



**Universidade Federal do Rio de Janeiro**  
**Escola Politécnica**  
**Programa de Projeto de Estruturas**

André Pimenta Celeste

**MODELO DO PAINEL FISSURADO**  
**APLICADO A VIGAS DE CONCRETO ARMADO**



UFRJ

André Pimenta Celeste

**MODELO DO PAINEL FISSURADO APLICADO A VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Rio de Janeiro

2015

Celeste, André Pimenta

Modelo do painel fissurado aplicado a vigas de concreto armado / André Pimenta Celeste – 2015.

97: 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2015.

Orientador: Sergio Hampshire de Carvalho Santos

1. Painel fissurado, 2. Concreto armado, 3. Aplicações. I. Santos, Sergio Hampshire de Carvalho II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola Politécnica. III. Título.



UFRJ

**MODELO DO PAINEL FISSURADO APLICADO A VIGAS DE CONCRETO  
ARMADO**

André Pimenta Celeste

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Aprovada pela Banca:

---

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc., UFRJ

---

Prof. Henrique Innecco Longo, D. Sc., UFRJ

---

Prof. Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho, D. Sc., PUC-RJ

---

Dr. Diego Orlando, D. Sc., ENGEVIX.

Rio de Janeiro  
2015

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Sergio Hampshire de Carvalho Santos pelo apoio, paciência e atenção dada para a conclusão deste trabalho, além do seu empenho em desenvolver o Programa de Projeto de Estruturas para disseminar o conhecimento da Engenharia para os menos experientes.

Ao Professor Henrique Innecco Longo, pelos ensinamentos e pela participação nesta Banca.

Ao D.Sc. Diego Orlando, pelo incentivo ao longo da elaboração deste trabalho e pela participação nesta Banca.

Ao Professor Júlio Jerônimo Holtz Silva Filho, pela participação nesta Banca.

Ao Professor Plácido Barbosa, pela enorme contribuição e incentivo ao longo da elaboração deste trabalho.

À minha família, pelo apoio incondicional e necessário para que eu concluísse a graduação. Em especial ao meu Pai, Sergio Celeste, engenheiro civil que me inspirou profissionalmente e pelo exemplo de vida. À minha mãe, Fátima pelos bons conselhos e por sempre me incentivar.

À minha esposa Bruna que sempre me apoiou, esteve ao meu lado e sofreu com minhas privações para a conclusão deste trabalho.

Aos amigos que sempre acreditaram, me incentivaram e torceram por mim.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

Celeste, André Pimenta. **Modelo do Painel Fissurado Aplicado a Vigas de Concreto Armado**. Rio de Janeiro. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2015.

Este trabalho desenvolve métodos racionais, baseados no modelo de painel fissurado, para que seja considerada a influência do esforço cortante acoplado ao dimensionamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão-composta, considerando o efeito da não-linearidade física. O modelo do painel fissurado se baseia numa generalização da treliça de Morsch, com variação dos ângulos de inclinação das bielas de compressão ao longo da altura da seção, admitindo-os iguais ao ângulo de inclinação das fissuras. A Teoria do Campo de Compressão pode ser considerada como o “estado da arte” no dimensionamento do concreto estrutural, mas a sua utilização não é intuitiva e nem prática para o cálculo usual. Para conseguir manusear essa teoria, sem que seja necessário fazer simplificações grosseiras, é preciso obter-se soluções automatizadas, como as disponíveis no programa RESPONSE-2000. O método de seção equivalente é uma adaptação do modelo de painel fissurado às regras usuais de dimensionamento à flexão, sendo uma maneira prática de se obter o fluxo de cisalhamento ao longo da altura da seção. O programa FNL-CORTE foi aqui desenvolvido para automatizar a aplicação deste método. A comparação entre resultados obtidos pelo método da seção equivalente e a Teoria do Campo de Compressão é feita com relação a resultados de dimensionamento usual segundo a teoria de treliça e as definições feitas para o dimensionamento à flexão e ao cisalhamento da NBR6118:2014.

Palavras-chave: concreto armado; força cortante; cisalhamento; flexão composta; não-linearidade.

## ABSTRACT

Celeste, André Pimenta. **Compressive Field Model Applied to Reinforced Concrete Beams**. Rio de Janeiro. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2015.

This thesis presents rational methods, based on the compressive field model, for the consideration of the influence of the shear forces jointly with the flexural design of reinforced concrete beams, considering physical non-linearity effects. The compressive field model is based on the variation of the inclination angles in the Morsch truss along the beams height, assuming them as equal to the inclination angle of the cracks. The Compression Field Theory can be regarded as the “state-of-the art” in the structural concrete design, but its use is neither intuitive nor practical for usual calculations. For using this theory without assuming rough simplifications, it is necessary to obtain automatized solutions, as the ones available in the computer program RESPONSE-2000. The equivalent section method is an adaptation of the compression field model to the usual flexural design rules, being a practical way of obtaining the stress flux throughout the height of the section. The program FNL-CORTE has been herein developed for automatizing the application of this method. Comparisons between results obtained with the equivalent section method and the compression field theory are done with relation to design results obtained following the truss model and the shear and flexural design rules defined by NBR6118:2014.

Key-words: reinforced concrete, shear, eccentric compression, non-linearity.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	1
2. ESFORÇO CORTANTE E TENSÕES DIAGONAIS.....	4
2.1. Tensão diagonal em vigas homogêneas e elásticas.....	4
2.2. Modelo de Treliça .....	8
2.2.1. Teoria de Bielas e Tirantes.....	10
2.3. Dimensionamento à força cortante segundo a NBR 6118:2014.....	12
2.3.1. Verificação da compressão diagonal do concreto .....	13
2.3.2. Cálculo da armadura transversal.....	14
2.3.3. Decalagem da armadura no banzo tracionado.....	15
2.3.4. Condições Gerais. ....	16
2.3.5. Condições relativas às cargas próximas aos apoios.....	17
3. TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADA .....	19
3.1. Teoria do Campo de Compressão Modificada.....	19
3.1.1. Equações de Equilíbrio Interno .....	20
3.1.2. Equações de Compatibilidade .....	23
3.1.3. Relações constitutivas. ....	24
3.2. Abordagem Geral do Programa RESPONSE-2000 .....	31
3.2.1. Entrada de dados.....	31
4. MODELO ACOPLADO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE FLEXÃO-COMPOSTA E ESFORÇO CORTANTE .....	42
4.1. Modelo para Análise Não-Linear de Flexão-Composta.....	42
4.1.1. Fundamentos Teóricos .....	42
4.1.2. Definição da Seção Transversal de Concreto Armado .....	46
4.1.3. Relações Constitutivas do Concreto e do Aço. ....	49
4.2. Método iterativo de Newton-Raphson para determinação não-linear da configuração deformada .....	51
4.2.1. Conceitos básicos.....	51
4.2.2. Determinação não-linear da configuração deformada.....	53
4.3. Método da Seção Equivalente.....	57
4.4. Abordagem Geral do Programa FNL-CORTE .....	67
4.4.1. Dados Geométricos.....	67
4.4.2. Dados Constitutivos .....	70

4.4.3. Carregamentos .....	71
4.4.4. Análise.....	72
4.4.5. Resultados .....	73
5. EXEMPLOS .....	74
5.1. Exemplo 1 .....	74
5.1.1. Dimensionamento da Flexão Simples e do Esforço Cortante (NBR)...	75
5.1.2. Dimensionamento por bielas e tirantes (Treliça).....	76
5.1.3. Dimensionamento pelo Método da Seção Equivalente (MSE) .....	77
5.1.4. Dimensionamento pela Teoria de Campo de Compressão (RSP) .....	77
5.1.5. Comparação de resultados.....	77
5.2. Exemplo 2.....	83
5.3. Exemplo 3.....	87
5.3.1. Dados Gerais .....	87
5.3.2. Resultados .....	87
6. CONCLUSÃO .....	94
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	96

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 - Viga Laminada Homogênea [2]. .....	4
Figura 2-2 – Trajetória de tensões em viga retangular homogênea [2]. .....	6
Figura 2-3 - Pesquisa sobre esforço cortante de MÖRSCH [3]. .....	8
Figura 2-4 – Modelo de treliça para viga com armadura na alma [2]. .....	9
Figura 2-5 – Diagrama do modelo de treliça para análise de bielas e tirantes [14]. .....	10
Figura 2-6 – Carregamentos e esforços em uma viga bi-apoiada genérica [14]. .....	11
Figura 2-7 – Diagrama de corpo livre [14]. .....	11
Figura 3-1 - Viga fissurada sujeita ao esforço cortante, momento fletor e esforço normal. ....	20
Figura 3-2 - Tensões nos Painéis de Concreto, Armadura e Concreto Armado. ....	21
Figura 3-3 - Círculo de Mohr das tensões médias no concreto. ....	22
Figura 3-4 – Deformações médias em elementos fissurados. ....	23
Figura 3-5 – Circulo de Mohr das específicas médias. ....	24
Figura 3-6 - Curva Tensão-Deformação para concreto fissurado à compressão. [6] ....	25
Figura 3-7 - Curva proposta para a tensão máxima de compressão. [6]. .....	26
Figura 3-8 - Diagrama tensão-deformação médios, para fenômenos de tração no concreto fissurado. [6]. .....	27
Figura 3-9- Detalhe dos esforços localizados nas fissuras e entre fissuras. ....	28
Figura 3-10– Transmissão das tensões de cisalhamento através de uma fissura pelas ligações das partículas de agregado [6]. .....	29
Figura 3-11– Janela de definição de preferências do Programa RESPONSE-2000. ....	32
Figura 3-12– Barra de ferramentas “Define” do Programa RESPONSE-2000 .....	32
Figura 3-13– Janela de Definições Gerais do Programa RESPONSE-2000. ....	33
Figura 3-14– Esquema das grandezas utilizadas para o cálculo do espaçamento automático das fissuras, segundo o programa RESPONSE2000. ....	34
Figura 3-15– Curva segmental do concreto à compressão [1]. .....	35
Figura 3-16– Janela de Definições do Concreto do Programa RESPONSE-2000. ....	35
Figura 3-17– Janela de Definições da Armadura do Programa RESPONSE-2000. ....	36
Figura 3-18– Diagramas Tensão-Deformação do concreto e do aço, gerados pelo Programa RESPONSE-2000. ....	36
Figura 3-19– Janela de Definição da Seção de Concreto do Programa RESPONSE-2000. ....	37

Figura 3-20– Janela de Definição da Armadura Transversal do Programa RESPONSE-2000.....	37
Figura 3-21– Janela de Definição da Armadura Longitudinal do Programa RESPONSE-2000.....	38
Figura 3-22– Barra de Ferramentas “Loads” do Programa RESPONSE-2000.....	38
Figura 3-23– Janela de Definição das Ações em uma Seção Transversal do Programa RESPONSE-2000. ....	39
Figura 3-24– Janela de Definição da Analise Longitudinal da Viga do Programa RESPONSE-2000. ....	39
Figura 3-25– Quadro de Resumo dos Dados da Seção Transversal do Programa RESPONSE-2000. ....	40
Figura 3-26– Barra de ferramentas “Solve” do Programa RESPONSE-2000 .....	41
Figura 4-1- Eixos locais do elemento estrutural linear, submetido à flexão. ....	42
Figura 4-2 - Deformação longitudinal de um elemento submetido à flexão pura.....	43
Figura 4-3 -Tensões e deformações em uma seção transversal à flexão.....	45
Figura 4-4 - Deformações em uma seção transversal submetida à flexão-composta. ....	46
Figura 4-5 - Deformações em uma seção transversal de concreto armado, submetida à flexão-composta.....	47
Figura 4-6-Diagrama tensão-deformação idealizado para [1].....	49
Figura 4-7- Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas [1]. ....	50
Figura 4-8 - Representação gráfica do Método de Newton-Raphson com duas variáveis. ....	52
Figura 4-9 – Fluxograma para flexão composta.....	56
Figura 4-10 - Plano de tensões de cisalhamento em uma viga: (a) esforços em uma viga; ....	58
Figura 4-11 - Determinação do Fluxo de Cisalhamento pelo Método da Área Equivalente.....	59
Figura 4-12– Tensões decorrentes de força normal, momento fletor e força cortante atuantes em vigas de concreto armado.....	60
Figura 4-13 - Círculo de Mohr das tensões no concreto fissurado que não resiste aos esforços de tração.....	61
Figura 4-14 - Seção resistente a solicitações normais e à força cortante.....	63
Figura 4-15 - Esforço cortante aplicado nas faixas, [16]. ....	63
Figura 4-16 – Fluxograma para o método da seção equivalente. ....	66

Figura 4-17 - Seção transversal de concreto e distribuição da armadura longitudinal, FNL-CORTE. ....	70
Figura 4-18 - Referência de orientação das solicitações, FNL-CORTE. ....	71
Figura 5-1 - Esquema longitudinal de carregamento e armaduras. [14] .....	75
Figura 5-2 - Esquema de treliça discreta para o método de bielas e tirantes. [14] .....	77
Figura 5-3 – Diagrama qualitativo de deformações longitudinais nas seções analisadas, Exemplo 1.....	78
Figura 5-4 – Diagrama de Força na Armadura Longitudinal, Exemplo 1. ....	80
Figura 5-5 – Diagrama de Força na Armadura Transversal, Exemplo 1. ....	81
Figura 5-6 - Esquema geométrico e estrutural da viga V1, Exemplo 2. [15].....	83
Figura 5-7 - Diagrama de Esforços Cortantes, Exemplo 2. [15] .....	84
Figura 5-8 - Diagrama de Momentos Fletores, Exemplo 2. [15] .....	84
Figura 5-9 – Deformações Longitudinais, Exemplo 3.....	90
Figura 5-10 - Ângulo de Inclinação das Fissuras, Exemplo 3.....	90
Figura 5-11 - Tensões Longitudinais e Tensão Diagonal, Exemplo 3.....	91
Figura 5-12 - Tensão Cisalhante e Tensão Vertical, Exemplo 3. ....	92

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4-1 - Dados da Seção de Concreto. ....	68
Tabela 4-2 – Distribuição da Armadura Longitudinal. ....	69
Tabela 4-3 – Características Pertinentes ao Concreto e ao Aço,.....	71
Tabela 4-4 – Dados de Entrada dos Esforços de Cálculo. ....	72
Tabela 4-5 - Controle Inicial dos Resultados. ....	72
Tabela 5-1 – Deformações longitudinais, Exemplo 1.....	78
Tabela 5-2 - Deformação longitudinal na armadura inferior em razão dos valores de ( <i>NBR</i> ), Exemplo 1.....	79
Tabela 5-3 – Força na Armadura Longitudinal, Exemplo 1.....	79
Tabela 5-4 – Força na Armadura Longitudinal em razão dos valores de ( <i>NBR</i> ), Exemplo 1. ....	80
Tabela 5-5 – Força na Armadura Transversal, Exemplo 1. ....	81
Tabela 5-6 - Força na Armadura Transversal em razão dos valores de ( <i>NBR</i> ), Exemplo 1. ....	82
Tabela 5-7 – Determinação da força na armadura longitudinal, NBR6118 [1], Exemplo 2. ....	85
Tabela 5-8 - Deformações, Tensões e Forças nas armaduras, FNL-CORTE, Exemplo 2. ....	85
Tabela 5-9 - Comparação da Força Cortante Resistida pela Armadura Transversal, Exemplo 2.....	86
Tabela 5-10 - Resultados Pertinentes a Seção de Concreto, Exemplo 3.....	88
Tabela 5-11 - Resultados Pertinentes à Armadura Longitudinal, Exemplo 3. ....	89

# 1. INTRODUÇÃO

---

Apesar de décadas de investigação experimental e o uso de ferramentas analíticas altamente sofisticadas, os mecanismos de ruptura dos elementos lineares de concreto armado, submetidos a esforços cortantes até o colapso, ainda não estão totalmente compreendidos.

