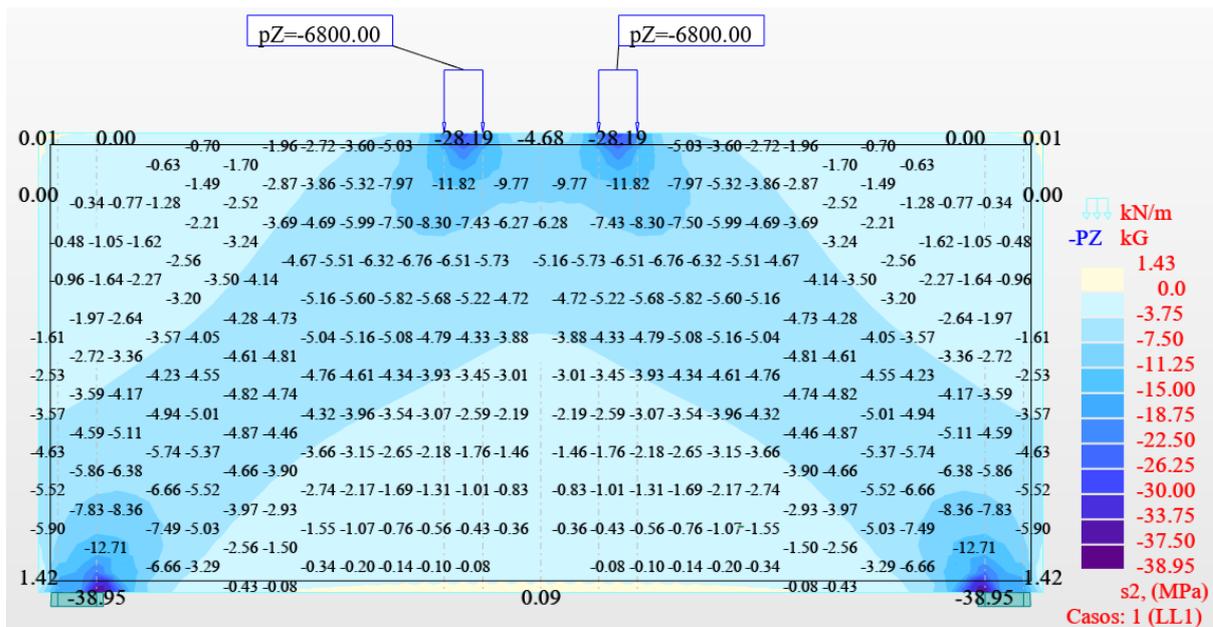


Figura 8-69 – Tensões principais elásticas mínimas na parede quando esta é submetida aos carregamentos concentrados de 680 kN.

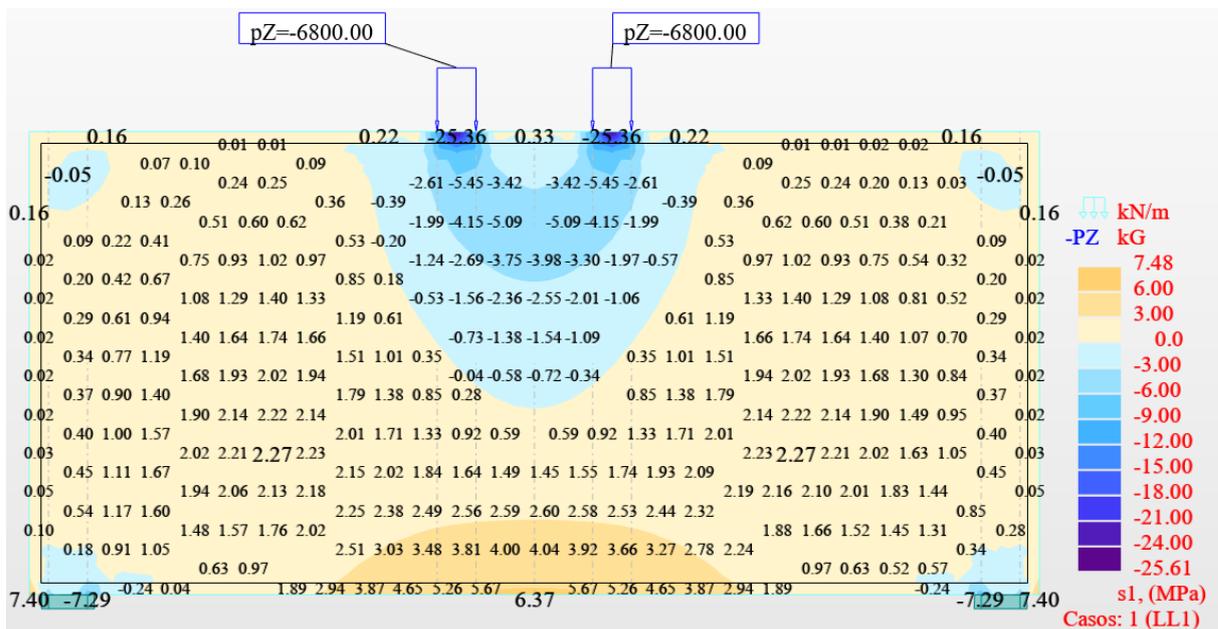


Figura 8-70 - Tensões principais elásticas máximas na parede quando esta é submetida aos carregamentos concentrados de 680 kN.

A Figura 8-71 apresenta as tensões principais mínimas no concreto calculadas considerando a fissuração deste material para a metade da parede quando esta é submetida

ao carregamento concentrado de 680 kN. Já a Figura 8-72 mostra as tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto para o mesmo carregamento.

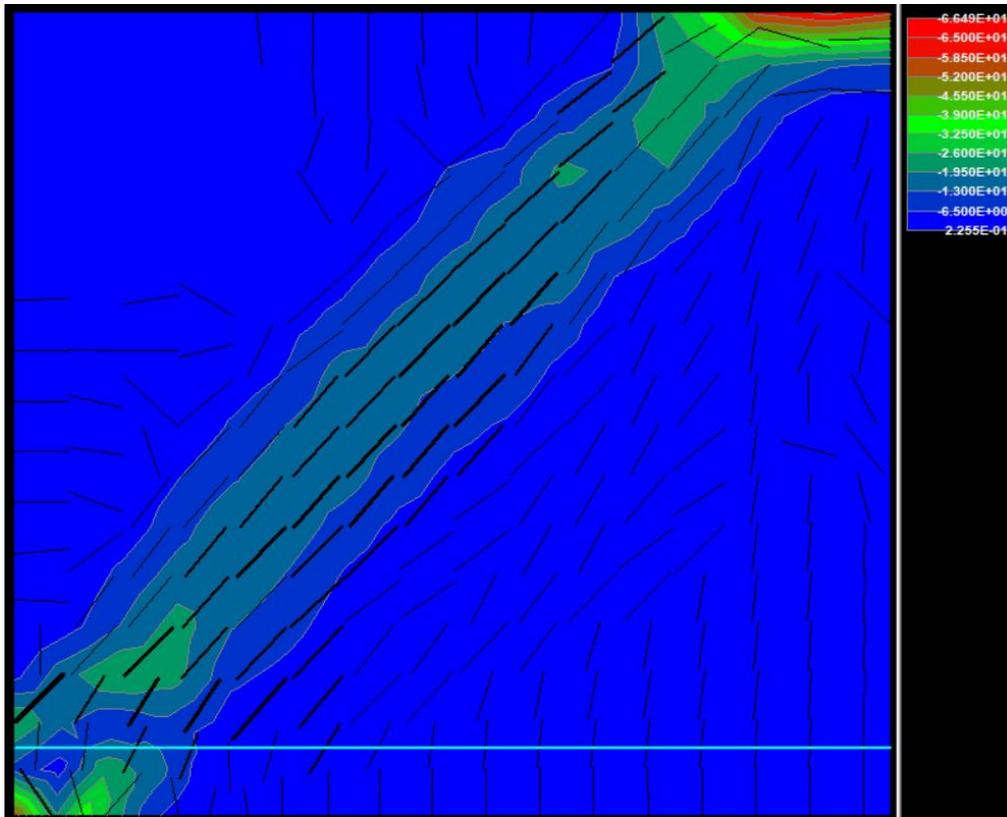


Figura 8-71 – Tensões principais mínimas para metade da parede modelada no ATENA considerando a fissuração do concreto para o carregamento de 680 kN.

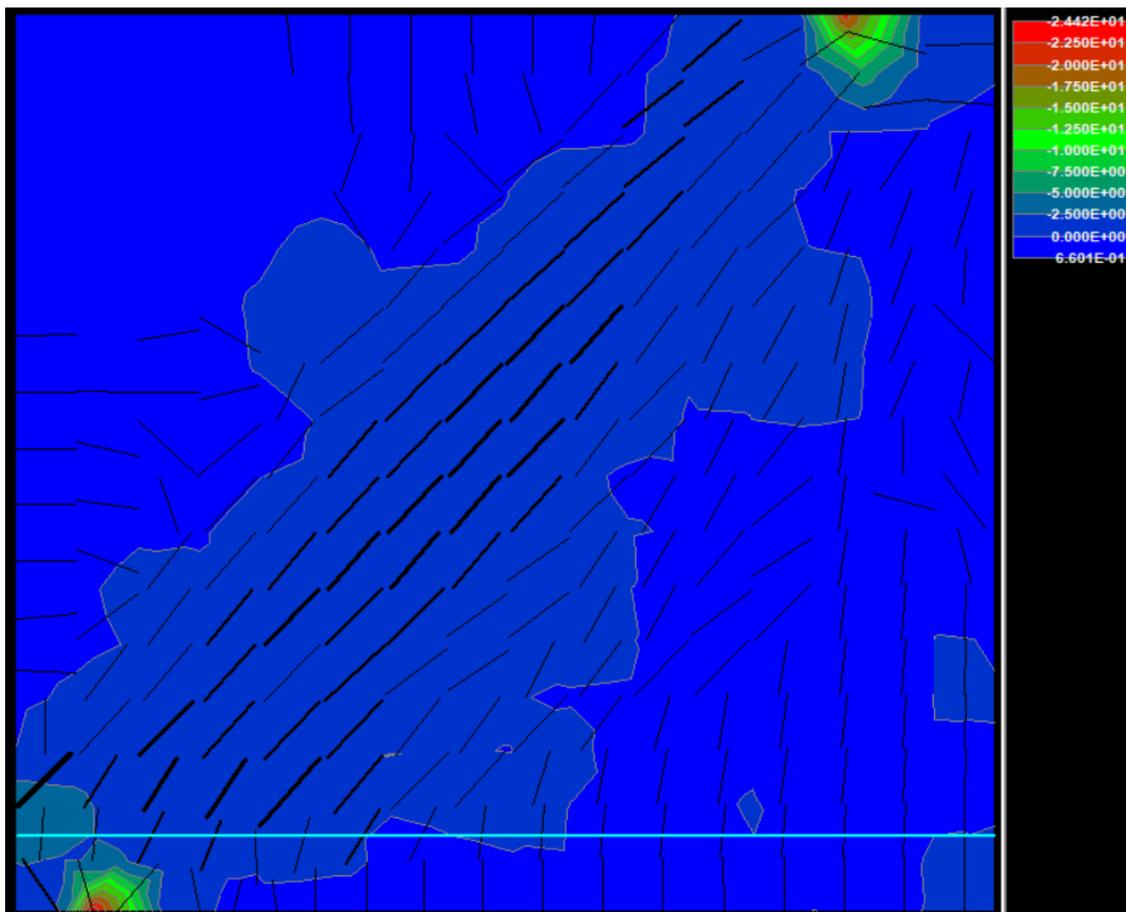


Figura 8-72 - Tensões principais máximas para metade da parede modelada no ATENA considerando a fissuração do concreto para o carregamento de 680 kN.

O segundo modelo analisado representa um nó de pórtico submetido a um momento fletor negativo e concreto C30. Esse momento fletor é representado por um binário de forças que atua no encontro de um pilar de 20 x 40 cm com uma viga de mesma seção transversal. Foi considerado um braço de alavanca “z” de 30 cm entre as forças que compõem o binário.

A Figura 8-73 apresenta o esquema pelo qual os cálculos da armadura desse nó de pórtico foram realizados.