Quando uma viga de concreto armado, subarmada longitudinalmente, é carregada progressivamente até seu esgotamento, sob a influência da flexão, se inicia o processo de abertura e propagação de fissuras na face tracionada e de escoamento do aço da armadura principal acompanhado por grandes e sucessivos deslocamentos até que ocorra o colapso. Entretanto, a falha devido ao cisalhamento é difícil de ser prevista com precisão e seu colapso pode ocorrer de maneira abrupta, sem qualquer aviso prévio.

Devido a estas diferenças de comportamento, as vigas de concreto armado devem ser projetadas com especial atenção ao esforço cortante, pois deve-se garantir que a falha devido à flexão ocorra antes da falha devida ao cisalhamento, se o elemento for severamente sobrecarregado.

Sabe-se que, porém a análise do cisalhamento e o seu dimensionamento não estão diretamente relacionados com o fenômeno do cisalhamento em si, pois as tensões de cisalhamento, na maior parte dos casos, situam-se muito abaixo dos valores da resistência direta ao cisalhamento do concreto. A preocupação real enquadra-se nas tensões de tração diagonais, pois tais resultam da combinação das tensões de cisalhamento com as tensões de flexão.

Com o objetivo de melhor se aproximar do comportamento real de seções solicitadas ao esforço cortante, alguns métodos racionais de dimensionamento são propostos na literatura.

O modelo de painel fissurado se baseia na variação do ângulo da treliça de Mörsch ao longo da altura das vigas e a partir deste conceito admite-se que o ângulo de inclinação das bielas de compressão é igual ao ângulo de inclinação das fissuras, na Teoria do Campo de Compressão e no método de seção equivalente.

A Teoria do Campo de Compressão foi desenvolvida a partir de estudos dos Professores COLLINS e VECCHIO [6], entre outros, para formular um modelo consistente, a partir de um programa experimental extensivo, envolvendo testes de painéis de concreto armado, sujeitos a estados de tensão em duas dimensões bem definidas, incluindo o cisalhamento.

Apesar de ter sido desenvolvida em painéis de concreto armado, a Teoria do Campo de Compressão é bastante utilizada para estudar a alma de uma viga, representada como um conjunto de diagonais fissuradas comprimidas, costuradas por estribos e pela armadura de pele. Os esforços, que provocam tensões normais e cisalhantes de forma integrada, distribuídos ao longo da altura da alma, são representados de acordo com uma distribuição em elementos discretos.

A utilização da Teoria do Campo de Compressão se tornou uma ferramenta de grande utilidade, uma vez que a consideração do comportamento mecânico uniaxial na análise e no dimensionamento de peças lineares de concreto armado é afetada pela presença de tensões de cisalhamento. Nos modelos uniaxiais, as solicitações longitudinais e transversais são tratadas independentemente e o acréscimo de tensões na armadura longitudinal devido ao esforço cortante é considerado separadamente, através do artifício da decalagem.

Posteriormente, julgou-se necessário considerar as tensões de tração existentes entre as fissuras como uma maneira de considerar a contribuição da tensão do engrenamento entre os agregados através das fissuras inclinadas. Então, a teoria sofreu uma modificação e passou a ser chamada de Teoria do Campo da Compressão Modificada. O valor destas tensões de tração é função da abertura das fissuras e da separação entre os estribos e fissuras. Esta teoria é importante, porque contempla a contribuição de mecanismos complementares na resistência ao esforço cortante  $V_c$ .

Devido ao alto grau de dificuldade na utilização da Teoria do Campo de Compressão Modificada, sua utilização, sem o auxílio computacional, se torna inviável, a menos que sejam feitas simplificações que não representam o comportamento real das vigas ao longo de toda a altura da sua seção.

O programa RESPONSE-2000, criado por BENTZ e colaboradores ([7] e [8]), permite analisar vigas e pilares de concreto armado, contemplando o comportamento do

painel fissurado. Através de diversos ensaios experimentais, foram criadas e inseridas no programa curvas, que representam de maneira mais realista o comportamento dos elementos sujeitos a tensões de tração e compressão, simultaneamente.

O Método da Seção Equivalente foi apresentado por DIAZ [11] e desenvolvido por SHULZ [12] e CUNHA [13]. Trata-se de uma adaptação do modelo de painel fissurado às regras usuais de dimensionamento à flexão, sendo uma maneira prática de se obter o fluxo de cisalhamento ao longo da altura da seção. Sendo o procedimento dirigido para cálculos práticos de dimensionamento de peças usuais de concreto armado.

Para a utilização do Método da Seção Equivalente, foi desenvolvido, nesta Dissertação, o programa FNL-CORTE. Através deste programa é possível realizar a análise seccional de uma viga de concreto armado, submetida a força normal e momento fletor, considerando o acoplamento do esforço cortante.

## 2. ESFORÇO CORTANTE E TENSÕES DIAGONAIS.

### 2.1. Tensão diagonal em vigas homogêneas e elásticas

O desenvolvimento das tensões de cisalhamento em uma viga pode ser facilmente visualizado na Figura 2-1 [2], onde é apresentada uma viga laminar, composta por duas peças retangulares de material homogêneo, ligadas uma a outra ao longo da superfície de contato, sob a ação de uma carga vertical. Se o adesivo for suficientemente forte, o elemento irá deformar-se como uma única viga, como mostrado na Figura 2-1a. Por outro lado, se o adesivo é fraco, as duas peças vão se separar e deslizam uma em relação a outra, como mostrado na Figura 2-1b.

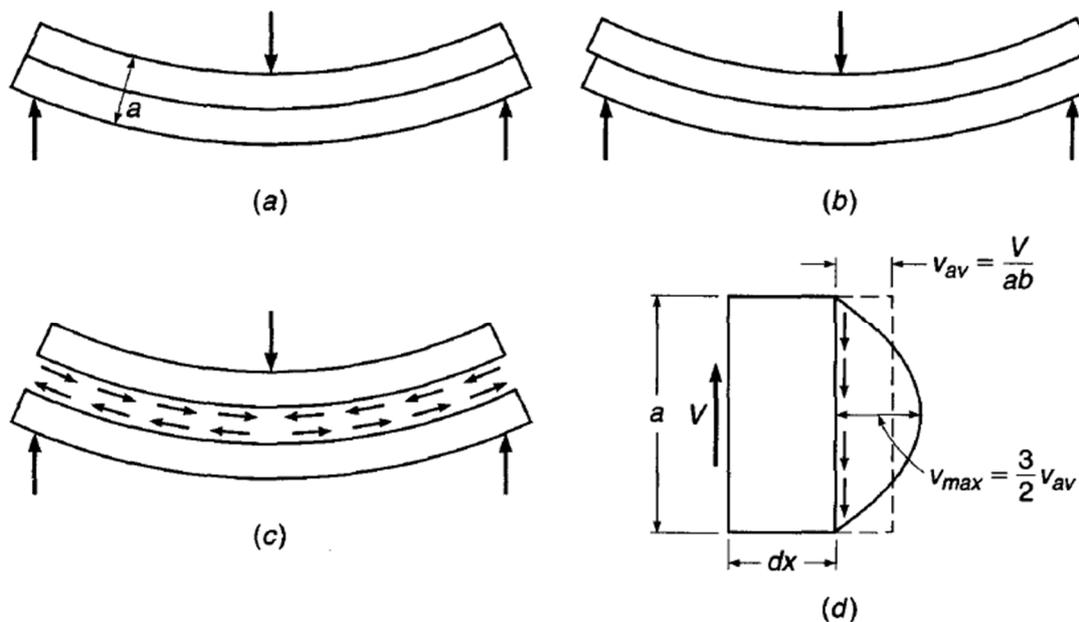


Figura 2-1 - Viga Laminada Homogênea [2].

Entretanto, quando o adesivo é eficaz, existem forças ou tensões que atuam e previnem o deslizamento ou o cisalhamento. Estas tensões longitudinais de cisalhamento, apresentadas na Figura 2-1c, atuam separadamente na parte inferior e superior das peças. As mesmas tensões ocorrem em planos horizontais em cada uma das vigas, mas possuem diferentes intensidades em diferentes distâncias da linha neutra.

A Figura 2-1d mostra a seção transversal de uma viga retangular, que é solicitada por uma força de cortante "V". O equilíbrio deste esforço vertical é garantido pelas tensões de cisalhamento verticais "v".

Relativamente às tensões tangenciais que atuam em vigas homogêneas, compostas de material em regime elástico (tensões proporcionais às deformações), são obtidas pela fórmula:

$$v = \frac{V \cdot S}{I \cdot b} \quad (2.1)$$

onde:

V - Força cortante total na seção.

S - Momento estático em relação ao eixo neutro da porção da seção transversal situada entre a linha através do ponto em questão, paralela ao eixo neutro, e a face, superior ou inferior, da viga.

I - Momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra.

b - Largura da viga no ponto dado.

Para uma viga de seção retangular composta de material homogêneo e elástico, a intensidade da tensão cisalhante ao longo da altura da seção transversal, varia em forma de parábola. A intensidade é igual a zero nas fibras externas da viga e máxima na linha neutra.

Para uma altura  $h$ , em relação a linha neutra  $S = b \cdot h^2/8$  e  $I = b \cdot h^3/12$ . Substituindo estes valores na equação (2.1), o valor máximo da tensão cisalhante será:

$$v_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b \cdot h} \quad (2.2)$$

A Figura 2-2 [2] apresenta uma viga de seção transversal retangular, composta por material homogêneo e elástico, semelhante a uma viga de concreto armado no Estádio I (não fissurado), submetida a carregamentos verticais.

Se um pequeno elemento quadrado está localizado na altura da linha neutra desta viga, conforme apresentado na Figura 2-2b (situação 1), suas tensões cisalhantes verticais serão iguais e opostas nas duas faces em razão do equilíbrio. Entretanto, duas tensões cisalhantes, de mesma magnitude e sinais opostos são necessárias nas faces horizontais para manter o equilíbrio.

Se na mesma posição, o elemento for cortado a 45°, estas tensões se combinam de forma que o seu efeito é o mostrado na Figura 2-2c. Isto é, a ação dos dois pares de tensão de cisalhamento nas faces vertical e horizontal são as mesmas que a dos dois pares de tensões normais, uma de tração e outra de compressão, atuando nas faces a 45° e de valor numérico igual às tensões de cisalhamento.

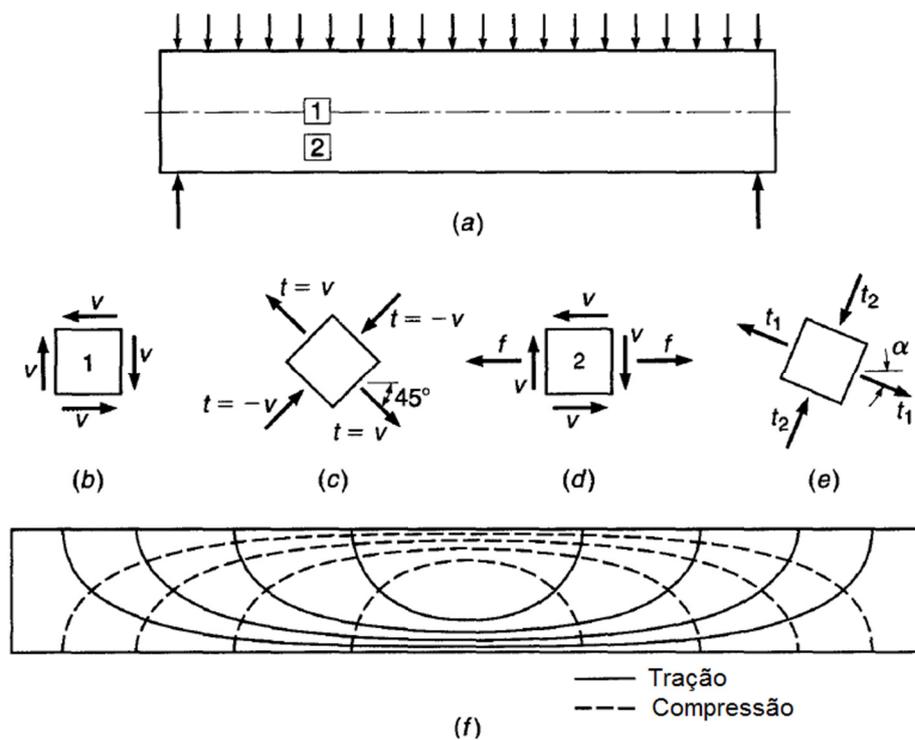


Figura 2-2 – Trajetória de tensões em viga retangular homogênea [2].

Se um pequeno elemento quadrado de viga está localizado distante da linha neutra e das faces, conforme apresentado na Figura 2-2d (situação 2), as faces verticais estão sujeitas não apenas às tensões cisalhantes, mas também às tensões devidas à flexão, cuja magnitude é dada pela equação (2.3).

$$f = \frac{M}{I} \cdot z \tag{2.3}$$

Onde:

$f$  - Tensão devida à flexão na distância  $z$  da linha neutra.

$M$  - Momento fletor na seção.

$I$  - Momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra.

$z$  - Distância da fibra considerada até a linha neutra.