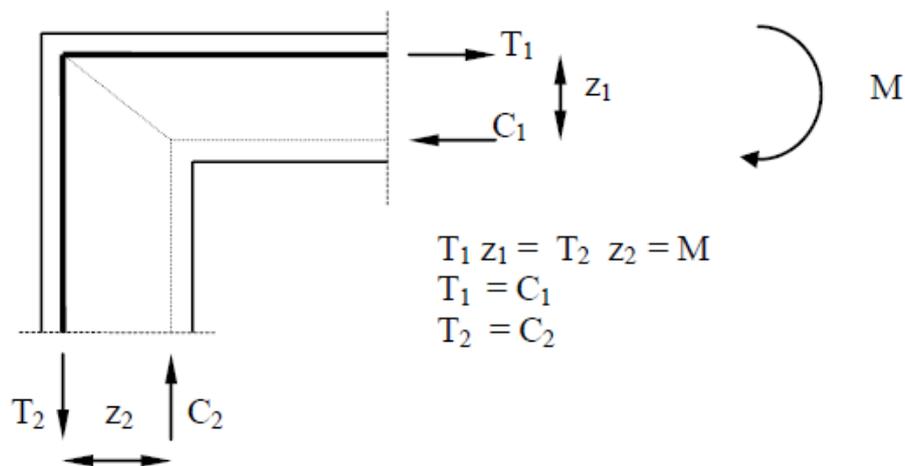


Figura 8-73 – Considerações para cálculo da armadura de nó de pórtico submetido a um momento fletor negativo. Fonte: SANTOS (2020).

O nó de pórtico em questão foi submetido a incrementos de 5 kN até o total de 200 kN, ou seja, inserindo no elemento estrutural um momento fletor máximo de  $200 \times 0,30 = 60 \text{ kN.m}$ . A Figura 8-74 apresenta as tensões principais mínimas calculadas em regime elástico com as forças atuando como carregamentos uniformemente distribuídos ao longo de comprimentos de 10 cm. A Figura 8-75 mostra as tensões principais elásticas máximas para o mesmo carregamento na estrutura.

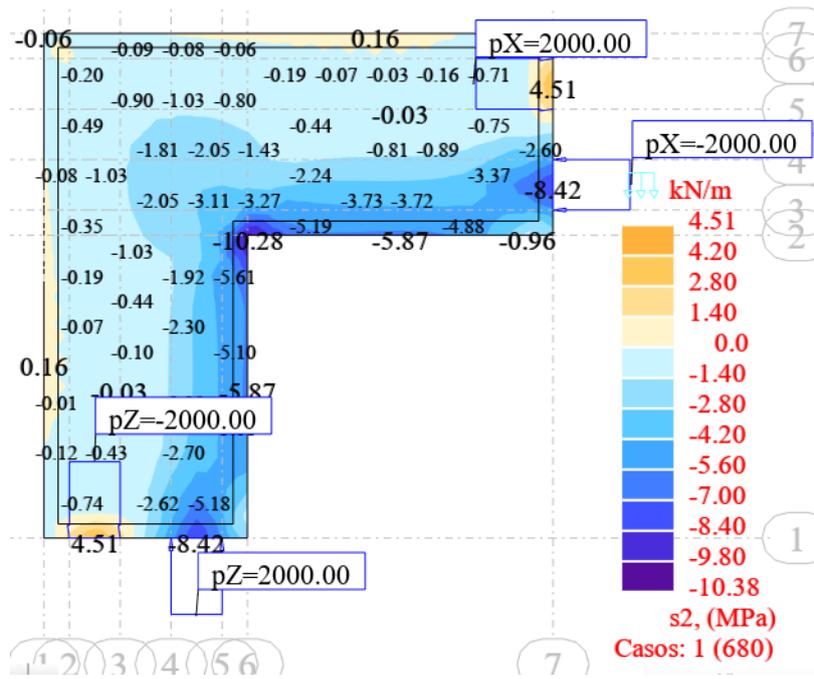


Figura 8-74 – Tensões principais mínimas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m.

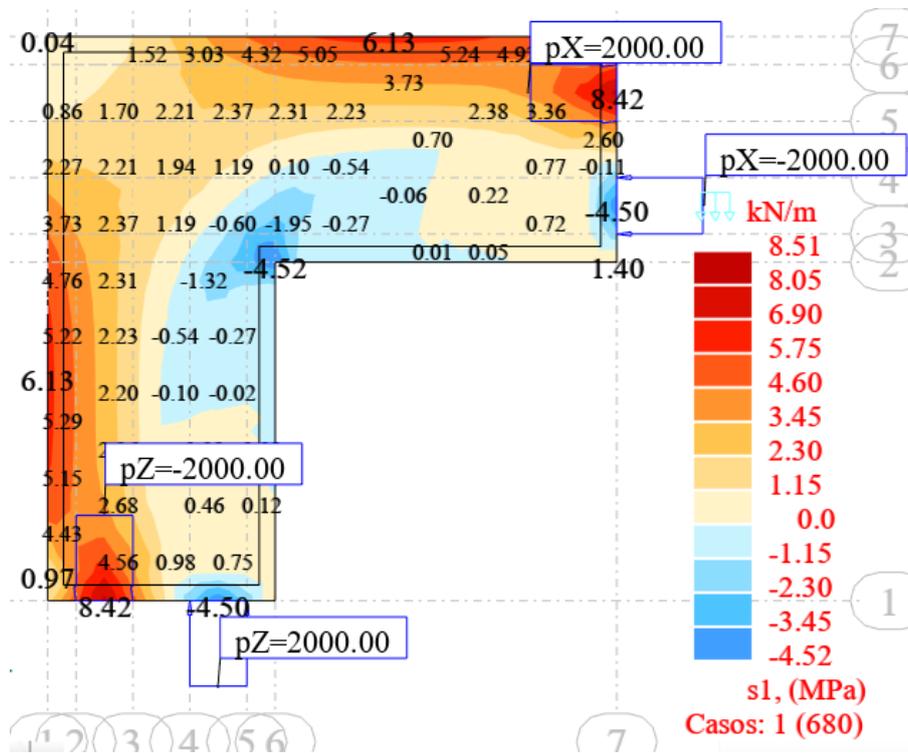


Figura 8-75 - Tensões principais máximas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m.

Para verificar a configuração de tensões principais na estrutura quando é considerada a fissuração do concreto, o elemento foi modelado no ATENA. As armaduras foram dispostas de acordo com o que é mostrado na Figura 8-73. Com base em FUSCO (2013), para emendar as barras da viga no pilar, foi considerada uma dobra com pino de dobramento com diâmetro de 15 vezes o diâmetro da barra. Isso tem o objetivo de permitir que a tensão de tração presente na extremidade da armadura da viga seja capaz de ser transferida e conseqüentemente ancorada na armadura do pilar a partir de uma dobra suficiente para evitar o fendilhamento do concreto na região do encontro das armaduras. Pelo fato que o ATENA não permite (na versão utilizada) inserir barras com dobras, esse encontro das armaduras foi realizado de acordo com a Figura 8-76 considerando a utilização de barras de 16 mm de diâmetro.

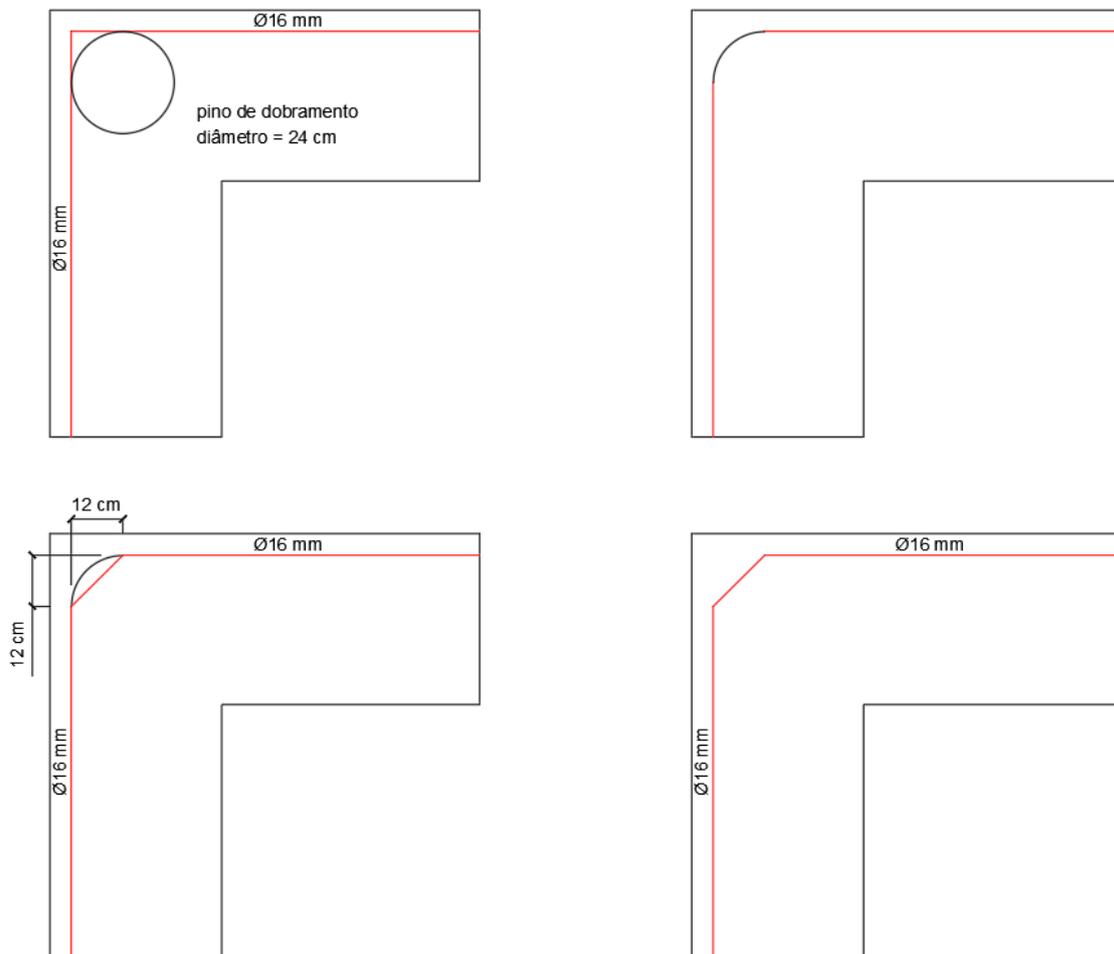


Figura 8-76 – Ancoragem da armadura da viga no pilar.

As tensões principais mínimas para o momento fletor de 60 kN.m considerando as fissuras no elemento podem ser observadas na Figura 8-77 enquanto as tensões principais máximas para este mesmo momento fletor estão apresentadas na Figura 8-78.