As tensões que atuam no elemento podem novamente ser combinadas como um par de tensões de compressão e um par de tensões de tração, inclinadas, que atuam em ângulo reto entre si. Essas tensões, apresentadas na Figura 2-2e, são conhecidas como Tensões Principais, o valor é dado por:

$$t = \frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + v^2} \quad (2.4)$$

Já, seu ângulo de inclinação em relação à direção horizontal é dado por:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot v}{f} \quad (2.5)$$

As inclinações destas tensões principais para uma viga de seção retangular uniformemente solicitada é apresentada na Figura 2-2f. Estas trajetórias de tensão são linhas que, em qualquer ponto, são desenhadas na mesma direção em que as tensões principais (de tração ou de compressão) atuam.

Portanto, pelas considerações feitas neste item, se as tensões combinadas devidas ao cisalhamento e à flexão não forem tratadas adequadamente, ao longo da seção da viga, a integridade desta pode estar seriamente comprometida. As tensões diagonais, conhecidas como tração diagonal e compressão diagonal, devem ter atenção especial durante o dimensionamento dos elementos lineares de concreto.

## 2.2. Modelo de Treliça

A pesquisa sobre o mecanismo de resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado remonta ao final do século 19 com o aparecimento de elementos de aço, como estribos, nas construções. Foi depois das obras e pesquisas de RITTER [4] e MÖRSCH [3], ver Figura 2-3, que uma proposta para a determinação da capacidade de carga e do entendimento do comportamento das estruturas de concreto sob o efeito de cisalhamento apareceu, com o modelo de treliça mostrado na Figura 2-4.

Este modelo explica o mecanismo de cisalhamento em uma viga por meio de uma analogia com uma treliça de concreto. O fluxo de tensões é idealizado como uma série de bielas de concreto diagonais em compressão e os tirantes representam a tração nas armaduras; as componentes da força em cada elemento são determinadas através de uma análise estática. Esta aproximação é a base dos métodos atuais de dimensionamento à flexão e cisalhamento.

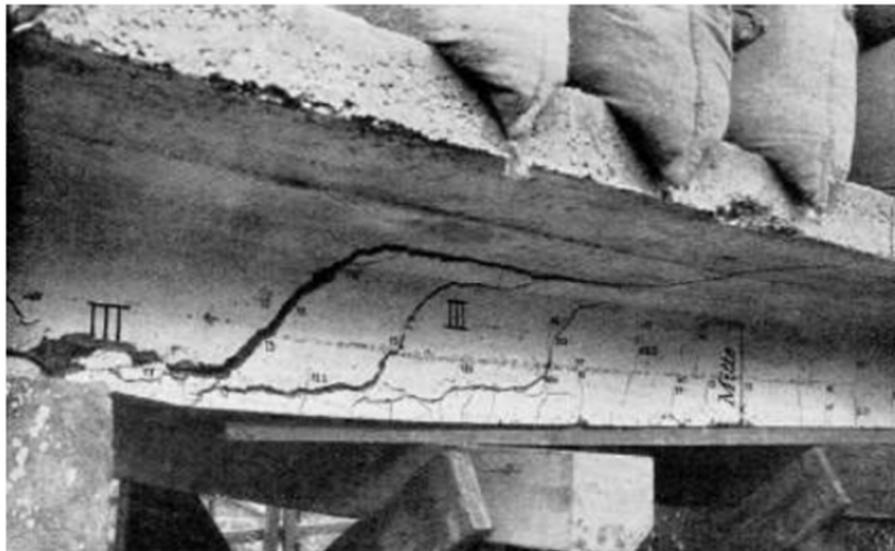


Figura 2-3 - Pesquisa sobre esforço cortante de MÖRSCH [3].

A Teoria do Campo de Compressão, de forma geral, pode ser concebida como um modelo de Treliça de MÖRSCH [3], incorporando o conceito de que o ângulo de inclinação das bielas pode ser variável, entre  $25^\circ$  e  $65^\circ$ , o que generaliza os conceitos de Bielas e Tirantes de SCHLAICH [5].

A Figura 2-4, adaptada da Figura 4.19 de NILSON [2], apresenta: (a) Viga uniformemente carregada, (b) Modelo simplificado de treliça; (c) Modelo mais realista de treliça.

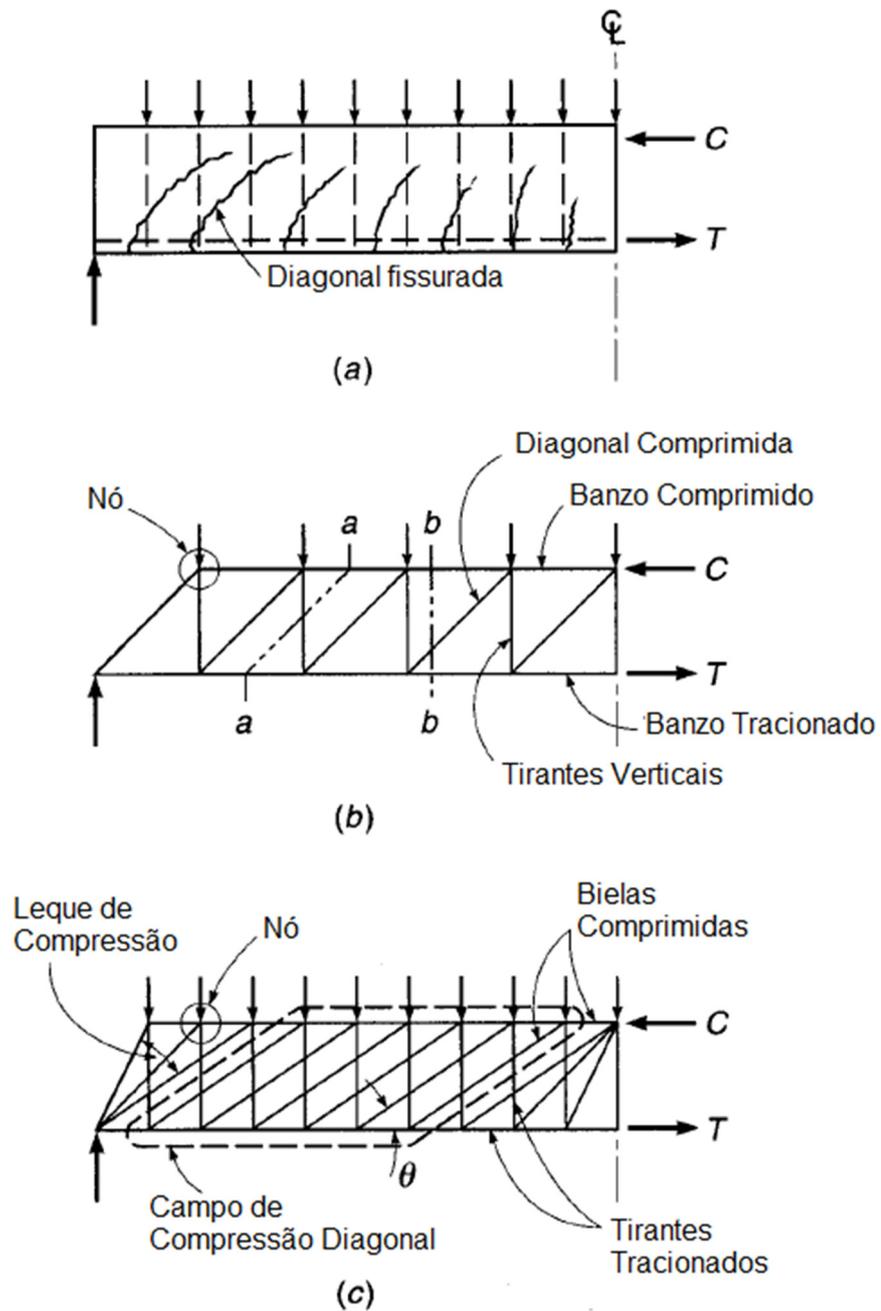


Figura 2-4 – Modelo de treliça para viga com armadura na alma [2].

### 2.2.1. Teoria de Bielas e Tirantes

Utilizando o desenvolvimento da Teoria de Bielas e Tirantes, conforme apresentado por SANTOS [14], em uma zona não perturbada de uma viga, onde se caracterizam os campos de compressão diagonal, temos o desenvolvimento a seguir.

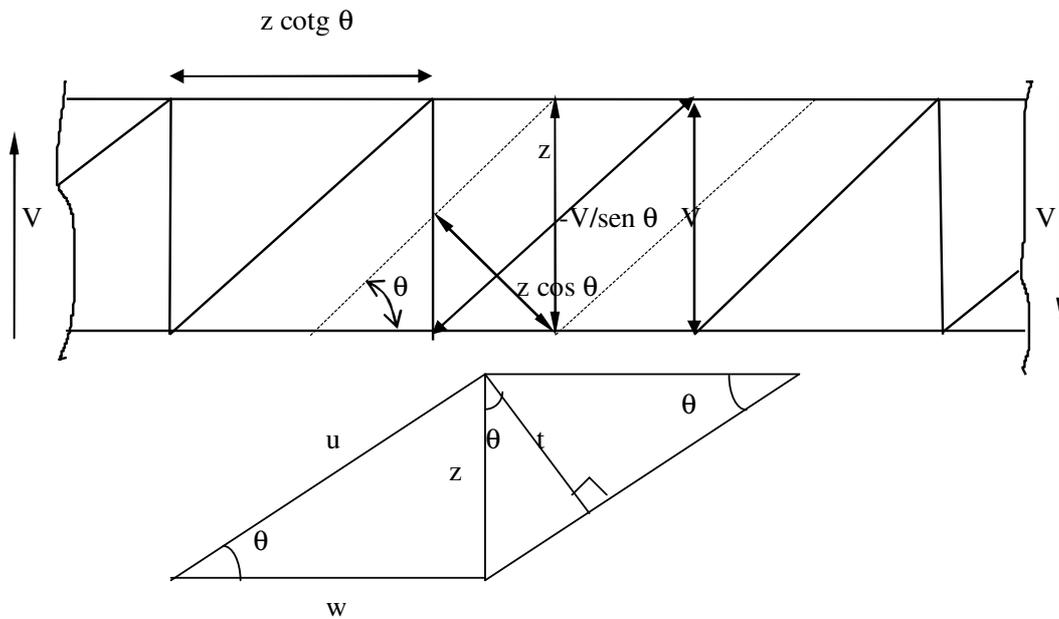


Figura 2-5 – Diagrama do modelo de treliça para análise de bielas e tirantes [14].

onde:

$\theta$  – Ângulo de inclinação da biela

$z$  – Braço de alavanca entre o centro de gravidade das armaduras e a resultante da força de compressão.

$V$  – Esforço cortante na seção avaliada.

Temos a projeção horizontal da distância entre as bielas:

$$w = z \cdot \cotg\theta \quad (2.6)$$

A distância entre as bielas:

$$t = z \cdot \cos\theta \quad (2.7)$$

E a força na direção da biela:

$$f_{c2} = -\frac{V}{\text{sen } \theta} \quad (2.8)$$

Para melhor compreender esta teoria, estuda-se o equilíbrio em uma treliça contínua de uma viga bi-apoiada genérica, sujeita a carregamentos e esforços conforme apresentado na Figura 2-6. Serão analisadas duas seções próximas, seções 1 e 2.

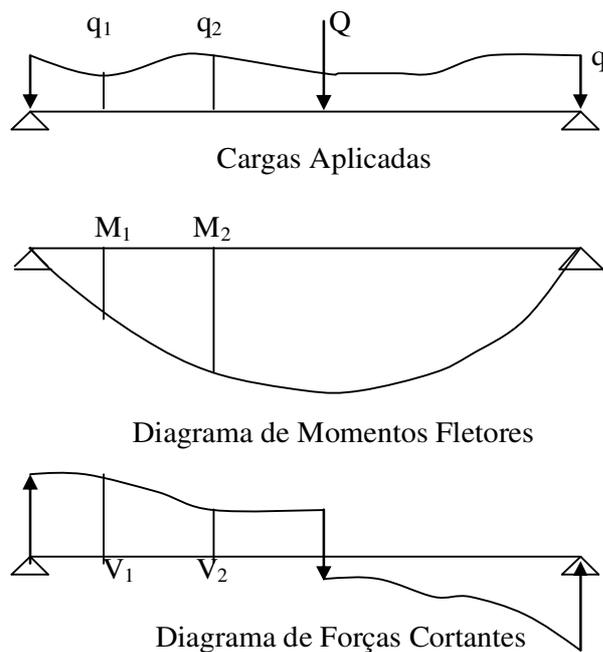


Figura 2-6 – Carregamentos e esforços em uma viga bi-apoiada genérica [14].

Portanto, será analisado o equilíbrio, seccionando da seção 1 para a 2, na direção do ângulo  $\theta$  de inclinação das bielas, ver Figura 2-7.

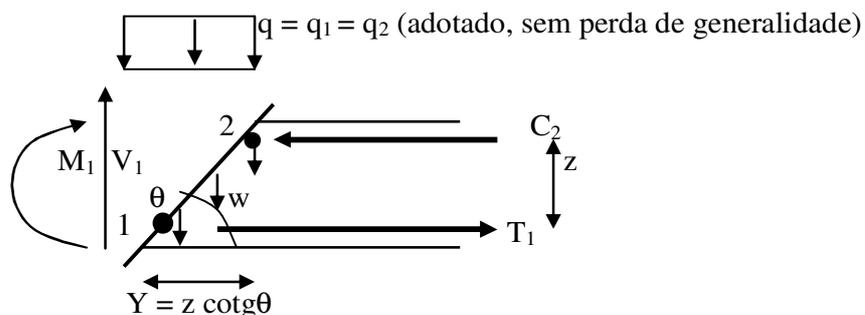


Figura 2-7 – Diagrama de corpo livre [14].

Por equilíbrio de forças na direção vertical, tem-se a força por metro nos estribos:

$$w = \frac{V_1}{Y} - q \quad (2.9)$$

Por equilíbrio de momentos no nó 2, tem-se a força de tração na armadura inferior:

$$T_1 = \frac{M_1}{z} + \frac{V_1}{2} \cdot \cotg\theta \quad (2.10)$$

Por equilíbrio de momentos no nó 1, tem-se a força de compressão no banzo superior:

$$C_2 = \frac{M_2}{z} - \frac{V_2}{2} \cdot \cotg\theta \quad (2.11)$$

### 2.3. Dimensionamento à força cortante segundo a NBR 6118:2014

No item 17.4 da NBR6118:2014 [1] é apresentado o dimensionamento no Estado Limite Último de elementos lineares sujeitos à força cortante, de acordo com as prescrições abaixo reproduzidas.