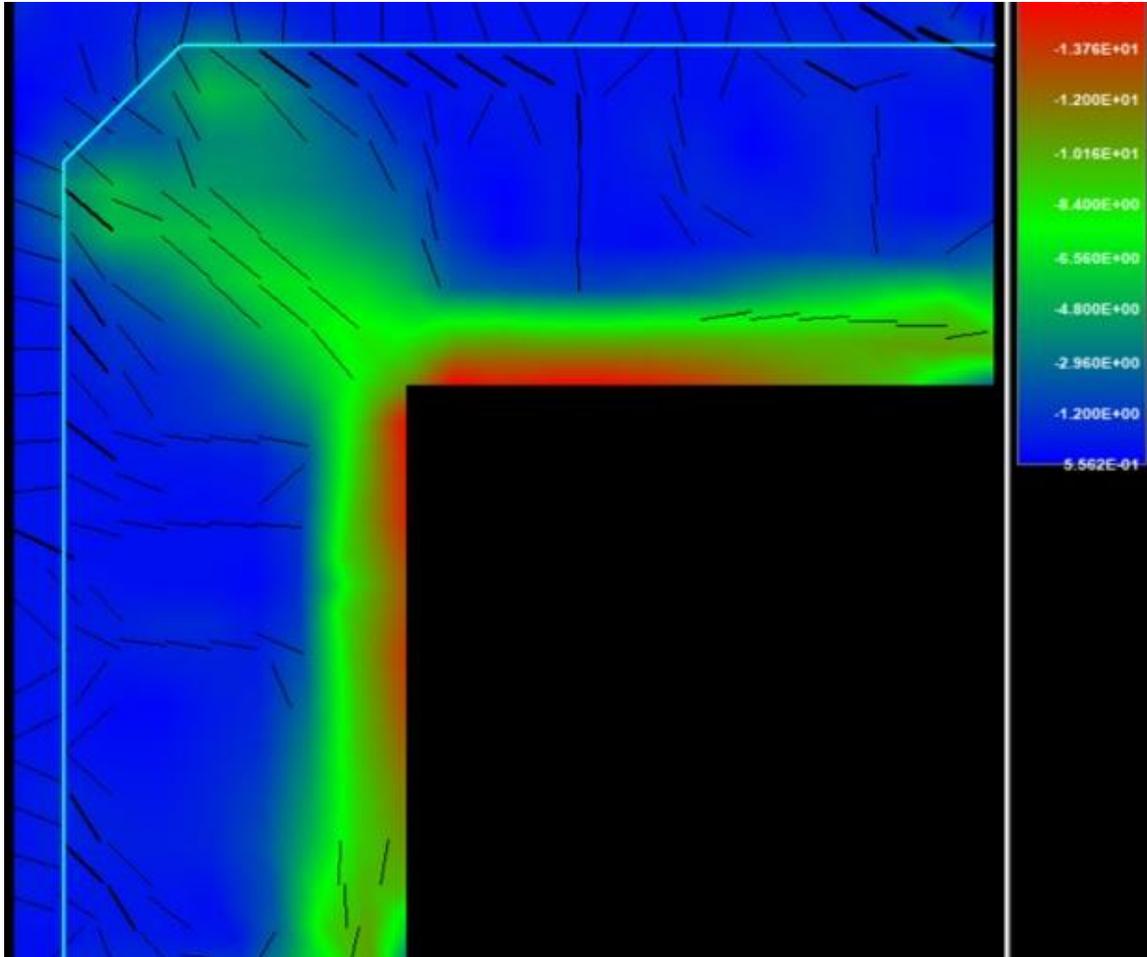


Figura 8-77 – Tensões principais mínimas na estrutura para o momento fletor de 60 kN.m.

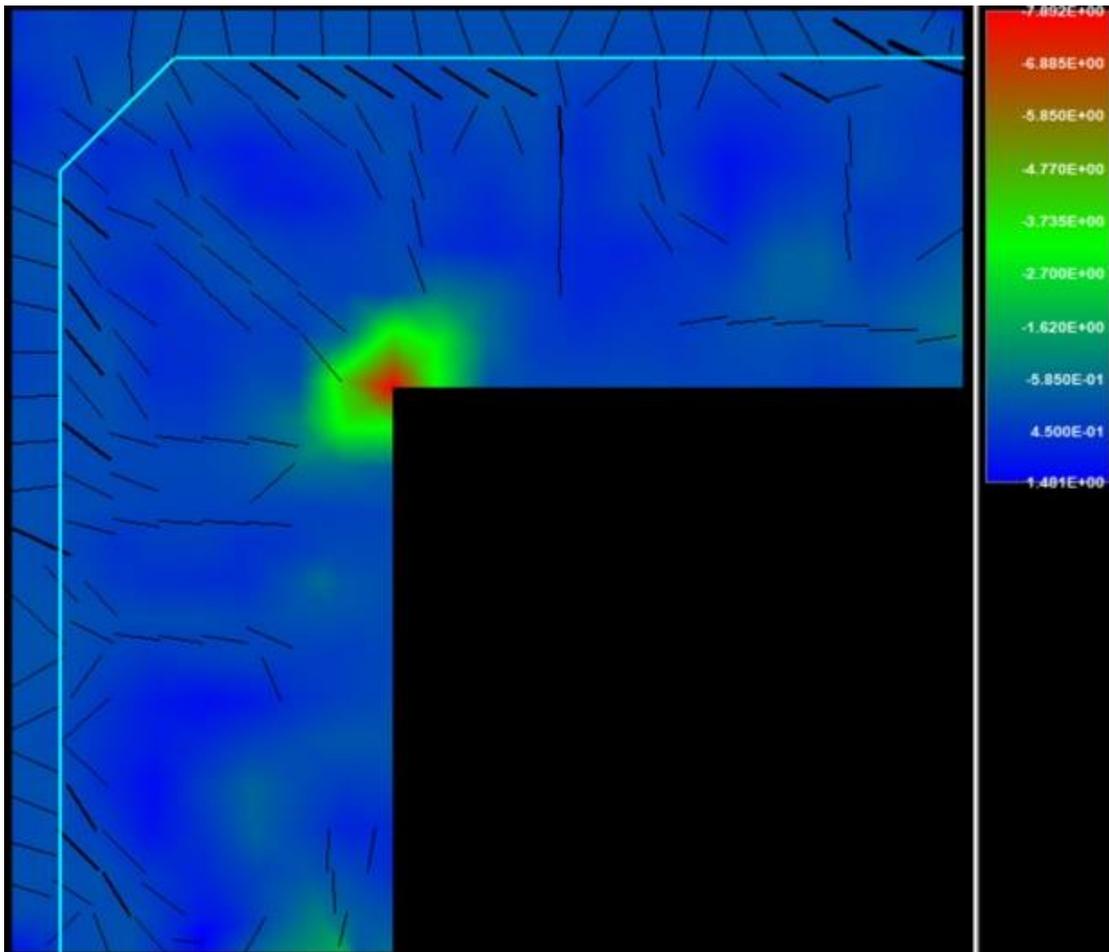


Figura 8-78 - Tensões principais máximas na estrutura para o momento fletor de 60 kN.m.

O terceiro modelo analisado neste item do trabalho consta de um nó de pórtico com características geométricas e concreto similares ao anterior, submetido ao mesmo carregamento, porém considerando momento fletor positivo. As considerações para o cálculo da armadura deste nó de pórtico estão apresentadas na Figura 8-79.

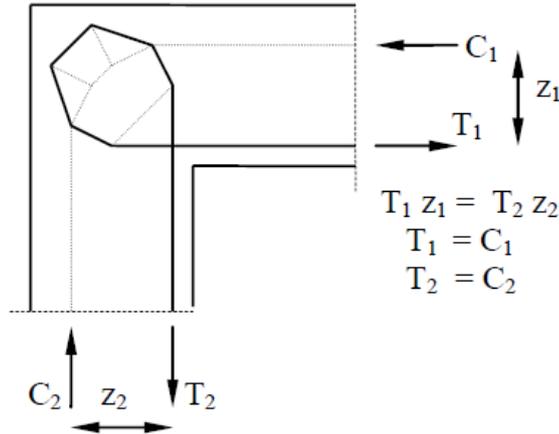


Figura 8-79 – Considerações para o cálculo da armadura do nó de pórtico submetido a um momento fletor positivo. Fonte: SANTOS (2020).

A Figura 8-80 apresenta as tensões principais mínimas em regime elástico para o nó de pórtico submetido ao momento fletor positivo de 60 kN.m. Já a Figura 8-81 mostra as tensões principais máximas em regime elástico da mesma estrutura para o mesmo momento fletor.

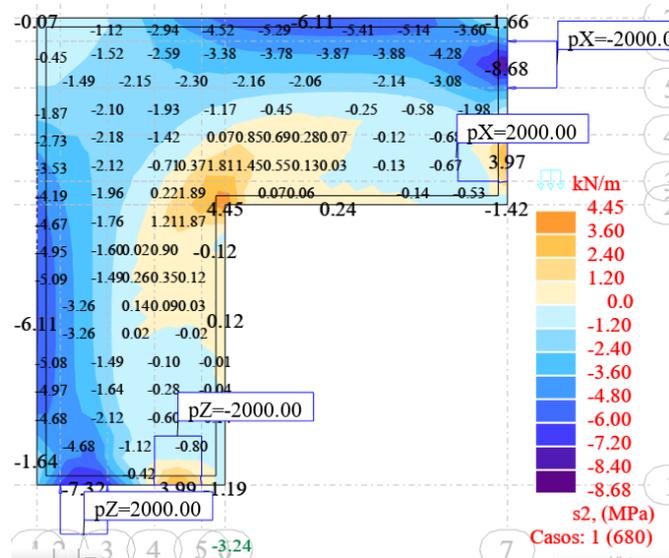


Figura 8-80 – Tensões principais mínimas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m.

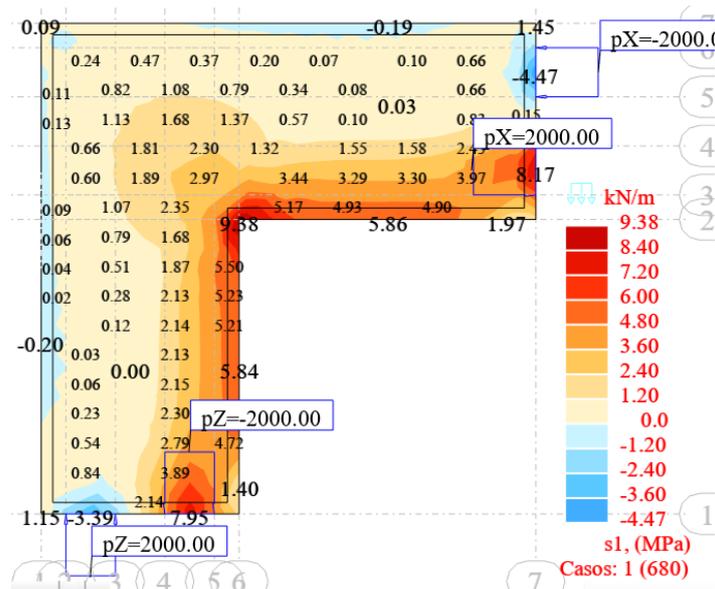


Figura 8-81 - Tensões principais máximas em regime elástico para o nó de pórtico submetido a um momento fletor de 60 kN.m.

Após as análises elásticas das tensões, foram realizadas as modelagens da estrutura no software ATENA e realizadas as análises considerando a fissuração do concreto. A Figura 8-82 apresenta as tensões principais mínimas para o momento fletor de 60 kN.m com o elemento fissurado enquanto a Figura 8-83 mostra as tensões principais máximas para esse mesmo caso.

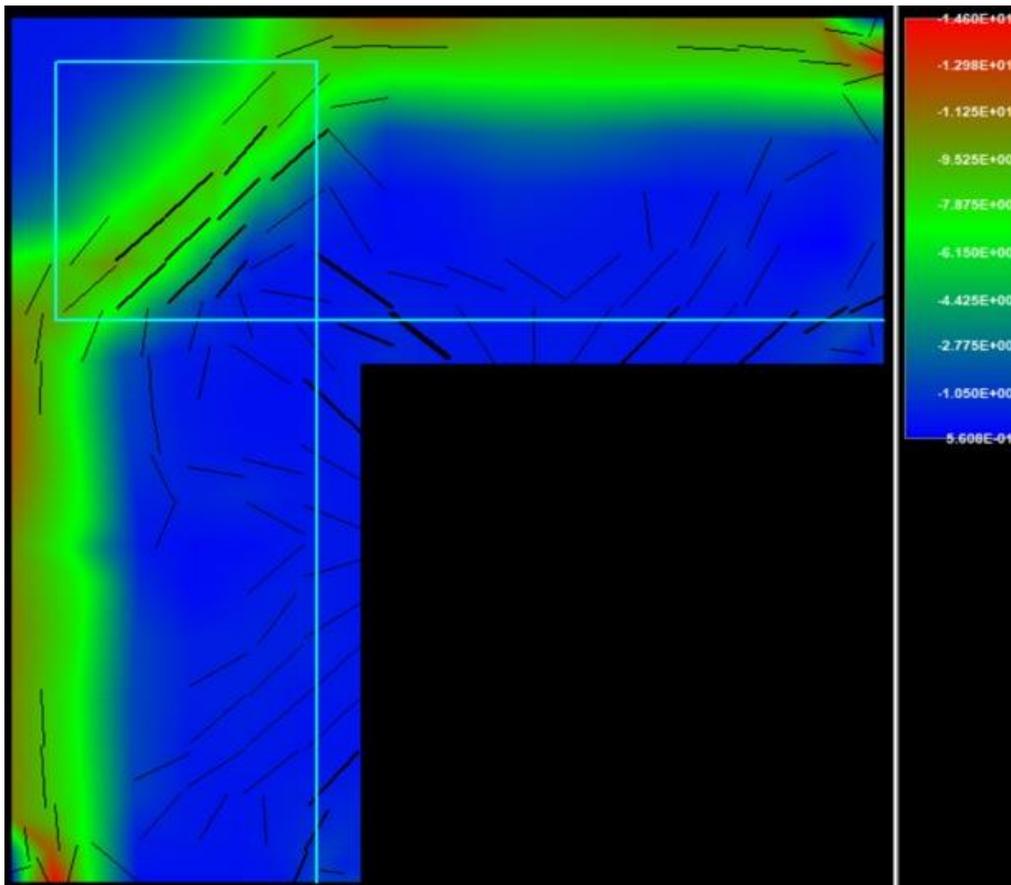


Figura 8-82 – Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto para o nó de pórtico submetido ao momento fletor positivo de 60 kN.m.

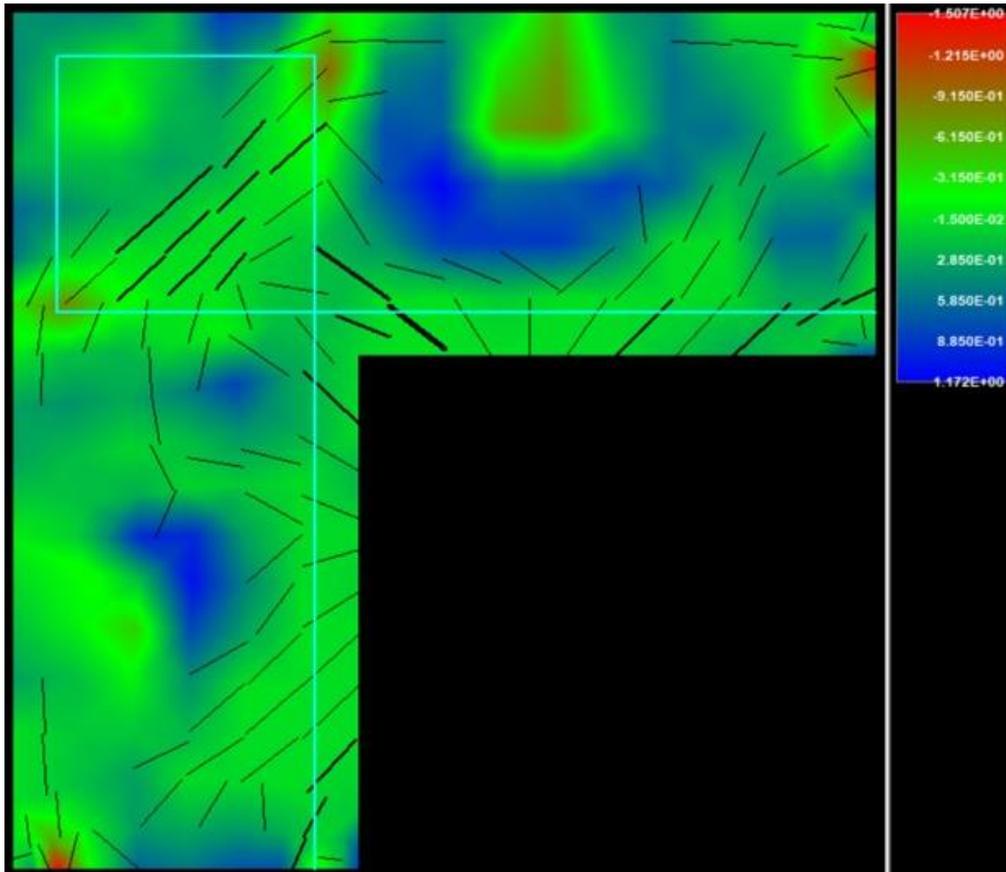


Figura 8-83 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto para o nó de pórtico submetido ao momento fletor positivo de 60 kN.m.

O quarto modelo analisado consta de uma viga bi apoiada com alturas diferentes e concreto C30. A viga em questão e suas armaduras dimensionadas pelo método de bielas e tirantes podem ser observadas na Figura 8-84.

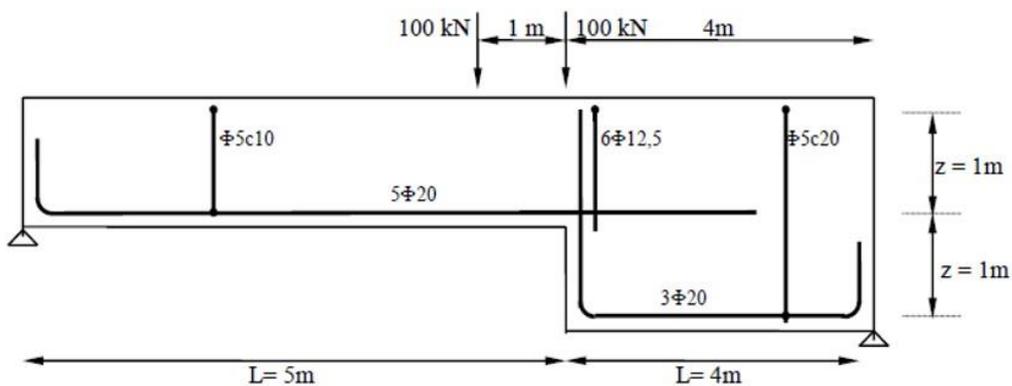


Figura 8-84 – Viga bi apoiada com alturas diferentes e suas armaduras. Fonte: SANTOS (2020).

Inicialmente foi realizada a modelagem da viga para se obter as tensões principais em regime elástico através do software Robot. Os carregamentos foram inseridos como cargas uniformemente distribuídas ao longo de comprimentos de 10 cm. As tensões principais elásticas mínimas podem ser observadas na Figura 8-85, enquanto as tensões principais elásticas máximas estão mostradas na Figura 8-86.

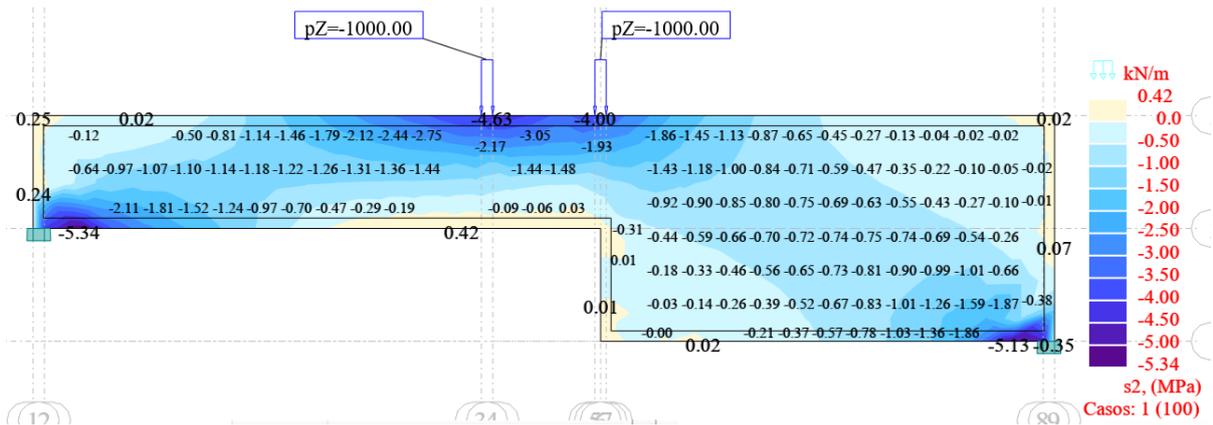


Figura 8-85 – Tensões principais elásticas mínimas na viga bi apoiada com alturas diferentes.

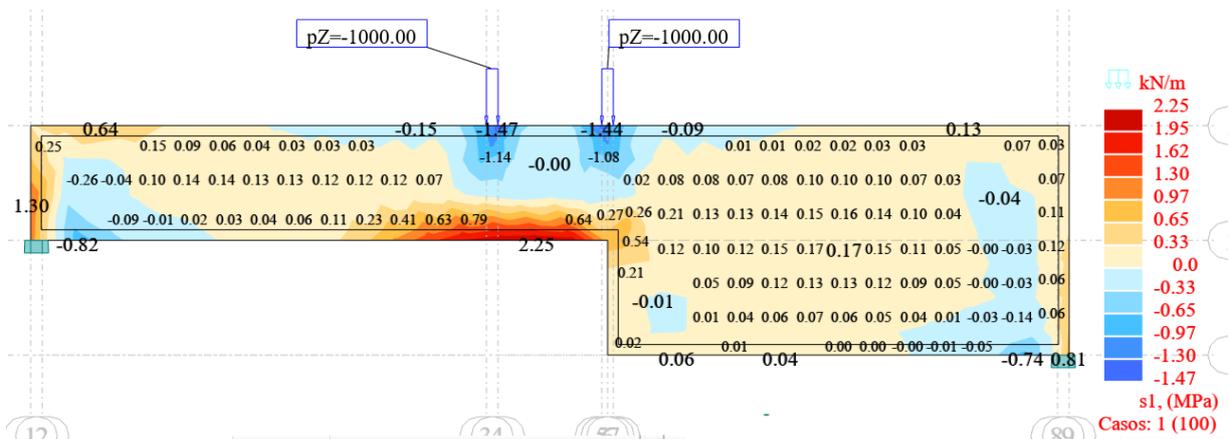


Figura 8-86 - Tensões principais elásticas máximas na viga bi apoiada com alturas diferentes.

Para verificar a configuração das tensões principais quando é considerada a fissuração do concreto, a viga foi analisada no software ATENA a partir de 20 incrementos de carga de 5 kN, totalizando 100 kN. A Figura 8-87 apresenta as tensões principais mínimas para o 20º incremento de carga, as armaduras e as fissuras presentes

na estrutura para esse carregamento de 100 kN. As tensões principais máximas considerando as fissuras para esse mesmo carregamento podem ser observadas na Figura 8-88.

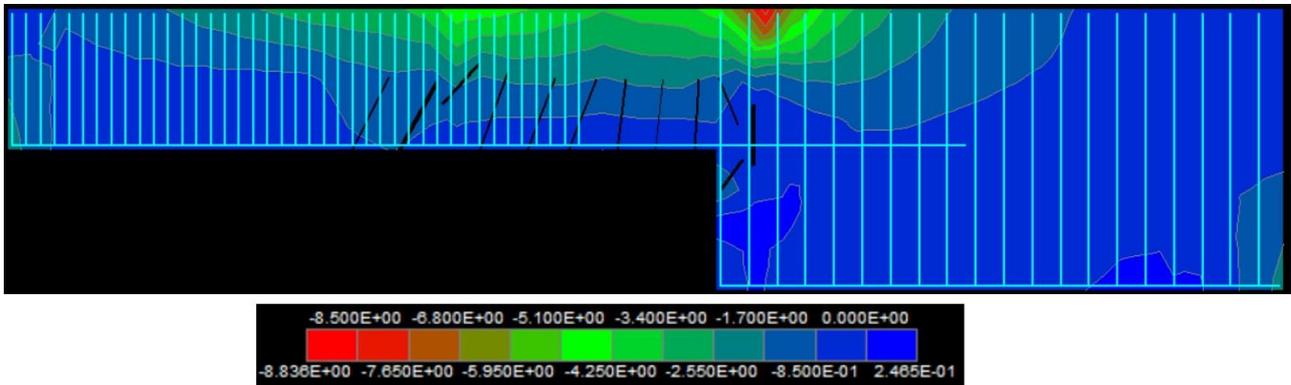


Figura 8-87 – Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga.