“As condições fixadas por esta Norma para elementos lineares admitem dois modelos de cálculo que pressupõem a analogia com modelo em treliça, de banzos paralelos, associado a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e traduzidos por uma componente adicional  $V_C$ .”

“O modelo *I* admite diagonais de compressão inclinadas de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural e admite ainda que a parcela complementar  $V_C$  tenha valor constante, independente de  $V_{sd}$ .”

“O modelo *II* admite diagonais de compressão inclinadas de  $\theta$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, com  $\theta$  variável livremente entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ . Admite ainda que a parcela complementar  $V_C$  sofra redução com o aumento de  $V_{sd}$ .”

Em ambos os modelos, o ângulo de inclinação da armadura transversal,  $\alpha$ , em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, pode ser tomado na faixa de  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

A resistência do elemento estrutural, em uma determinada seção transversal, deve ser considerada como satisfatória, quando verificadas simultaneamente as condições expressas a seguir.

Condição de Resistência à Compressão Diagonal do Concreto:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (2.12)$$

Condição de Resistência da Armadura Transversal:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_C + V_{Sw} \quad (2.13)$$

onde:

$V_{Sd}$  - Força cortante solicitante de cálculo, na seção;

$V_{Rd2}$  - Força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;

$V_{Rd3}$  - Força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína por tração diagonal;

$V_C$  - Parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça;

$V_{Sw}$  - Parcela resistida pela armadura transversal.

### 2.3.1. Verificação da compressão diagonal do concreto

Tanto o modelo de cálculo *I* quanto o *II*, compartilham da mesma equação, sendo que o modelo *I* considera a simplificação de se supor o ângulo de inclinação das bielas  $\theta = 45^\circ$ .

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\text{cotg} \alpha + \text{cotg} \theta) \quad (2.14)$$

onde:

$$\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250) \quad (2.15)$$

A parcela 0,54 vem da multiplicação da relação entre o braço de alavanca e a altura útil  $z/d = 0,9$  e o coeficiente 0,6 é o definidor da resistência  $f_{cd2}$  do concreto nesta situação.

### 2.3.2. Cálculo da armadura transversal

A parcela  $V_{sw}$  referente à resistência da armadura transversal é compartilhada tanto pelo modelo de cálculo *I* quanto pelo *II*, sendo que o modelo *I* considera a simplificação de se supor o ângulo  $\theta = 45^\circ$ .

$$V_{sw} = (A_{sw}/s) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cot g\alpha + \cot g\theta) \cdot \text{sen}\alpha \quad (2.16)$$

A parcela  $V_C$ , que se refere à força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, no modelo de cálculo *I* é definida por:

$$V_C = 0 - \text{Linha neutra se situa fora da seção;}$$

$$V_C = V_{C0} - \text{Linha neutra cortando a seção;}$$

onde :

$$V_{C0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (2.17)$$

com:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_C} = \frac{0,7 \cdot f_{ctm}}{\gamma_C} \quad (2.18)$$

Quando ocorrem solicitações de flexo-compressão a parcela  $V_C$  é dada pela seguinte equação:

$$V_C = V_{C0} \cdot \left(1 + M_0 / M_{Sd,máx}\right) \quad (2.19)$$

onde:

$M_0$  - "Momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção (tracionada por  $M_{Sd,máx}$ ), provocada pelas forças normais de diversas origens

concomitantes com  $V_{Sd}$ , sendo essa tensão calculada com valores de  $\gamma_f$  e  $\gamma_p$  iguais a 1,0 e 0,9 respectivamente; os momentos correspondentes a essas forças normais não podem ser considerados no cálculo dessa tensão, pois são considerados em  $M_{Sd}$ ; devem ser considerados apenas os momentos isostáticos de protensão” [1].

No modelo de cálculo II, parcela  $V_c$  é definida por:

$$V_c = 0 \quad - \text{Linha neutra se situa fora da seção;}$$

$$V_c = V_{c1} \quad - \text{Linha neutra cortando a seção;}$$

$$V_{c1} = V_{c0} \quad - \text{Quando } V_{Sd} \leq V_{c0};$$

$$V_{c1} = 0 \quad - \text{Quando } V_{Sd} = V_{Rd2};$$

Quando a força cortante solicitante estiver no intervalo  $V_{c0} \leq V_{Sd} \leq V_{Rd2}$ , deve ser feita uma interpolação linear para se encontrar o valor intermediário de  $V_{c1}$ .

### 2.3.3. Decalagem da armadura no banzo tracionado.

A NBR 6118 permite duas maneiras para se considerar a decalagem. A primeira define o cálculo de um deslocamento do diagrama de momentos fletores, paralelo ao eixo da peça,  $a_l$ . Esse deslocamento é calculado diferentemente nos modelos de cálculo I e II, como apresentado a seguir.

Cálculo de  $a_l$  para o modelo de cálculo I:

$$a_l = d \cdot \left[ \frac{V_{Sd,máx}}{2(V_{Sd,máx} - V_c)} \cdot (1 + \cot g \alpha) - \cot g \alpha \right] \leq d \quad (2.20)$$

onde:

$$a_l = d, \text{ para } |V_{Sd,máx}| \leq |V_c|$$

$$a_l \geq 0,5 \cdot d, \text{ no caso geral;}$$

$a_l \geq 0,2 \cdot d$ , para estribos inclinados a  $45^\circ$ .

Cálculo de  $a_l$  para o modelo de cálculo II:

$$a_l = 0,5 \cdot d \cdot (\cot g \theta - \cot g \alpha) \quad (2.21)$$

onde:

$a_l \geq 0,5 \cdot d$ , no caso geral;

$a_l \geq 0,2 \cdot d$ , para estribos inclinados a  $45^\circ$ .

A segunda maneira, que é a que mais nos interessa neste trabalho, é a decalagem do diagrama de forças no banzo tracionado. Seu cálculo é quantificado pela soma das forças de tração na armadura devidas à flexão e devidas à força cortante, aplicando-se a expressão:

$$F_{Sd,cor} = \left[ \frac{M_{Sd}}{z} + |V_{Sd}| \cdot (\cot g \theta - \cot g \alpha) \cdot \frac{1}{2} \right] \leq \frac{M_{Sd,máx}}{z} \quad (2.22)$$

Onde,  $M_{Sd,máx}$  é o momento fletor de cálculo no trecho em análise.

#### 2.3.4. Condições Gerais.

O item 17.4.1.1.1 da NBR 6118:2014 [1] contém algumas condições gerais para o dimensionamento, que são apresentadas a seguir.

a) Armadura transversal mínima:

Todos os elementos lineares submetidos à força cortante, com exceção dos casos indicados em 17.4.1.1.2 [1] (basicamente lajes), devem conter armadura transversal mínima, constituída de estribos, com taxa geométrica definida por:

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \sen \alpha} \geq 0,2 \cdot \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} \quad (2.23)$$

onde:

$A_{sw}$  - Área da seção transversal dos estribos;

$s$  - Espaçamento dos estribos, medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;

$\alpha$  - Inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural;

$b_w$  - Largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção, para elementos estruturais com  $b_w < 5 \cdot d$  (em que  $d$  é altura útil da seção);

$f_{yw}$  - Resistência característica ao escoamento do aço da armadura transversal;

$f_{ct,m}$  - Resistência à tração do concreto, dada por:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{concretos até Classe C50}) \quad (2.24)$$

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (\text{concretos de C50 até C90}) \quad (2.25)$$

#### b) Composição da armadura transversal

A armadura transversal pode ser constituída de estribos, ou pela composição de estribos e barras dobradas. Na utilização de barras dobradas, estas não devem suportar mais do que 60% do esforço total resistido pela armadura.

Barras verticais soldadas também podem ser utilizadas, combinadas com os estribos, respeitando a proporção anterior e requisitos de ancoragem do item 9.4.6.2, [1].

#### 2.3.5. Condições relativas às cargas próximas aos apoios.

Quando a carga e a reação de apoio forem aplicadas em faces opostas do elemento, comprimindo a alma, valem as seguintes prescrições para o cálculo da armadura transversal [1]:

- “a força cortante oriunda de carga distribuída pode ser considerada, no trecho entre o apoio e a seção situada à distância  $d/2$  da face do apoio, constante e igual à desta seção”;
- “a força cortante devida a uma carga concentrada aplicada a uma distância  $a \leq 2d$  do trecho teórico do apoio pode, nesse trecho de comprimento  $a$ , ser reduzida multiplicando-a por  $a/2d$ ”.

As reduções indicadas se aplicam somente para a determinação das armaduras transversais, não se aplicando à verificação da resistência à compressão diagonal do concreto.

## 3. TEORIA DO CAMPO DE COMPRESSÃO MODIFICADA

---

### 3.1. Teoria do Campo de Compressão Modificada

Considera-se o esquema resistente de um elemento de concreto armado formado por bielas de concreto (diagonais comprimidas) unidas por armaduras. As características, hipóteses e considerações feitas nesta teoria são:

- A teoria permite incluir nos elementos estruturais, esforços seccionais de forma integrada, ou seja, esforços que provocam tensões normais e tensões tangenciais.
- A resistência do concreto das bielas comprimidas é menor que a resistência do concreto no ensaio de compressão uniaxial e seu diagrama tensão-deformação é mais abatido.
- Existem tensões de tração entre as fissuras, que podem contribuir com sua resistência.
- As tensões nas armaduras variam ao longo da altura da alma e junto às fissuras são maiores.
- É considerando o estado plano de tensão no equilíbrio das tensões atuantes e resistentes do concreto fissurado e da armadura em todos os elementos discretizados da viga.
- As equações de equilíbrio, que relacionam as tensões do concreto e da armadura com o carregamento aplicado, são expressas em função de tensões médias, as quais são medidas no sentido paralelo à separação entre as fissuras.
- As equações de compatibilidade, que relacionam as deformações específicas no concreto com as deformações específicas na armadura, são definidas em função de deformações médias.

A Figura 3-1 mostra um trecho em vista longitudinal e em seção transversal de uma viga sujeita a esforço normal, momento fletor e esforço cortante, para uma região de esforço cortante constante.

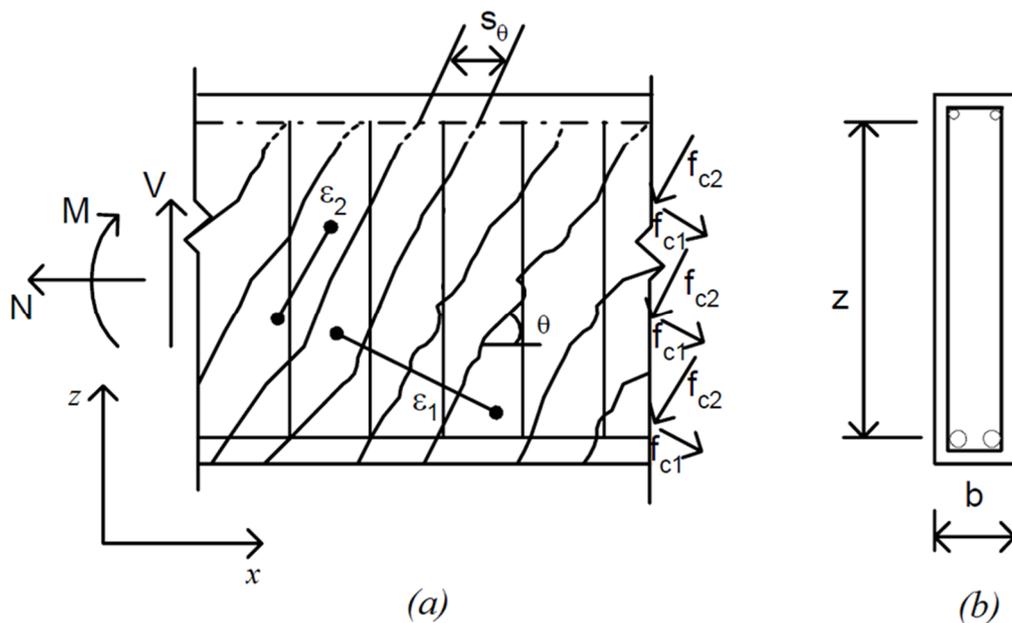


Figura 3-1 - Viga fissurada sujeita ao esforço cortante, momento fletor e esforço normal.

onde:

- $f_{c1}$  - Tensão principal média de tração no concreto, normal à direção das fissuras;
- $f_{c2}$  - Tensão principal média de compressão no concreto, paralela à direção das fissuras;
- $\epsilon_1$  - Deformação específica principal média de alongamento;
- $\epsilon_2$  - Deformação específica principal média de encurtamento;
- $\theta$  - Ângulo de inclinação médio das fissuras.

### 3.1.1. Equações de Equilíbrio Interno

No caso de elementos de concreto fissurado e com armaduras horizontais e/ou verticais, para se determinar as tensões atuantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$ , e determinar o tensor de tensões no estado plano, é necessário considerar a contribuição da resistência de todos os materiais da viga. A Figura 3-2 mostra um painel de concreto armado fissurado. As

bielas de concreto têm inclinação  $\theta$  e as armaduras estão posicionadas perpendicularmente, na direção dos eixos x-z.

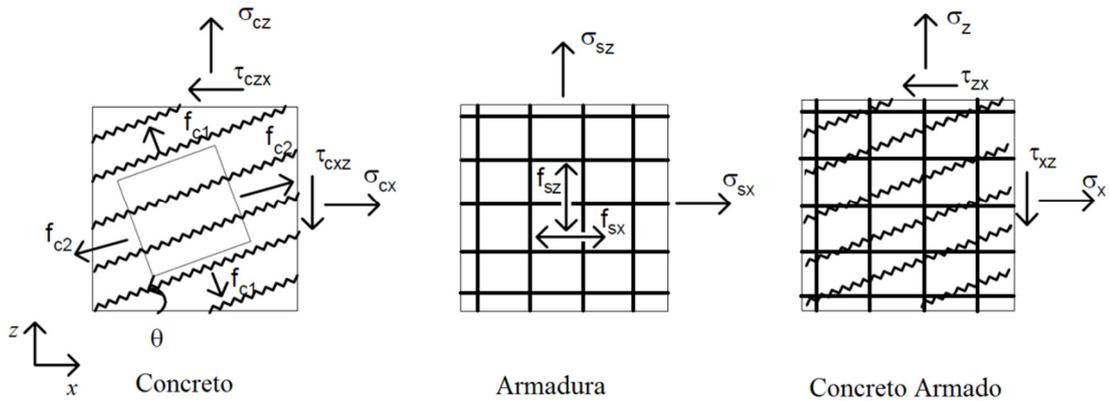


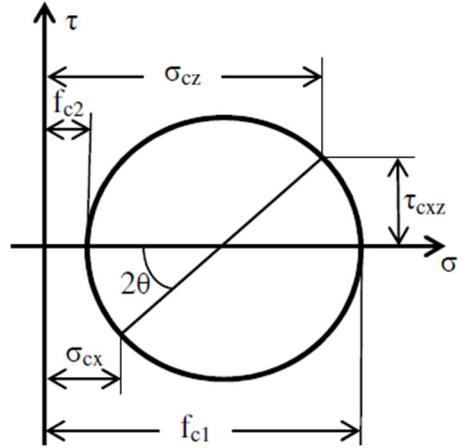
Figura 3-2 - Tensões nos Painéis de Concreto, Armadura e Concreto Armado.

Para este caso específico, onde as armaduras estão dispostas ortogonalmente na direção dos eixos x-z, as tensões principais atuantes nas armaduras  $f_{sx}$  e  $f_{sz}$  têm valores iguais às tensões devido às armaduras na direção dos eixos x-z,  $\sigma_{sx}$  e  $\sigma_{sz}$ . Geralmente, tem valor igual à tensão de escoamento de cálculo do aço,  $f_{yd}$ .

Considerando a soma nos painéis de concreto e na armadura, as tensões totais serão:

$$\sigma_x = \sigma_{cx} + \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx}; \sigma_z = \sigma_{cz} + \rho_{sz} \cdot \sigma_{sz}; \tau_{xz} = \tau_{cxz} = \tau_{czx} \quad (3.1)$$

Para se obter as componentes das resistências do concreto e da armadura, utiliza-se o círculo de Mohr.



Concreto Fissurado

Figura 3-3 - Círculo de Mohr das tensões médias no concreto.

A partir do Círculo de Mohr, apresentado na Figura 3-3, são obtidas geometricamente as expressões que relacionam as tensões na direção dos eixos globais com as tensões principais médias.

Tensões no concreto:

$$\sigma_{cx} = f_{c1} - \frac{\tau_{cxz}}{\operatorname{tg} \theta} \quad (3.2)$$

$$\sigma_{cz} = f_{c1} - \tau_{cxz} \cdot \operatorname{tg} \theta \quad (3.3)$$

$$\tau_{cxz} = \frac{(f_{c1} - f_{c2})}{\left( \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \right)} \quad (3.4)$$

Tensões resultantes no concreto armado:

$$\sigma_x = \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} + f_{c1} - \frac{\tau_{cxz}}{\operatorname{tg} \theta}; \quad (3.5)$$

$$\sigma_z = \rho_{sz} \cdot \sigma_{sz} + f_{c1} - \tau_{cxz} \cdot \operatorname{tg} \theta; \quad (3.6)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{cxz} \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Equações de Compatibilidade

No caso de um elemento da alma da viga de concreto armado fissurado e costurado por estribos, considerando que não há deslizamento entre o concreto e a armadura, as deformações do concreto e da armadura devem ser as mesmas.

A Figura 3-4 apresenta as deformações específicas lineares de um elemento do concreto fissurado.

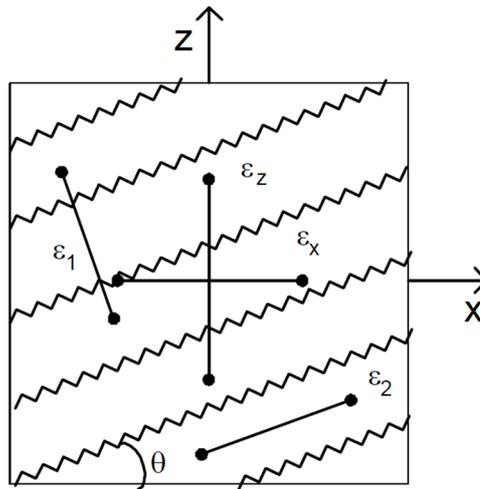


Figura 3-4 – Deformações médias em elementos fissurados.

Como não ocorrem deformações relativas entre a armadura e o concreto que a envolve, podemos admitir que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{sx} = \varepsilon_{cx}; \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{sz} = \varepsilon_{cz} \quad (3.9)$$

Se as três componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  e  $\gamma_{xz}$  são conhecidas, a deformação em qualquer outra direção pode ser encontrada por geometria. O círculo de Mohr das deformações específicas médias, apresentado na Figura 3-5, resume as transformações envolvidas.

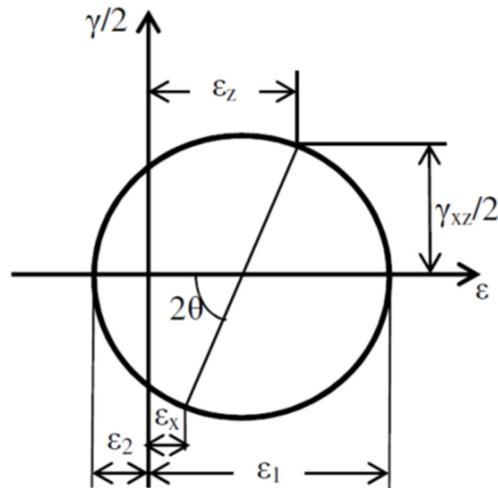


Figura 3-5 – Círculo de Mohr das específicas médias.

Diversas identidades geométricas podem derivar desta geometria, onde  $\varepsilon_1$  é a deformação principal de alongamento e  $\varepsilon_2$  a deformação principal de encurtamento.

$$\gamma_{xz} = \frac{2(\varepsilon_x - \varepsilon_2)}{\operatorname{tg} \theta}; \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad (3.11)$$

e

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_z - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_z}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_x} \quad (3.12)$$

### 3.1.3. Relações constitutivas.

O princípio mais importante deste modelo é que, quando o concreto atinge o estado de fissuração, pode ser tratado como um material novo, com um novo comportamento tensão – deformação, definido empiricamente. Este comportamento pode diferir da tradicional curva tensão – deformação dos materiais, pois os valores das deformações utilizados pela “Teoria do Campo da Compressão Modificada” são valores médios, isto é, são valores que englobam conjuntamente os efeitos combinados de deformações locais nas fissuras, deformações entre fissuras, deformações impedidas e deformações devidas à formação de fissuras. As tensões calculadas são também tensões médias que implicitamente incluem tensões entre fissuras, tensões nas fissuras e na interface de cisalhamento nas fissuras.

### 3.1.3.1. Comportamento da armadura

Será assumido que a tensão axial na armadura depende apenas de sua deformação axial, assim:

$$f_{sx} = E_s \cdot \epsilon_x \leq f_{yd}; \quad (3.13)$$

$$f_{sz} = E_s \cdot \epsilon_z \leq f_{yd} \quad (3.14)$$

E, ainda, que as armaduras não resistam às tensões cisalhantes médias nos planos a elas normais, ou seja:

$$\tau_{sx} = \tau_{sz} = 0 \quad (3.15)$$

### 3.1.3.2. Comportamento do concreto à compressão

A direção principal das deformações do concreto desvia um pouco da direção principal das tensões; entretanto, assumir que estes ângulos são coincidentes é uma simplificação razoável.

A tensão de compressão principal do concreto  $f_{c2}$ , não é função unicamente da deformação principal de encurtamento  $\epsilon_2$ , mas também da coexistente deformação principal de alongamento  $\epsilon_1$ . Assim, o concreto fissurado, sujeito a altas tensões de tração na direção normal à direção de compressão, tem sua curva tensão-deformação abatida, quando comparada aos resultados obtidos em ensaios de compressão axial em corpos de prova de cilíndricos, ver Figura 3-6, [6].

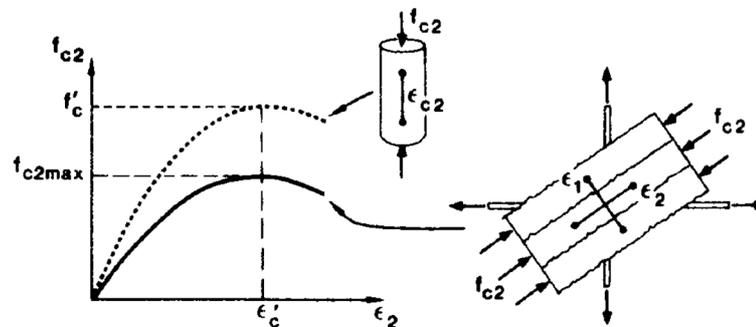


Figura 3-6 - Curva Tensão-Deformação para concreto fissurado à compressão. [6]

Para tanto, tem-se as equações sugeridas por VECCHIO e COLLINS [6] para considerar a perda de resistência do concreto à compressão são as seguintes:

$$f_{c2} = f_{c2,\max} \cdot \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_c} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

onde:

$$f_{c2,\max} = \frac{f'_c}{0,8 - 0,34 \cdot \varepsilon_1 / \varepsilon'_c} \leq f'_c \quad (3.17)$$

A deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico  $\varepsilon'_c$  e a deformação de tração na direção principal  $\varepsilon_1$  terão sempre sinais contrários, e quanto maior essa relação, maior será a redução de  $f_{c2,\max}$ . A Figura 3-7 apresenta a redução da resistência à compressão máxima do concreto  $f_{c2,\max}$  de acordo com a variação da relação  $\varepsilon_1 / \varepsilon'_c$ .

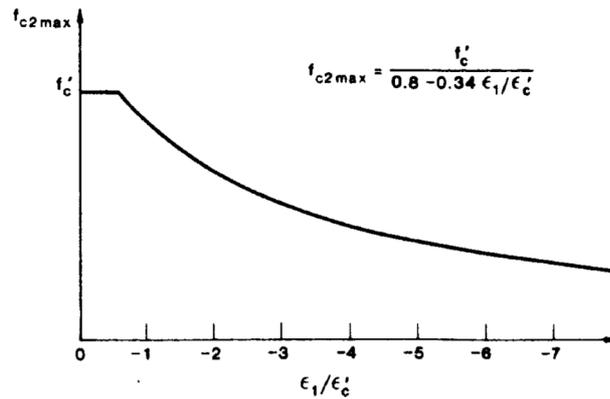


Figura 3-7 - Curva proposta para a tensão máxima de compressão. [6]

### 3.1.3.3. Comportamento do concreto à tração

O concreto quando se encontra sujeito à tração, apresenta um comportamento linear até que seja aberta a primeira fissura ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr}$ ). Até então, a resistência do concreto a tração será:

$$f_{c1} = E_c \cdot \varepsilon_1 \quad (3.18)$$

A equação proposta por VECCHIO e COLLINS [6] para resistência a tração do concreto após a abertura da primeira fissura ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr}$ ) é:

$$f_{c1} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{500 \cdot \varepsilon_1}} \quad (3.19)$$

onde  $f_{cr}$  (em MPa) pode ser estimado pela seguinte equação:

$$f_{cr} = 0,33 \cdot \sqrt{f'_c} \quad (3.20)$$

Se a deformação principal de alongamento  $\varepsilon_1$  for elevada, a abertura de fissuras aumenta, e o valor da tensão principal de tração diminui mais rapidamente. A Figura 3-8, apresenta o diagrama de tensão média - deformação média, para fenômenos de tração no concreto fissurado.

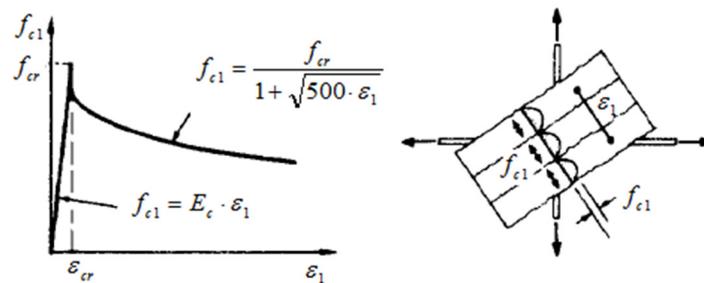


Figura 3-8 - Diagrama tensão-deformação médios, para fenômenos de tração no concreto fissurado. [6]

#### 3.1.3.4. Comportamento do concreto entre duas faces de fissuras sujeitas ao fenômeno de cisalhamento.

Até agora, as formulações de tensão e deformação consideram valores médios, ou seja, não estão consideradas as variações que possam ocorrer localmente. Na seção fissurada, as tensões de tração na armadura assumirão valores superiores aos médios, enquanto que no meio da distância entre fissuras, as mesmas tensões serão menores do que a média. As tensões de tração no concreto, por outro lado, assumirão valor zero na interface da fissura e terão valores superiores à média a meia distância entre fissuras. Essas variações locais de tensão são importantes, pois a capacidade última dos

elementos tensionados biaxialmente será regida pela capacidade da armadura de transmitir as tensões através das fissuras.

A Figura 3-9 compara as tensões médias calculadas, seção S1, com as reais tensões locais na fissura, seção S2. A direção fissurada crítica é assumida como normal à direção principal de tração. Enquanto o valor da tensão cisalhante média é zero na seção S1, no plano principal de tensões médias, pode haver tensões cisalhantes locais na seção S2. Essa tensão cisalhante local  $\tau_{ci}$ , pode ser acompanhada por uma pequena tensão de compressão  $\sigma_{ci}$  através da fissura.

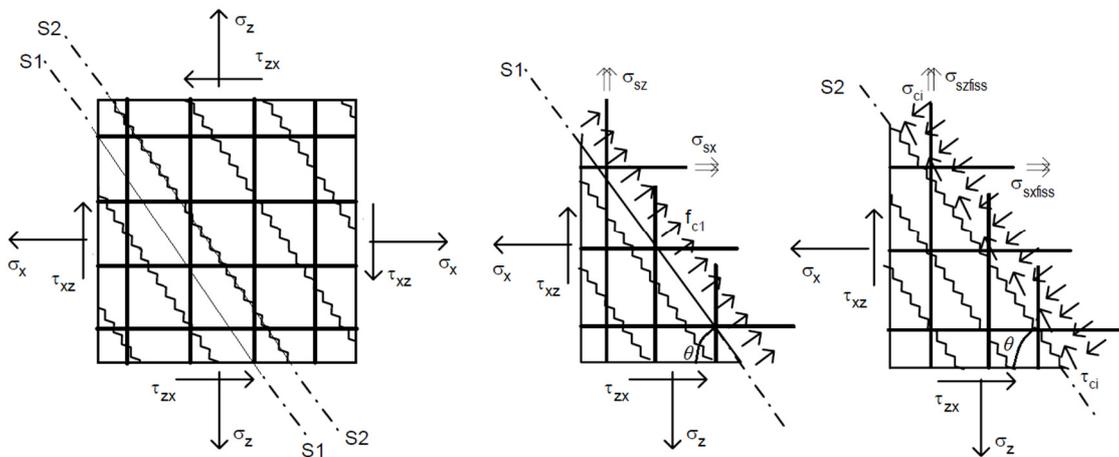


Figura 3-9- Detalhe dos esforços localizados nas fissuras e entre fissuras.