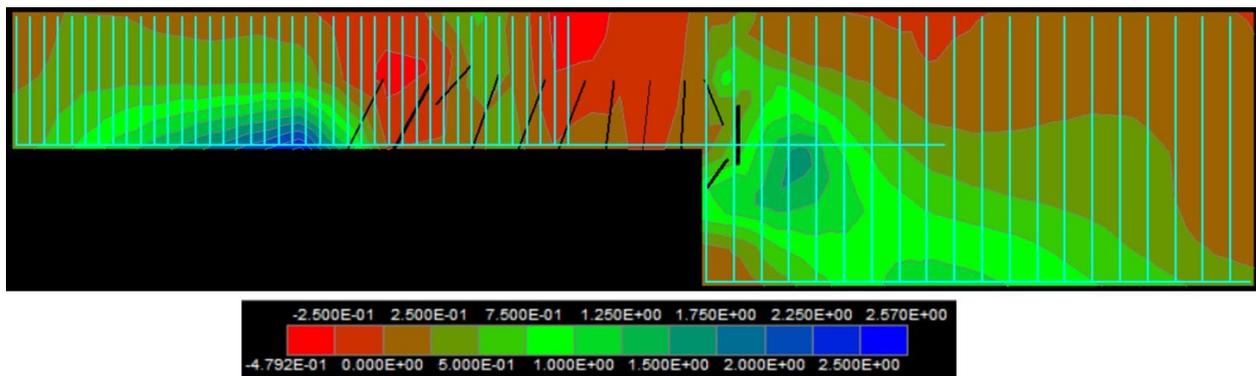


Figura 8-88 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga.

A partir da observação das imagens contendo as análises elásticas das tensões principais nas estruturas e aquelas que apresentam as análises das tensões principais considerando a fissuração do concreto é possível perceber que a configuração dessas tensões principais não é alterada de maneira significativa entre as duas análises. Essa observação é importante, pois indica que as armaduras dimensionadas pelo método de bielas e tirantes, o qual é baseado na análise elástica das tensões principais, não são alteradas quando a fissuração da estrutura passa a ser considerada.

O quinto elemento estrutural analisado é composto por uma viga bi apoiada em degrau com concreto C30. A geometria e as armaduras dessa viga podem ser observadas na Figura 8-89.

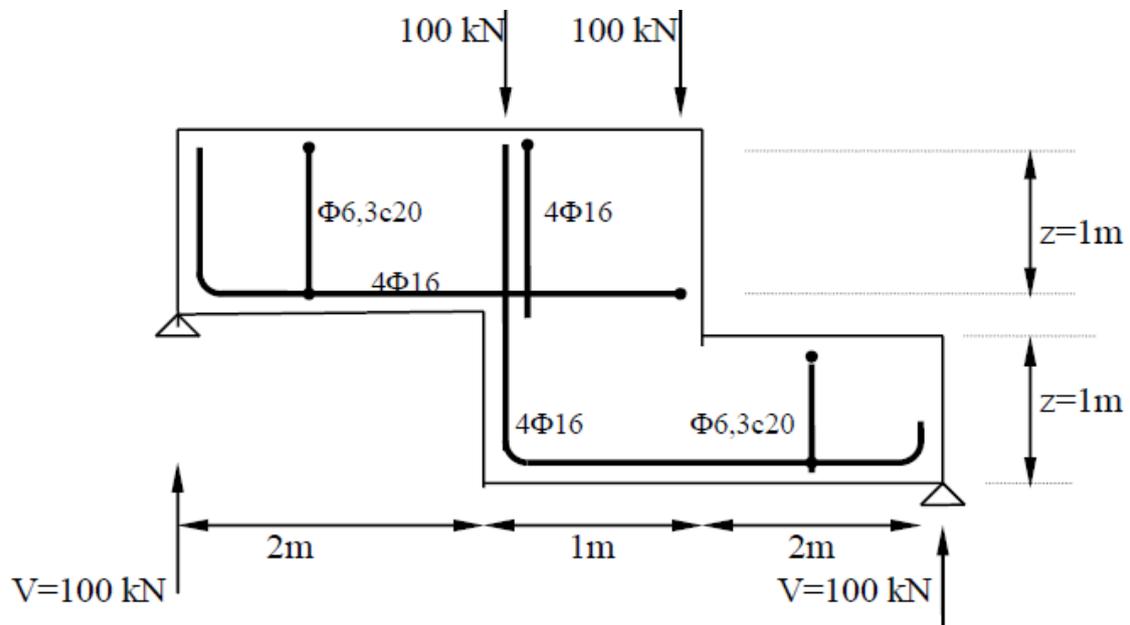


Figura 8-89 – Geometria e armaduras da viga bi apoiada em degrau a ser analisada.

Fonte: SANTOS (2020).

Para o cálculo das tensões elásticas essa estrutura foi modelada no software Robot e os carregamentos foram inseridos como cargas uniformemente distribuídas ao longo de comprimentos de 10 cm. As tensões principais elásticas mínimas podem ser observadas na Figura 8-90 enquanto as tensões elásticas máximas estão mostradas na Figura 8-91.

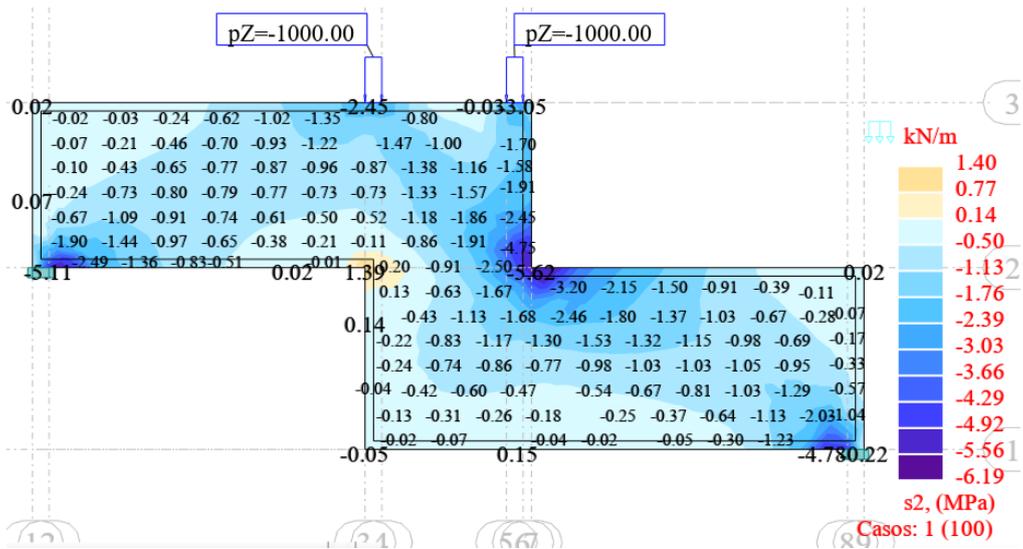


Figura 8-90 - Tensões principais elásticas mínimas na viga bi apoiada em degrau.

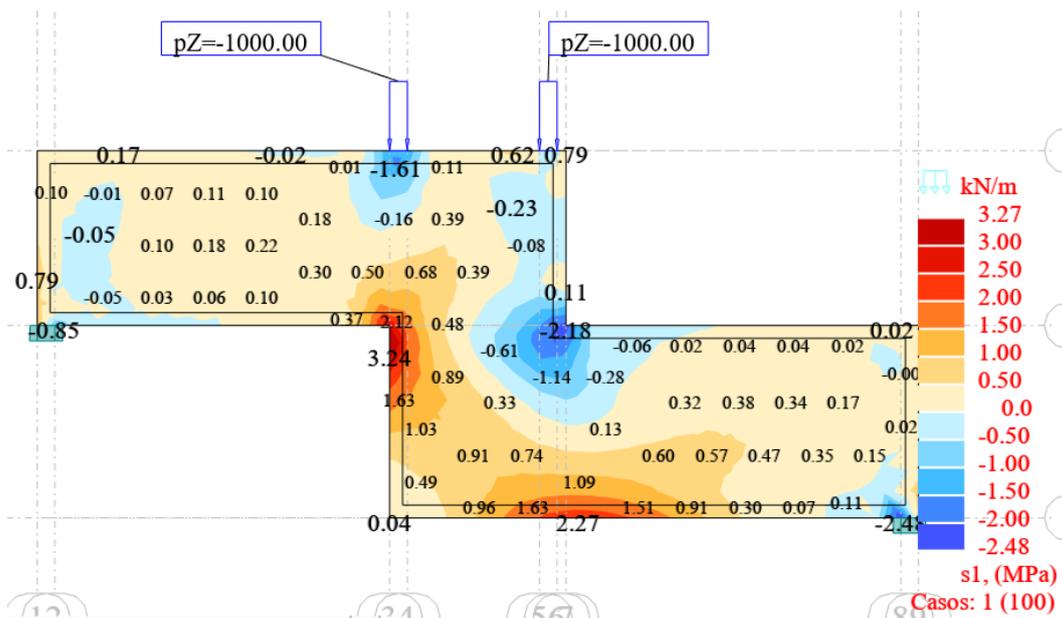


Figura 8-91 - Tensões principais elásticas máximas na viga bi apoiada em degrau.

Para verificar a configuração das tensões principais quando é considerada a fissuração do concreto, a viga foi analisada no software ATENA com 20 incrementos de carga de 5 kN, totalizando 100 kN. A Figura 8-92 apresenta as tensões principais mínimas para o 20º incremento de carga, as armaduras e as fissuras presentes na estrutura para esse carregamento de 100 kN. As tensões principais máximas considerando as fissuras para esse mesmo carregamento podem ser observadas na Figura 8-93.

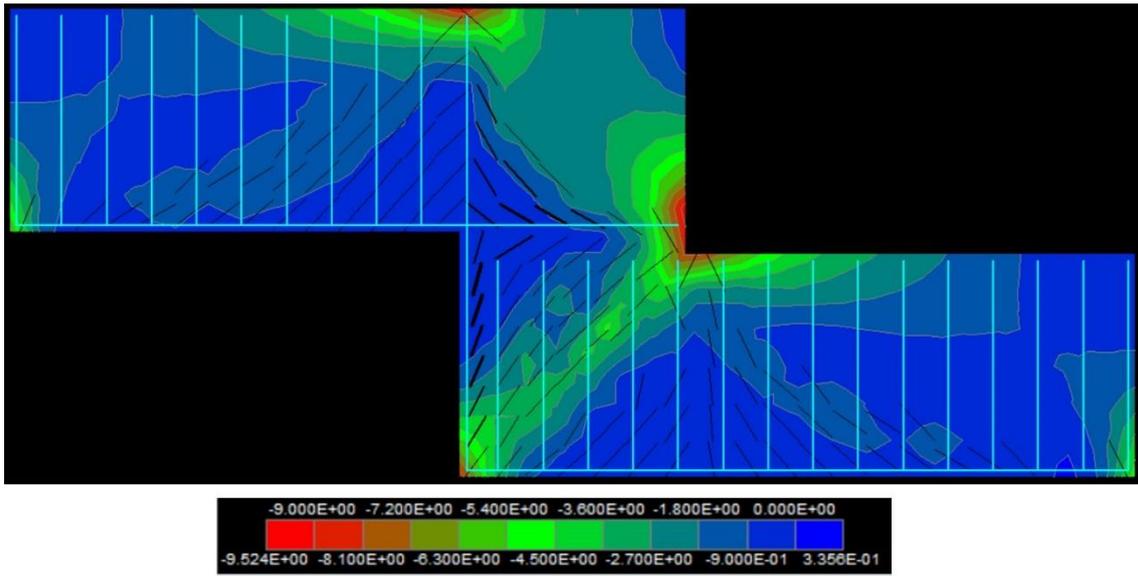


Figura 8-92 - Tensões principais mínimas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga.