As equações de equilíbrio da seção S1 já foram apresentadas nas equações (3.5) e (3.6). As equações de equilíbrio das tensões locais na fissura, com as tensões externas  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$  serão apresentadas a seguir:

$$\sigma_{sxfiss} = \sigma_x + \frac{\tau_{xz}}{tg\theta} + \frac{\tau_{ci}}{tg\theta} + \sigma_{ci} \cdot sen\theta \quad (3.21)$$

$$\sigma_{szfiss} = \sigma_z + \tau_{xz} \cdot tg\theta - \tau_{ci} \cdot tg\theta - \sigma_{ci} \cdot cos\theta \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.6) nas equações (3.21) e (3.22) respectivamente, temos:

$$\sigma_{sxfiss} = \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} + f_{c1} + \frac{\tau_{ci}}{tg\theta} + \sigma_{ci} \cdot sen\theta \quad (3.23)$$

$$\sigma_{szfiss} = \rho_{sz} \cdot \sigma_{sz} + f_{c1} - \tau_{ci} \cdot tg\theta - \sigma_{ci} \cdot cos\theta \quad (3.24)$$

Mesmo que não existam tensões cisalhantes e de compressão nas faces da seção fissurada, ainda assim é possível se obter o equilíbrio:

$$\sigma_{sxfiss} - \rho_{sx} \cdot \sigma_{sx} = \sigma_{szfiss} - \rho_{sz} \cdot \sigma_{sz} = f_{cl} \quad (3.25)$$

Entretanto, a tensão na armadura na seção fissurada não pode exceder a tensão de escoamento do aço de cálculo. Sendo assim:

$$\sigma_{sxfiss} \leq f_{yd,x} \quad (3.26)$$

$$\sigma_{szfiss} \leq f_{yk,z} \quad (3.27)$$

Para a maioria dos tipos de concreto, a fissuração irá ocorrer ao longo da interface da pasta de cimento e das partículas de agregado. As fissuras resultantes deste processo podem fazer a transferência do cisalhamento pela ligação do agregado, tal como mostrado na Figura 3-10:

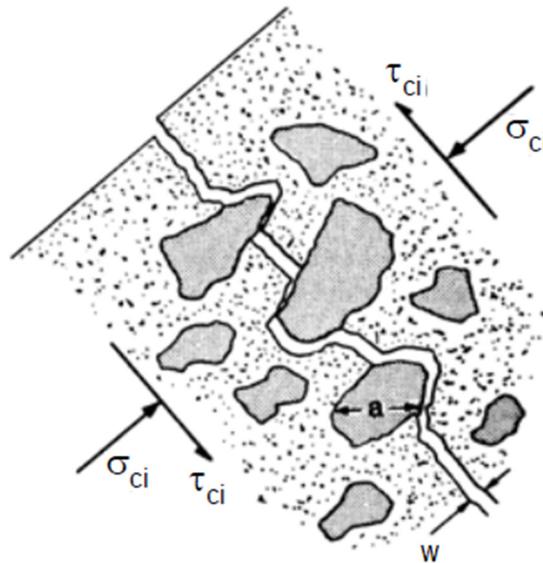


Figura 3-10- Transmissão das tensões de cisalhamento através de uma fissura pelas ligações das partículas de agregado [6].

As relações entre o cisalhamento que ocorre ao longo da fissura,  $\tau_{ci}$ , a abertura das fissuras,  $w$ , e a tensão de compressão na fissura,  $\sigma_{ci}$ , foram estudadas experimentalmente por diversos pesquisadores e se chegou à seguinte formulação:

$$\tau_{ci} = 0,18 \cdot \tau_{ci\max} + 1,64 \cdot \sigma_{ci} - 0,82 \cdot \frac{\sigma_{ci}^2}{\tau_{ci\max}} \quad (3.28)$$

onde,

$$\tau_{ci\max} = \frac{\sqrt{f'_c}}{0,31 + 24 \cdot w / (a + 16)} \quad (3.29)$$

Sabendo-se que a tensão de compressão na fissura  $f'_{ci}$  é bastante pequena em relação à tensão cisalhante na fissura,  $\tau_{ci}$ , adota-se a seguinte simplificação:

$$\tau_{ci} = \frac{0,18 \cdot \sqrt{f'_c}}{0,31 + 24 \cdot w / (a + 16)} \quad (3.30)$$

Em que  $a$  é o tamanho máximo das partículas de agregado em mm e as unidades das tensões nas equações (3.28) a (3.30) são MPa.

A abertura das fissuras utilizada na equação (3.30) deverá ser a largura média das fissuras existentes na superfície fissurada e pode ser tomada como o produto da deformação principal de alongamento pelo espaçamento das fissuras,  $s_\theta$ , ou seja:

$$w = \varepsilon_1 \cdot s_\theta \quad (3.31)$$

$$s_\theta = \frac{1}{\frac{\text{sen}\theta}{s_{mx}} + \frac{\text{cos}\theta}{s_{mz}}} \quad (3.32)$$

Onde  $s_{mx}$  e  $s_{mz}$  são os indicadores das características do controle da fissuração nas direções de armadura em  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 3.2. Abordagem Geral do Programa RESPONSE-2000

Conforme já mencionado, a utilização manual da Teoria do Campo de Compressão Modificada é muito complexa. Para viabilizar o seu uso, diversas aproximações são sugeridas e com isso, muitas vezes o propósito de se utilizar um método tão completo acaba se perdendo.

O programa RESPONSE-2000, desenvolvido BENTZ e colaboradores [9], se baseia nos princípios da Teoria do Campo da Compressão Modificada e permite a análise de vigas e colunas submetidas a combinações arbitrárias de cargas axiais, momentos fletores e forças cortantes. Suas hipóteses básicas são de que as seções planas permanecem planas (Hipótese de Navier-Bernouli) e que a seção estudada está localizada em uma zona livre de concentração de tensões.

“RESPONSE-2000 foi comparado com uma base de dados de 534 vigas e faz a previsão de tensões cisalhantes em relação à média experimental com a razão de 1,05 e com um coeficiente de variação de 12%. Isto é, se compara favoravelmente com as proporções de predição do código ACI 318, que têm uma média de 1,20 e um coeficiente de variação de 32%.”, afirma BENTZ [8].

Nos itens a seguir serão apresentadas a entrada de dados e a análise de resultados do programa RESPONSE-2000, de maneira a estabelecer relações com as práticas usuais de dimensionamento. Para se obter mais informações sobre o método de processamento e parâmetros de análise é recomendado consultar [8] e [9].

#### 3.2.1. *Entrada de dados.*

O programa RESPONSE-2000 tem a interface bastante amigável e possui diversos tipos de seções e materiais gravados em seu banco de dados interno.

Através da barra de ferramentas “Option\Preferences” é possível escolher o sistema de unidades que será utilizado na análise e os coeficientes de minoração que serão utilizados para as resistências dos materiais.

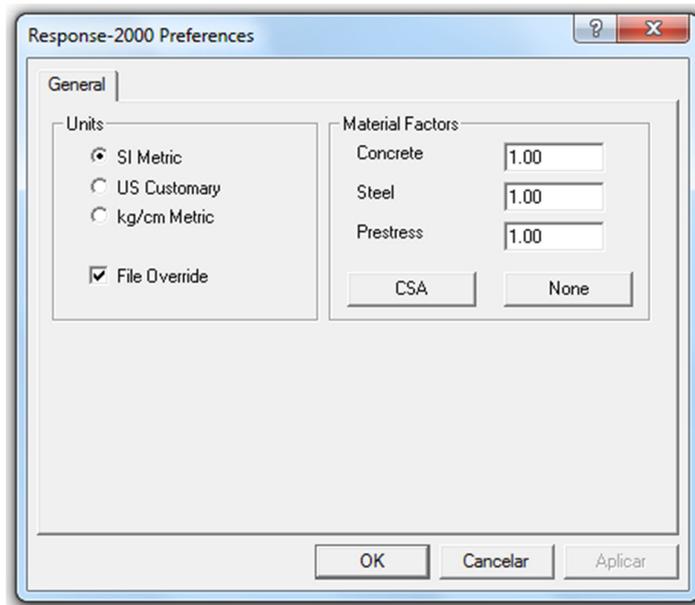


Figura 3-11– Janela de definição de preferências do Programa RESPONSE-2000.

A barra de ferramentas “Define”, contém a opção “Quick Define”, onde em quatro passos são definidos os materiais, a geometria, a armadura longitudinal e a armadura transversal. Como não são oferecidas opções avançadas, como veremos a seguir, esta opção é a única maneira de se iniciar o processo, mesmo que todos os dados definidos inicialmente sejam alterados posteriormente.

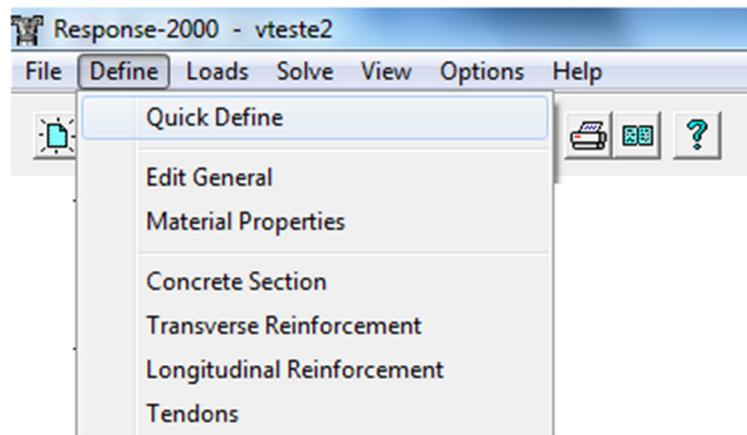


Figura 3-12– Barra de ferramentas “Define” do Programa RESPONSE-2000

Acessando a opção “Edit General”, podemos adicionar título e comentários sobre a análise, definir um espaçamento das fissuras em cada direção e os eixos de referência.

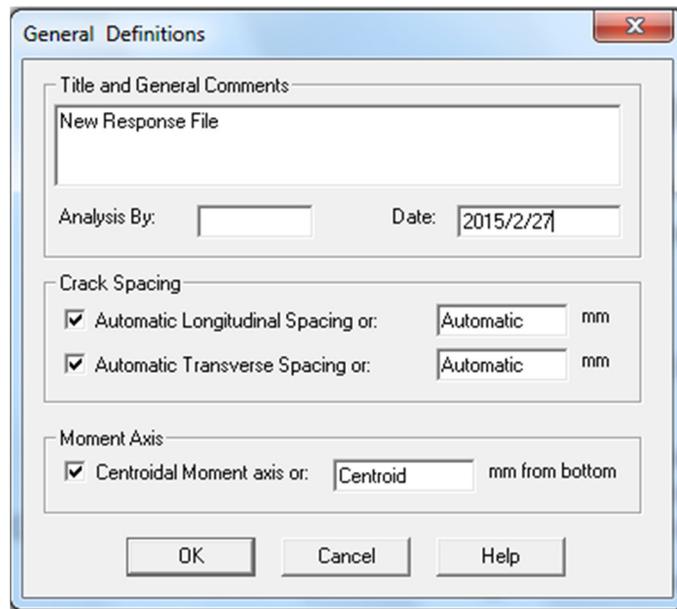


Figura 3-13- Janela de Definições Gerais do Programa RESPONSE-2000.

Se marcada a opção de espaçamento automático das fissuras, o programa irá considerar a seguinte equação:

$$Sm = 2 \cdot c + 0,1 \cdot d_b / \rho \quad (3.33)$$

onde:

$c$  - é a distância da barra mais próxima a partir da altura corrente.

$d_b$  - é o diâmetro da barra mais próxima

$\rho$  - é porcentagem de armadura na altura corrente, em relação a área de concreto equivalente a  $\pm 7,5 \cdot d_b$ .

A Figura 3-14 apresenta o esquema das grandezas utilizadas para o cálculo do espaçamento automático das fissuras, segundo o programa RESPONSE2000.

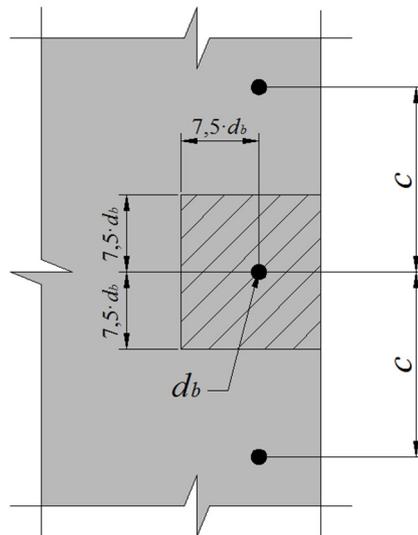


Figura 3-14– Esquema das grandezas utilizadas para o cálculo do espaçamento automático das fissuras, segundo o programa RESPONSE2000.

Acessando-se a opção “Material Properties”, são dadas as opções para detalhar as características dos materiais do concreto e da armadura.

Na aba de características do concreto, podemos escolher entre a curva base definida pelo programa ou utilizar uma curva base segmental, como por exemplo, a curva base apresentada no capítulo 8.2.10.1 da NBR 6118:2014 [1]. É importante lembrar que os fatores de redução de resistência dos materiais devem ser considerados nesta etapa.

A definição “Cylinder Strength” se refere à resistência à compressão do concreto no ensaio de compressão axial cilíndrico. Essa resistência quando medida aos 28 dias de idade do corpo de prova é denominada  $f_{ck}$  ou quando medida em outra idade “j”,  $f_{cj}$ .

A definição “Tension Strength” se refere à resistência à tração máxima no concreto e é calculada automaticamente. Para um concreto que não resista à tração seu valor será zero.

A definição “Peak Strain” refere-se ao valor da deformação em que o concreto atinge a sua resistência máxima.

A definição “Aggregate Size” refere-se ao valor do tamanho do agregado em milímetros e está relacionada diretamente com a equação (3.30). As definições “Tension Stiff Factor” e “Tension Stiffening” se referem à equação (3.19). Para o caso do concreto não resistir à transmissão de esforços entre as faces fissuradas, as duas primeiras definições devem ser tomadas igual a zero e na terceira deve ser escolhida a opção “None”.

DADOS DE ENTRADA	
$f_{ck}$	25 MPa
$\gamma_c$	1.00
$\phi_c$	1
$\epsilon_{c2}$	-0.002 m/m
$\epsilon_{cu}$	-0.0035 m/m

SEGMENTAL	
mm/m	MPa
0.0	0.0
1.0	18.8
1.1	19.9
1.2	21.0
1.3	21.9
1.4	22.8
1.5	23.4
1.6	24.0
1.7	24.4
1.8	24.8
1.9	24.9
2.0	25.0
3.5	25.0

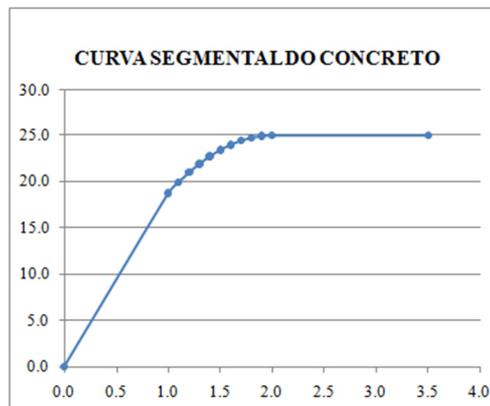


Figura 3-15- Curva segmental do concreto à compressão [1].

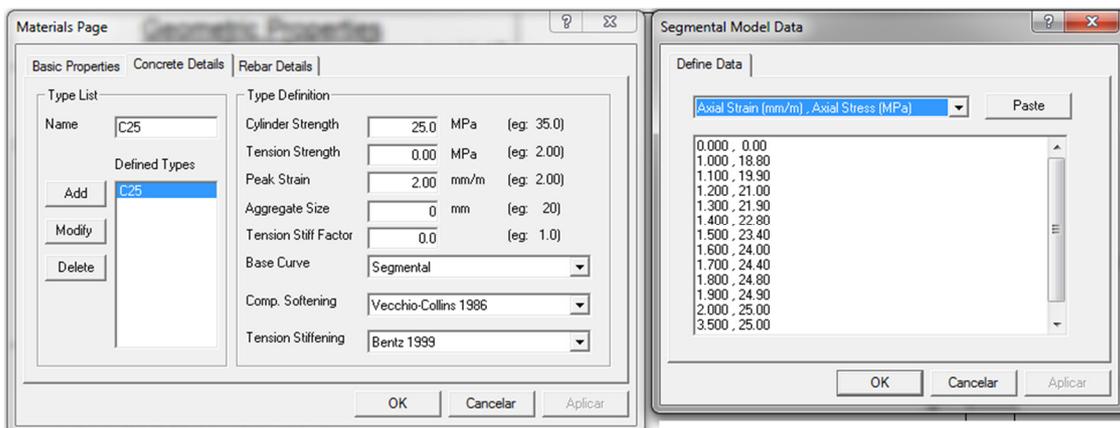


Figura 3-16- Janela de Definições do Concreto do Programa RESPONSE-2000.

Na aba de características das armaduras Figura 3-17, pode ser introduzido o valor do módulo de elasticidade, da tensão característica de escoamento do aço,  $f_{yk}$ , o valor da deformação em que o aço atinge a tensão máxima, a deformação de ruptura do aço e a tensão última.

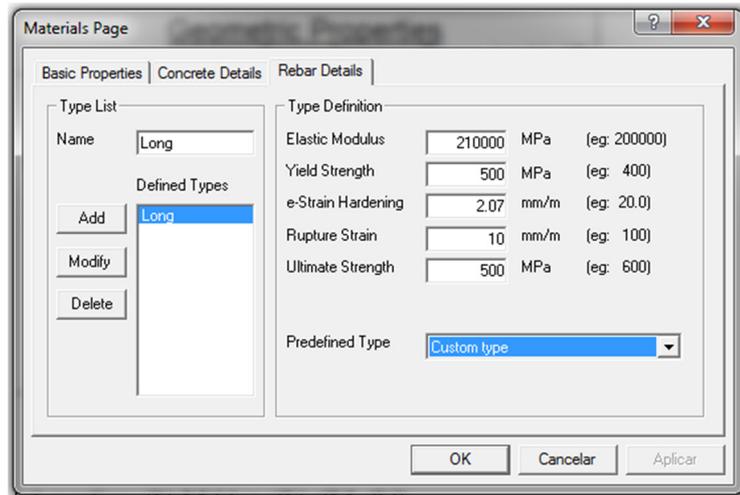


Figura 3-17– Janela de Definições da Armadura do Programa RESPONSE-2000.

Os diagramas tensão deformação do concreto e do aço gerados pelo programa são apresentados a seguir, na Figura 3-18.

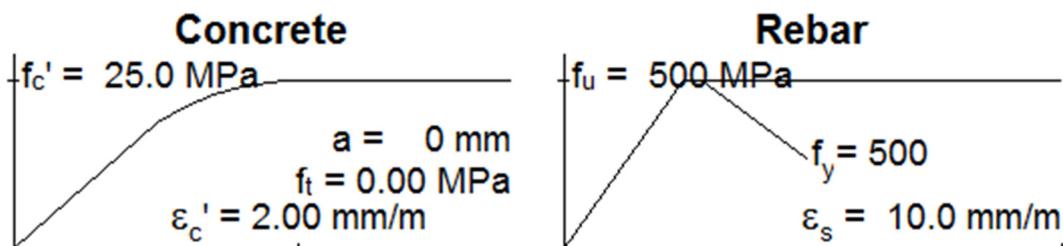


Figura 3-18– Diagramas Tensão-Deformação do concreto e do aço, gerados pelo Programa RESPONSE-2000.

Acessando a opção “Concrete Section”, Figura 3-19, pode ser definida a seção de concreto que deve se manter constante ao longo de toda a extensão da viga.

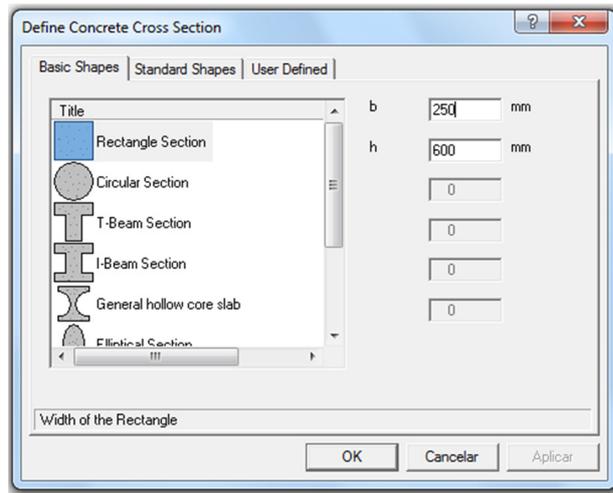


Figura 3-19– Janela de Definição da Seção de Concreto do Programa RESPONSE-2000.

Acessando-se a opção “Transverse Reinforcement”, Figura 3-20, será definido o espaçamento longitudinal dos estribos, a área da seção transversal de uma perna do estribo e o cobrimento.

Para a análise de seções onde existe esforço cortante e não é considerada a resistência do concreto à tração, o programa recomenda que os estribos sejam considerados como contínuos da face superior até a inferior.

É possível escolher diversos tipos de estribos. Porém, sendo a análise feita apenas em duas dimensões, a única diferença na escolha do tipo seria na quantidade de pernas. O modelo não considera esforços de torção.

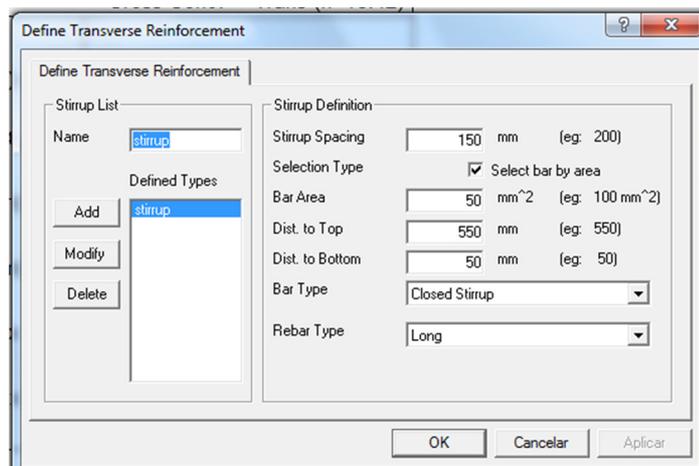


Figura 3-20– Janela de Definição da Armadura Transversal do Programa RESPONSE-2000.

Acessando a opção “Longitudinal Reinforcement”, Figura 3-21, são definidas as armaduras longitudinais em forma de camadas relativas à distância em que cada uma se encontra do fundo da viga. A distribuição das barras de armadura na seção transversal tem grande influência nas respostas do modelo quando se considera a flexão juntamente com o esforço cortante.

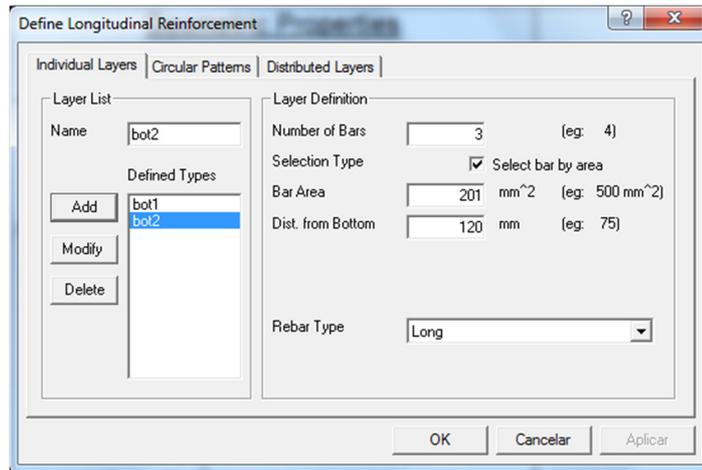


Figura 3-21– Janela de Definição da Armadura Longitudinal do Programa RESPONSE-2000.

A barra de ferramentas “Loads”, Figura 3-22, contém diversas opções de carregamentos. Não serão abordados neste trabalho os carregamentos devido a efeitos reológicos do concreto, “Time Dependent Effects”, variação térmica e deformações de retração, “Detailed Thermal and Shrinkage Strains”, e descontinuidades de deformação, “Strain Discontinuity”.

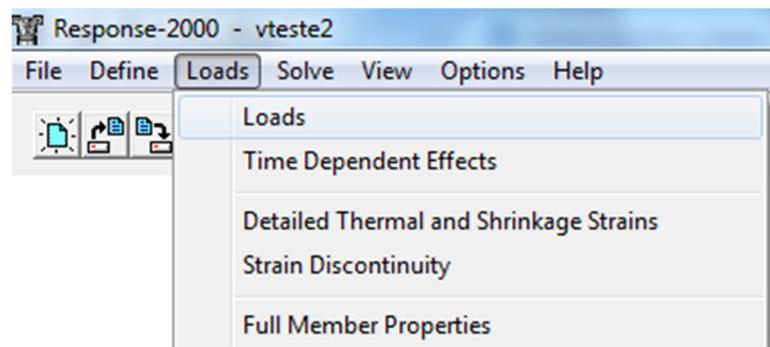


Figura 3-22– Barra de Ferramentas “Loads” do Programa RESPONSE-2000

O carregamento “Loads”, Figura 3-23, considera um conjunto de solicitações  $M$ ,  $N$  e  $V$ , ao qual uma seção da viga está submetida. Seus incrementos devidos à variação dos esforços entre uma seção e outra  $dM$ ,  $dN$  e  $dV$  também são considerados.

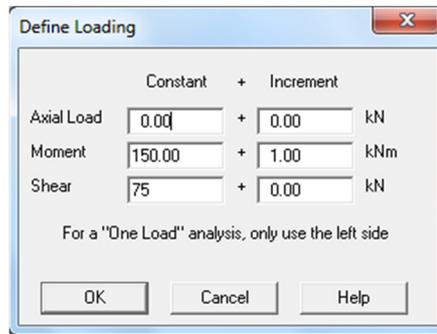


Figura 3-23– Janela de Definição das Ações em uma Seção Transversal do Programa RESPONSE-2000.

Selecionando-se a opção “Full Member Properties”, Figura 3-24, é possível definir a dimensão longitudinal da viga, as condições de apoio e a distribuição de esforços no sentido longitudinal da viga.

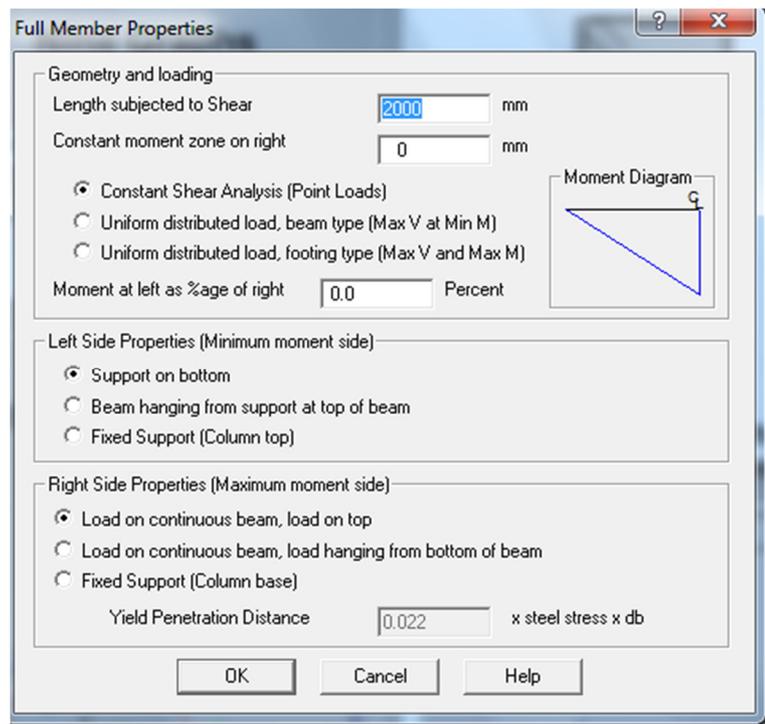


Figura 3-24– Janela de Definição da Análise Longitudinal da Viga do Programa RESPONSE-2000.