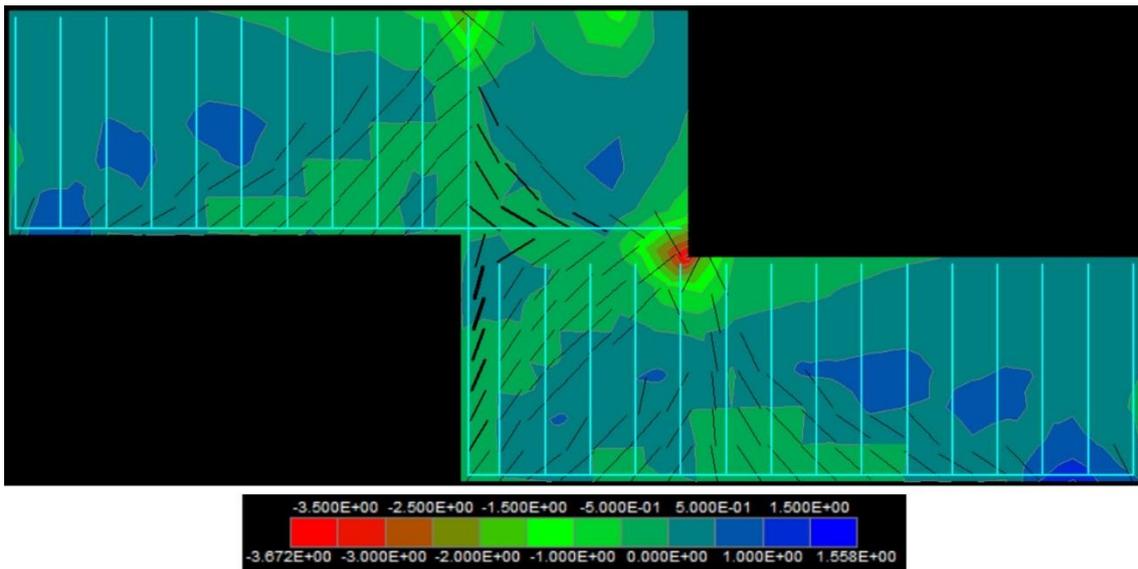


Figura 8-93 - Tensões principais máximas considerando a fissuração do concreto na viga bi apoiada para o 20º incremento de carga.

O sexto modelo analisado trata-se de uma viga em balanço com concreto C30, cuja geometria e cargas estão apresentadas na Figura 8-94.

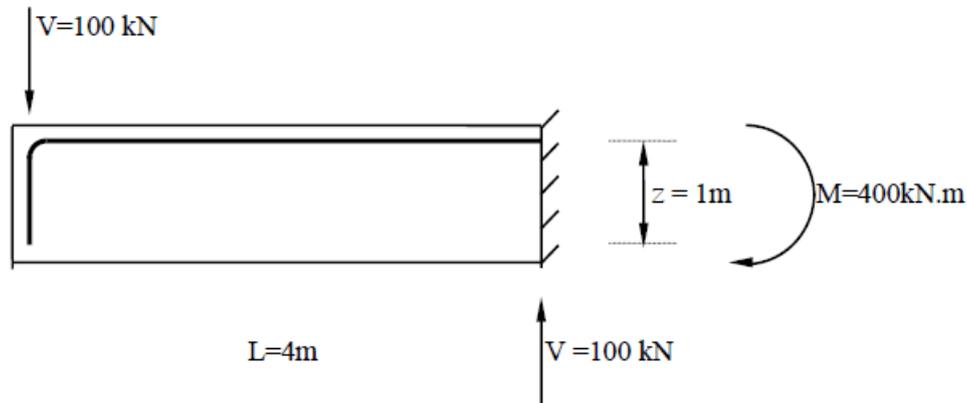


Figura 8-94 – Viga em balanço. Fonte: SANTOS (2020).

Para o cálculo das tensões elásticas essa estrutura foi modelada no software Robot e os carregamentos foram inseridos como cargas uniformemente distribuídas ao longo de comprimentos de 10 cm. As tensões principais elásticas mínimas podem ser observadas na Figura 8-95 enquanto as tensões elásticas máximas estão mostradas na Figura 8-96.

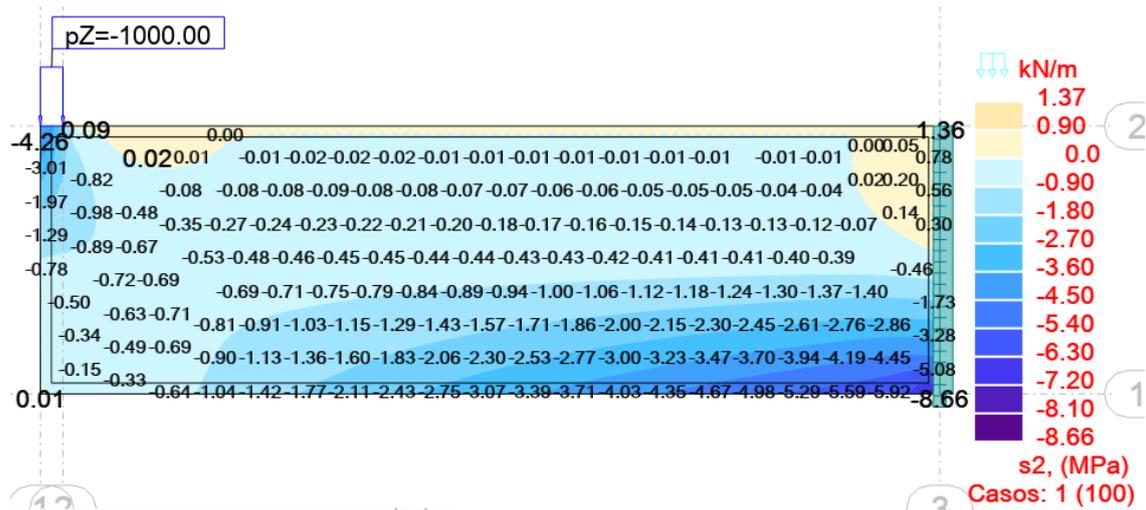


Figura 8-95 – Tensões principais elásticas mínimas na viga em balanço.

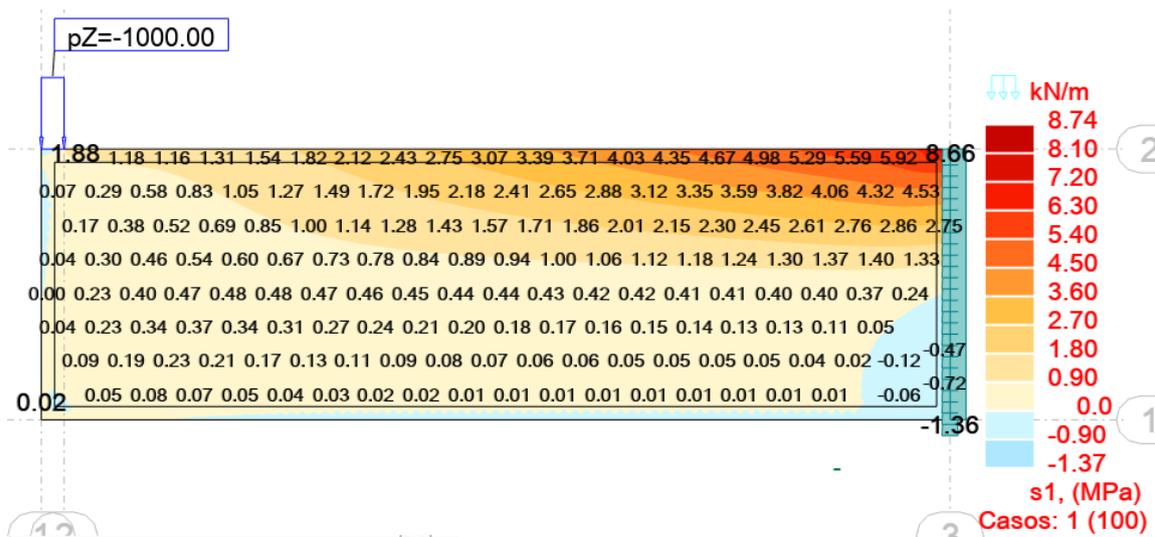


Figura 8-96 - Tensões principais elásticas máximas na viga em balanço.

Para verificar a configuração das tensões principais quando é considerada a fissuração do concreto, a viga em balanço foi analisada no software ATENA com 20 incrementos de carga de 5 kN, totalizando 100 kN. A Figura 8-97 apresenta as tensões principais mínimas para o 20º incremento de carga, as armaduras e as fissuras presentes na estrutura para esse carregamento de 100 kN. As tensões principais máximas considerando as fissuras para esse mesmo carregamento podem ser observadas na Figura 8-98.

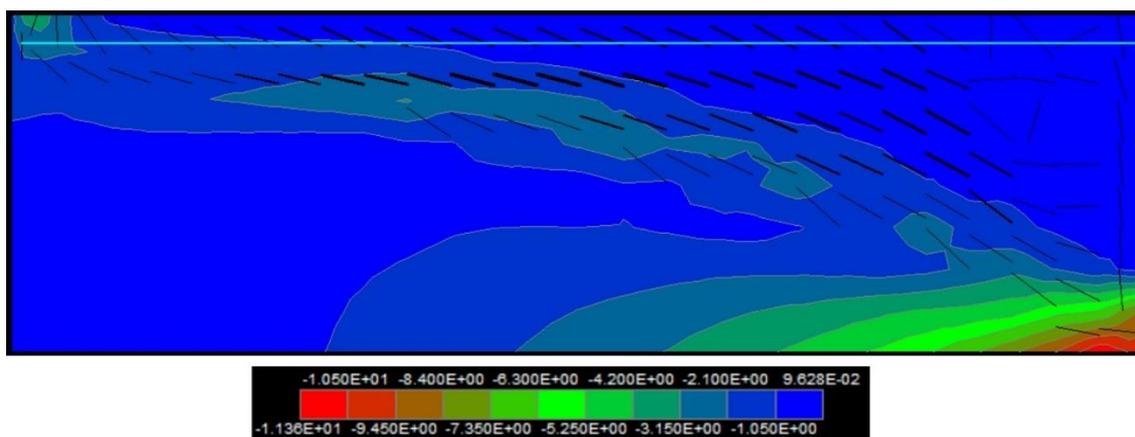


Figura 8-97 – Tensões mínimas na viga em balanço considerando a fissuração do concreto.

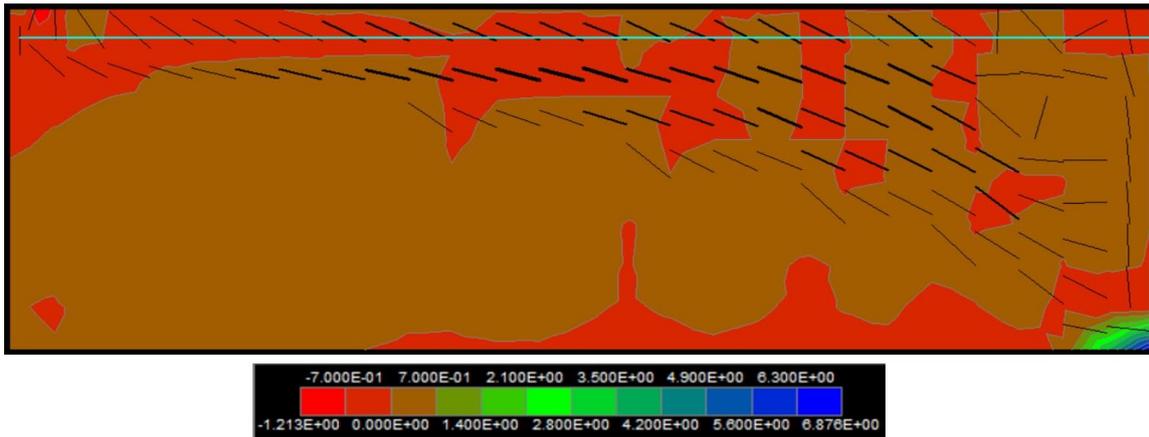
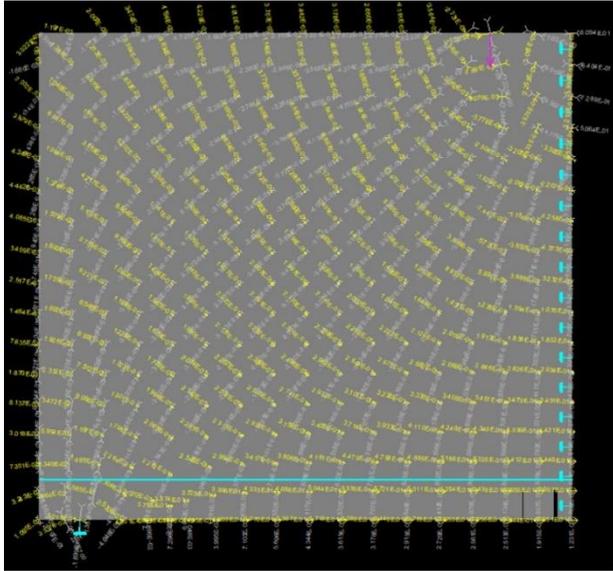
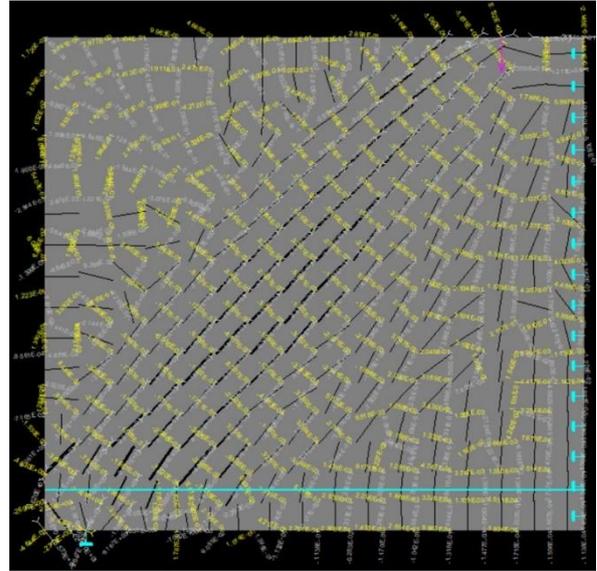


Figura 8-98 - Tensões máximas na viga em balanço considerando a fissuração do concreto.

Dessa forma, foram apresentadas as tensões elásticas e as tensões considerando a fissuração do concreto para os seis elementos estruturais propostos. É possível perceber que a configuração das tensões principais não se altera de maneira significativa entre a análise elástica e aquela considerando o concreto fissurado, porém, foi ainda realizada uma análise dos tensores de tensões que atuam nas estruturas quando elas apresentam pouca ou nenhuma fissura, com incrementos iniciais de carga e quando a estrutura apresenta a fissuração decorrente do carregamento total analisado. O objetivo dessa análise é verificar se as direções das tensões principais sofrem alteração significativa entre os instantes em que a estrutura está submetida a pequenos carregamentos, com pouca fissuração e no momento em que o carregamento total é alcançado e a estrutura encontra-se com sua fissuração máxima. As Figura 8-99 a 8-104 apresentam os tensores de tensões principais das estruturas analisadas neste item do trabalho.

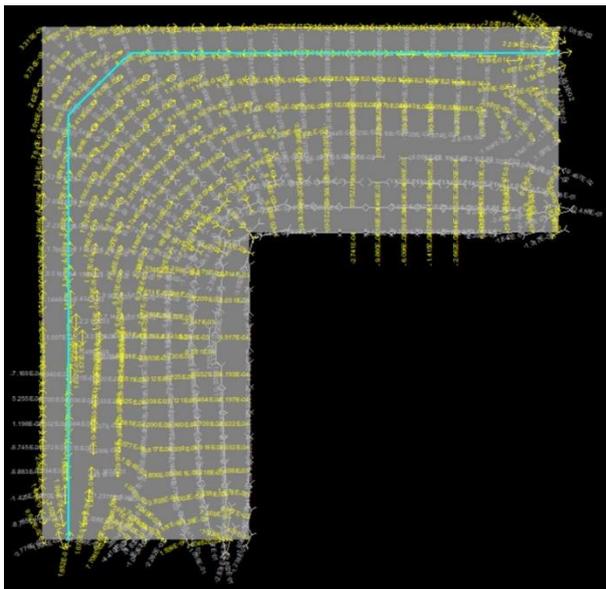


1º incremento de carga

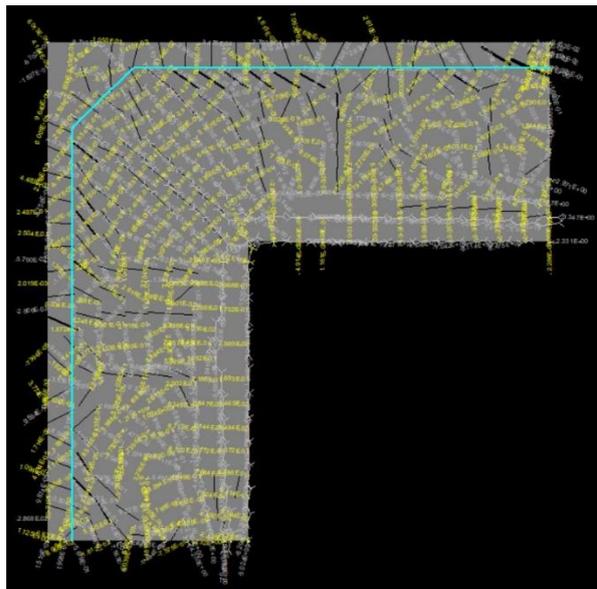


17º incremento de carga

Figura 8-99 – Tensores de tensões principais na parede.

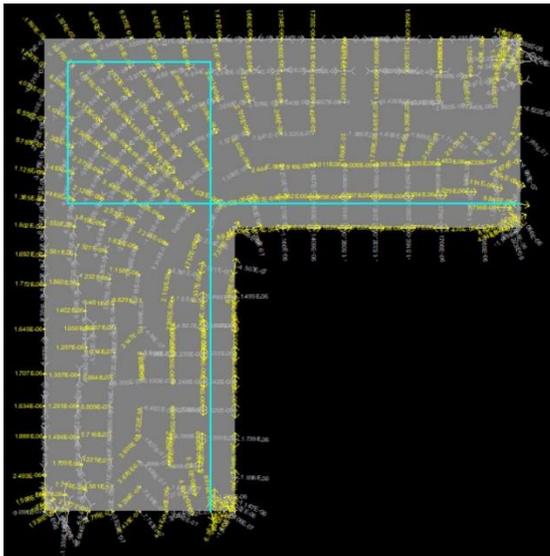


1º Incremento de Carga

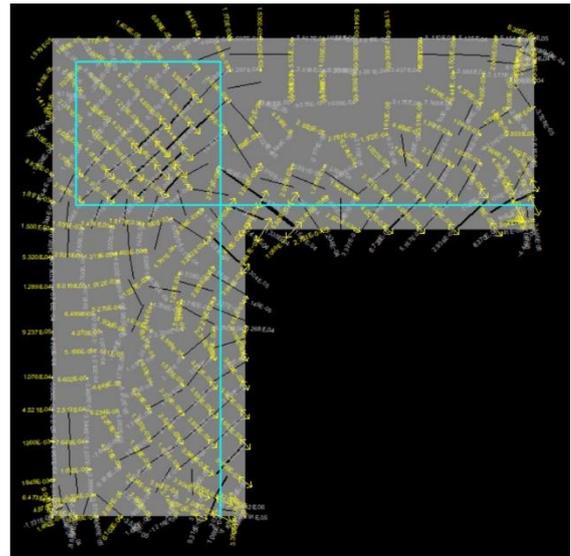


40º Incremento de Carga

Figura 8-100 – Tensores de tensões principais no nó de pórtico submetido a um momento fletor negativo.

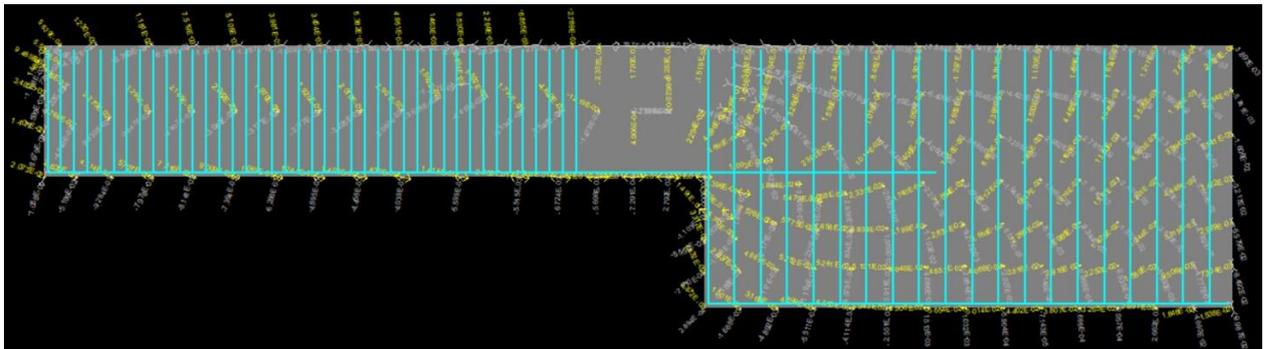


1º Incremento de Carga

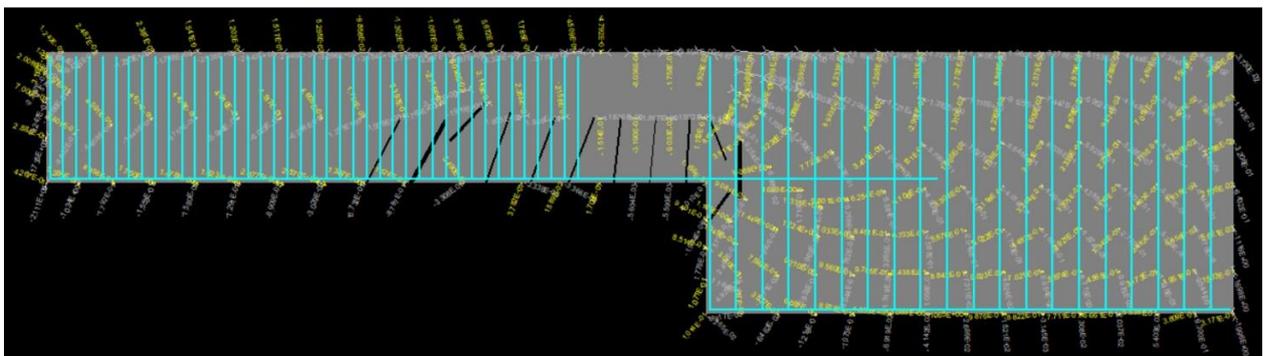


40º Incremento de Carga

Figura 8-101 - Tensores de tensões principais no nó de pórtico submetido a um momento fletor positivo.

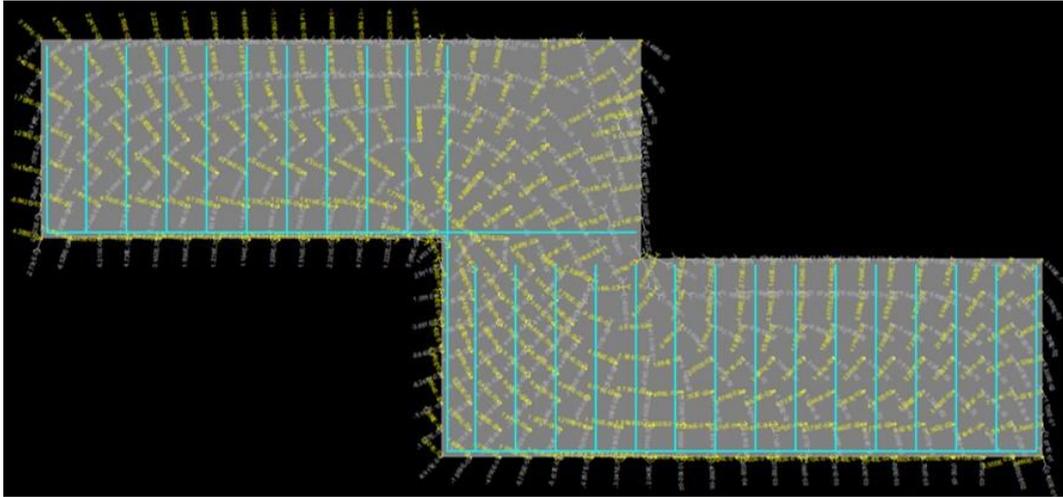


1º Incremento de Carga

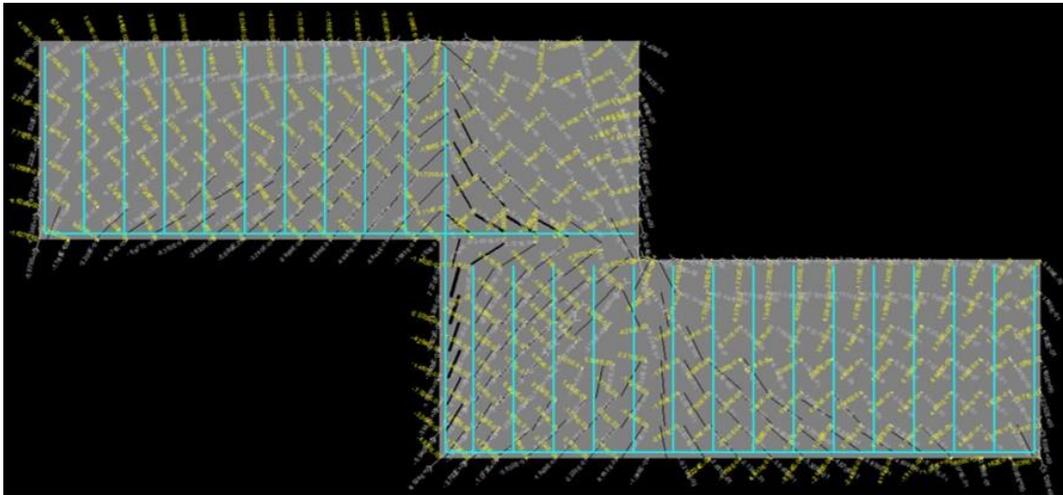


20º Incremento de Carga

Figura 8-102 - Tensores de tensões principais na viga bi apoiada com alturas diferentes.

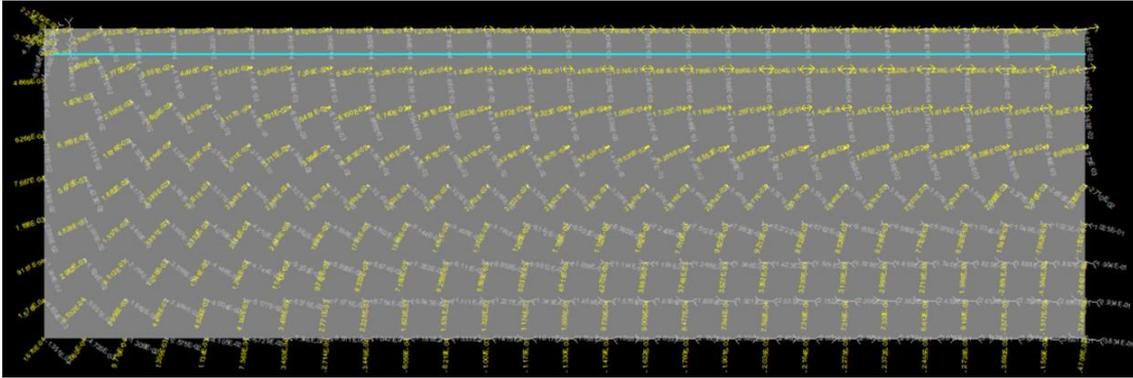


1º Incremento de Carga

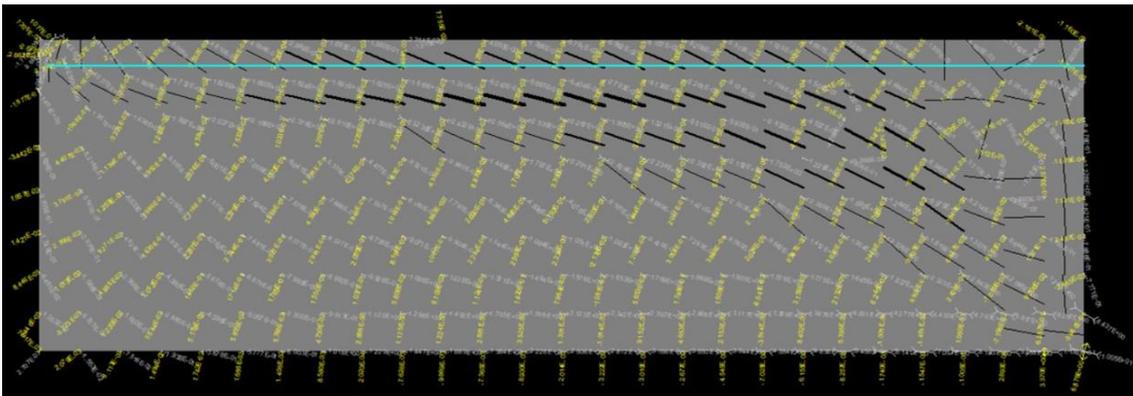


20º Incremento de Carga

Figura 8-103 - Tensores de tensões principais na viga bi apoiada em degrau.



1º Incremento de Carga



20º Incremento de Carga

Figura 8-104 - Tensores de tensões principais na viga em balanço.

Nas imagens dos tensores de tensões principais, os valores na cor amarela representam as tensões máximas e os valores na cor cinza são as tensões mínimas. Os ângulos nos quais esses valores estão dispostos representam as direções das tensões principais. Ao observar essas imagens, é possível perceber que a direção das tensões principais sofre ligeira alteração entre a análise da estrutura para incrementos de carga que geram poucas ou nenhuma fissura e para a carga total na qual a fissuração máxima ocorre no elemento estrutural. Isso é interessante, pois indica que as armaduras dimensionadas pelo método de bielas e tirantes, o qual é baseado na análise linear elástica das tensões que atuam nas estruturas, não sofrem alteração quando é considerada a fissuração do concreto, condição esta que condiz com a realidade das estruturas compostas com este material.

## 9. CONCLUSÕES

---

O presente trabalho apresentou diversas estruturas de concreto armado dimensionadas por meio do método de bielas e tirantes, o qual baseia-se na configuração de tensões elásticas que ocorre nos elementos estruturais submetidos aos diversos carregamentos. A partir do dimensionamento das armaduras por meio do método de bielas e tirantes, as estruturas foram então submetidas à análise não linear por meio do software de elementos finitos ATENA, o qual considera a fissuração do concreto através da energia de fratura. A análise não linear dessas estruturas teve por objetivo verificar se com a fissuração do concreto a configuração de tensões principais sofre alteração a ponto de ser necessário modificar o arranjo das armaduras obtidas por meio da análise linear elástica das tensões principais.

Os exemplos analisados neste trabalho demonstraram que as armaduras obtidas pelo método de bielas e tirantes foram suficientes para que as estruturas atendessem ao estado limite último. É interessante notar que regiões com tensões principais de tração provenientes da análise linear elástica tendem a ter seus valores reduzidos conforme a fissuração do concreto ocorre nessas regiões. Isso era de se esperar, pois ao fissurar, as tensões de tração que antes atuavam no concreto passam a ser suportadas pelas armaduras de aço. Entretanto, as análises não lineares demonstraram que o método de bielas e tirantes pode não prever armaduras em locais onde há a necessidade de barras de aço para reduzir a abertura de fissuras e dessa maneira atender o estado limite de serviço.

Algumas limitações deste trabalho devem ser consideradas. Inicialmente há de se levar em conta a dificuldade de representar o comportamento frágil do concreto através de modelos matemáticos. O software ATENA considera a fissuração através da energia de fratura do concreto e, portanto, o modelo utilizado para se calcular a energia de fratura a ser considerado interfere nos resultados das análises. Outra limitação presente neste trabalho é o fato de ter sido utilizada uma versão “demo” do software ATENA, pois essa versão é disponibilizada para uso livre pelo próprio desenvolvedor do programa, a empresa Cervenka Consulting. Nessa versão “demo” as estruturas modeladas apresentam limitação de 300 elementos para o modelo de elementos finitos, além de serem permitidas apenas análises com duas dimensões. A limitação do número de elementos no modelo restringe a capacidade de discretizar a estrutura a ser analisada.

Por fim, conclui-se que o trabalho conseguiu cumprir o objetivo proposto e sugere-se que novos estudos sejam realizados na abordagem do método de bielas e tirantes para

dimensionamento de estruturas de concreto armado, visto que esse método é muito importante para a engenharia estrutural, pois ele permite o projeto de qualquer tipo de estrutura, não apenas aquelas com geometrias convencionais.

## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

**Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis.** 2D v5 DEMO. Cervenka Consulting, Disponível em: <https://www.cervenka.cz/download/>.

AGUIAR, C. C. P. **Dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado pelo método de bielas e tirantes**, Dissertação de Mestrado, Programa de Projeto de Estruturas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto: Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014.

BUCHAIM, R. **Concreto Estrutural: Fundamentos e Projeto.** Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2016.

CARVALHO, R.C.; FIGUEREDO FILHO, J.R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado.** São Carlos: Editora da Universidade Federal de São Carlos, 2019.

CHEN, H; YI, W. J.; HWANG, H. J. **Cracking strut-and-tie model for shear strength evaluation of reinforced concrete deep beams.** Engineering Structures, p. 396-408, 2018.

CLÍMACO, J.C.T.S. **Estruturas de concreto armado.** Elsevier, 2016.

DEMETRIO, K. S; AGUIAR, C. C. P. **Dimensionamento de Vigas de Concreto Armado com Abertura pelo Método de Bielas e Tirantes.** XII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, jun. 2021.

FUSCO, P. B. **Técnica de Armar as Estruturas de Concreto.** 2. ed. São Paulo: PINI, 2013.

GERE, J. M; GOODNO, B. J. **Mecânica dos Materiais.** 7. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2013.

GHORABA, A. K; EL-METWALLY, S. E; EL-ZOUGHIBY, M. E. **The strut-and-tie model and the finite element - good design companions.** Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics, v. 3, p. 244-275, 2020.

HILLERBORG, A; MODÉER, M; PETERSSON, P-E. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.** Cement and concrete research, p. 773-782, 1976.

ISMAIL, E; ISSA, M. S; ELBADRY, K. **Finite element analysis of reinforced concrete deep beam with large opening**. Beni-Suef University Journal of Basic and Applied Sciences, p. 1-13, 7 jun. 2021.

LANES, R M; GRECO, M; GUERRA, M B B F. **Strut-and-tie models for linear and nonlinear behavior of concrete based on topological evolutionary structure optimization (ESO)**. IBRACON Structures and Materials Journal, v. 12, p. 87-100, 2019.

LESSA, J. P. L; LIMA, I. E. P; MARQUES, M. F; CARMO, P. C; JUNIOR, E. T. L. **Confiabilidade estrutural aplicada a um modelo de bielas e tirantes para consolo curto de concreto**. XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2020.

LEONHARDT, F; MONNIG, E. **Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2008. v. 1.

MUSTAFA, T S; BESHARA, F B A; MAHMOUD, A A; KHALIL, M M A. **An improved strut-and-tie model to predict the ultimate strength of steel fiber-reinforced concrete corbels**. Materials and Structures, 2019.

NOGUEIRA, C. G; RODRIGUES, I. D. **Novo modelo de dimensionamento de vigas em concreto armado à flexão simples considerando o fator de ductilidade**. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, v. 13, n. 1, p. 120-141, 2020.

OZÓG, L. BUDA. **Probabilistic assessment of load-bearing capacity of deep beams designed by strut-and-tie method**. MATEC Web of Conferences 262, 08001 (2019), 2019.

PUEL, ANDRÉ. **Modelagem com plastificação de lajes lisas**. 2018. Tese de Doutorado (Doutorado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2018.

**Robot Structural**. versão 2019. Autodesk.

RODRIGUES, P. Q; PANTOJA, J. C. **Modelagem numérica de vigas de equilíbrio via método de bielas e tirantes**. XII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, 2021.

SANTOS, S. H. C. **Apostila de Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado**. UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020.

SOUZA, R. A; BITTENCOURT, T. N . **VISTA2002 - Aplicativo para Identificação Automática dos Modelos de Escoras e Tirantes**. Revista Tecnológica (UEM), Maringá, v. 12, p. 67-79, 2003.

SOUZA, R. A; BITTENCOURT, T. N. **Análise, Dimensionamento e Verificação de Elementos Especiais em Concreto Armado Utilizando o Método dos Elementos Finitos e o Método das Bielas**. Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Barcelona, v. 22, n.1, p. 31-44, 2006.

SCHLAICH, J; SCHAFER, K; JENNEWEIN, M. **Toward a Consistent Design of Structural Concrete**. PCI JOURNAL, p. 74-150, 1987.

SILVA, R. J. C; OLIVEIRA, D. R. C; ALBUQUERQUE, N. G. B; GOMES, T. A; NZAMBI, A. K. L. L. **Punching shear in flat slabs by strut and tie model**. IBRACON Structures and Materials Journal, p. 1-13, 2021.

XIA, Y; LANGELAAR, M; HENDRIKS, M. A. N. **Optimization-based three-dimensional strut-and-tie model generation for reinforced concrete**. COMPUTER-AIDED Civil and Infrastructure ENGINEERING, 2020.