Assim definidos os materiais, geometria, armadura longitudinal, armadura transversal e carregamentos, obtemos o quadro resumo apresentado na Figura 3-25, de uma seção transversal.

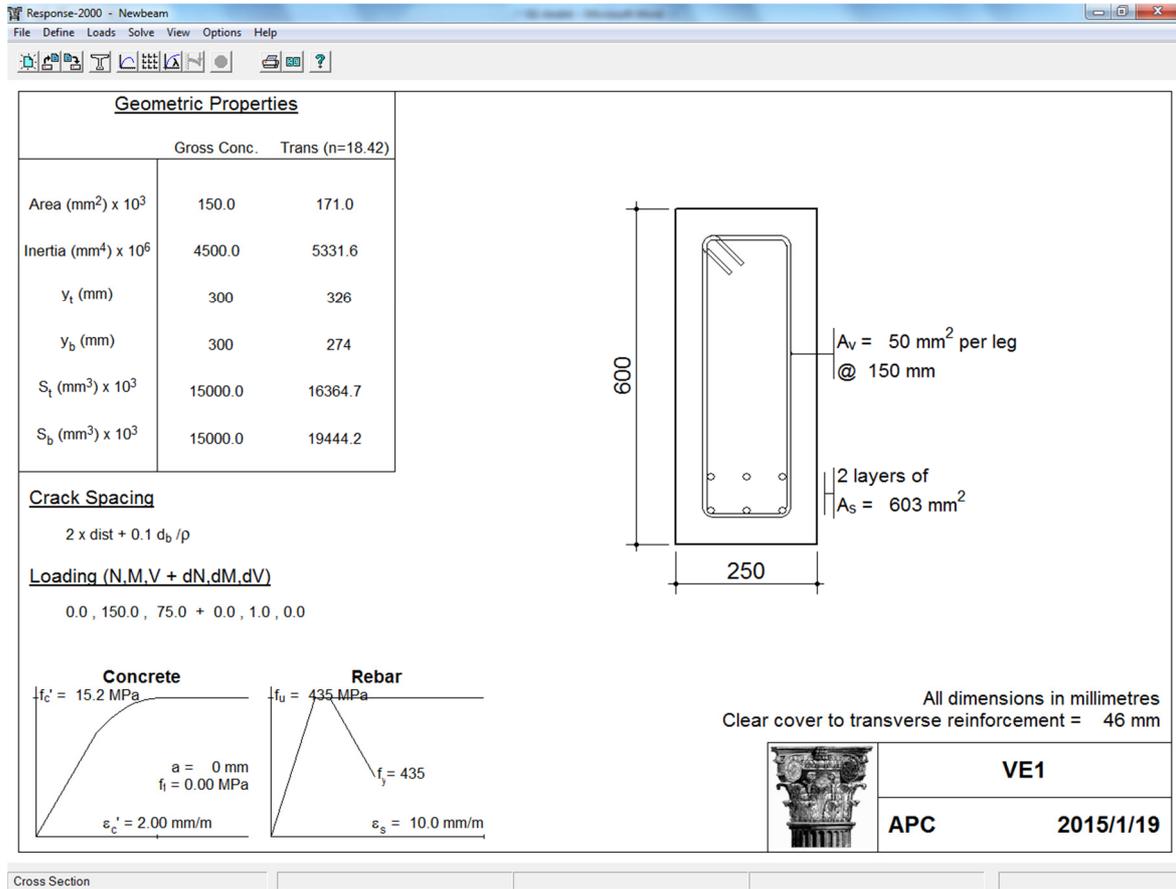


Figura 3-25– Quadro de Resumo dos Dados da Seção Transversal do Programa RESPONSE-2000.

A barra de ferramentas “Solve”, Figura 3-26, apresenta diversas opções de análise do modelo matemático. Cabe ao usuário escolher o tipo de resposta que melhor atenda a suas necessidades.

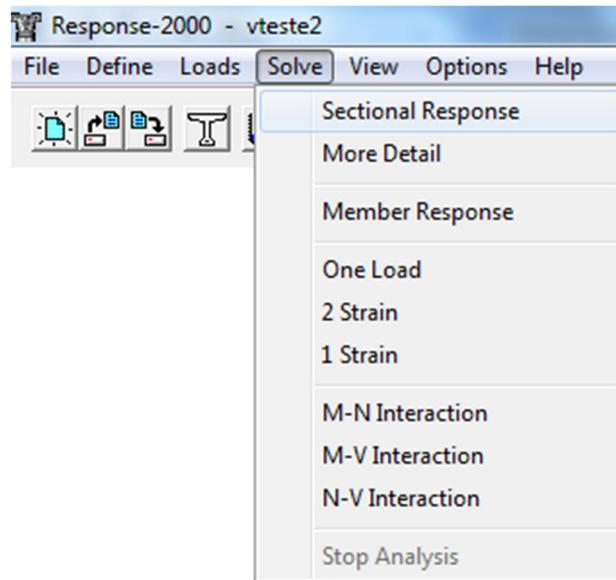


Figura 3-26– Barra de ferramentas “Solve” do Programa RESPONSE-2000

Existem basicamente quatro tipos de análise. São elas:

- Análise da seção transversal a partir de solicitações, “loads”, pré-definidas. Estão nesse grupo a análise do tipo “Sectional Response” que faz iterações momento-curvatura a partir do carregamento inicial até a ruptura da seção e o tipo “One Load” que analisa a seção estudada apenas para a carga pré-definida.
- Análise da seção longitudinal “Member Response”, considerando a dimensão longitudinal, as condições de apoios e formato do diagrama de solicitações definidos em “Full Member Properties”. A seção é carregada até o seu esgotamento e é montado um gráfico com diversos pontos de pares de esforços  $M$  e  $V$ .
- Análise da seção transversal a partir das deformações longitudinais. Não se considera a influência do esforço cortante. Na opção “2 Strain” é possível fornecer a deformação no topo e na face inferior da viga e obter as tensões que são geradas. Na opção “1 Strain” é possível fornecer a deformação na altura da armadura e o programa encontra uma configuração que equilibre a seção.
- Análise por iterações de pares de esforços “M-N, M-V e N-V”. A seção é calculada para os pares de esforços e o terceiro esforço é tido como consequência. O cálculo se desenvolve para todas as situações dos pares de esforços máximos.

## 4. MODELO ACOPLADO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE FLEXÃO-COMPOSTA E ESFORÇO CORTANTE

### 4.1. Modelo para Análise Não-Linear de Flexão-Composta

#### 4.1.1. Fundamentos Teóricos

Seja uma seção transversal de formato arbitrário de um elemento estrutural de eixo reto submetido à flexão pura, como apresentado na Figura 4-1

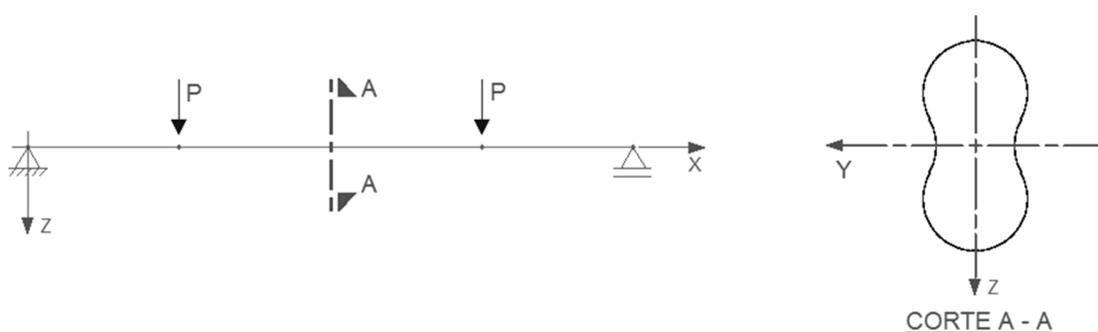


Figura 4-1- Eixos locais do elemento estrutural linear, submetido à flexão.

Hipóteses admitidas:

- O plano XZ é um plano de simetria da seção do elemento estrutural.
- As ações atuantes e os deslocamentos ocorrem no plano XZ.

Um segmento de comprimento  $dx$ , tomado entre duas seções transversais muito próximas  $ab$  e  $cd$ , submetidas ao momento fletor  $M$ , tem seu eixo fletido em um arco de círculo, como mostrado na Figura 4-2.

Sob a hipótese de linearidade geométrica, consideram-se pequenos deslocamentos e pequenas deformações específicas.

Admite-se ainda, a hipótese de que as seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão (Viga de Navier-Bernoulli) e que as tensões longitudinais são linearmente proporcionais às deformações.

Esta hipótese é válida quando o material se comporta elasticamente ou plasticamente, desde que a relação entre a altura e o comprimento da viga seja pequena.

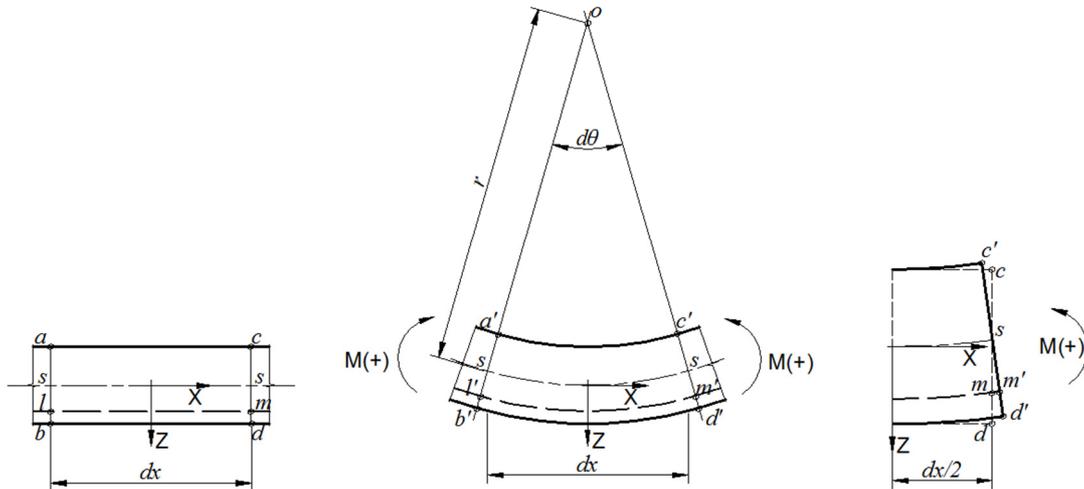


Figura 4-2 - Deformação longitudinal de um elemento submetido à flexão pura.

Após a deformação, os planos das duas seções transversais  $\overline{ab}$  e  $\overline{cd}$  se interceptam no ponto  $O$ , chamado de centro de curvatura do eixo longitudinal do elemento, formando um ângulo  $d\theta$  entre as seções.

Da análise geométrica da Figura 4-2, tem-se:

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{dx} \quad (4.1)$$

onde :

- $\kappa$  - Curvatura;
- $dx$  - Comprimento do segmento entre duas seções transversais;
- $d\theta$  - Ângulo entre os planos das seções consideradas;
- $r$  - Raio de curvatura

O comprimento de uma fibra alongada ( $l'm'$ ) situada a uma distância  $z$  da superfície neutra  $ss$ , onde a deformada é nula, é dado por:

$$l'm' = (r + z) \cdot d\theta = \left(1 + \frac{z}{r}\right) \cdot dx \quad (4.2)$$

Considerando o comprimento inicial da fibra  $dx$  e o comprimento final dado pela expressão (4.2), o alongamento correspondente à parcela  $z \cdot \frac{dx}{r}$  e a deformação  $\varepsilon_x$  são dados por:

$$\varepsilon_x = \frac{z \cdot dx/r}{dx} = \frac{z}{r} = \kappa \cdot z \quad (4.3)$$

onde :

- $\varepsilon_x$  - Deformação específica na direção do eixo  $x$ ;
- $z$  - Distância do centro de gravidade vertical da seção transversal à fibra considerada.

De acordo com a orientação do eixo  $z$ , dada na Figura 4-2 e na equação (4.2), a deformação  $\varepsilon_x$  é negativa quando a fibra estiver comprimida e positiva quando estiver tracionada.

A deformação  $\varepsilon_x$  é obtida exclusivamente em função da geometria do elemento deformado, e conseqüentemente, é independente das propriedades e do comportamento do material.

Admitindo-se um material que apresente um comportamento linear, as tensões normais na peça são dadas por:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \kappa \cdot z \quad (4.4)$$

A tensão  $\sigma_x$  varia linearmente com a distância  $z$  a partir da linha neutra. No caso do momento fletor positivo, ocorre tração nas fibras inferiores e compressão nas fibras superiores.

Admite-se o sinal do momento fletor atuante ( $M$ ) positivo quando as fibras abaixo da linha neutra são tracionadas e as fibras acima da linha neutra são comprimidas. A resultante das tensões normais faz equilíbrio com a sollicitação do momento fletor atuante ( $M$ ).

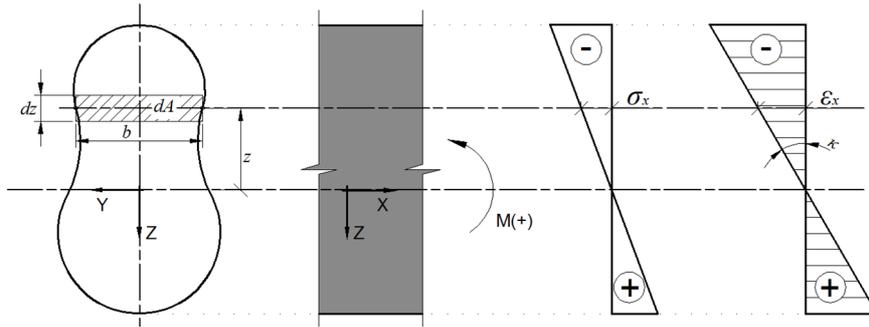


Figura 4-3 -Tensões e deformações em uma seção transversal à flexão.

Seja um elemento de área  $dA$ , com altura  $dz$  e largura média  $b$ , da seção transversal, mostrada na Figura 4-3, situada a uma distância  $z$  a partir do eixo de referência.

$$dA = b \cdot dz \quad (4.5)$$

A força atuante no elemento de área é dada por:

$$dF = \sigma_x \cdot dA = \kappa \cdot E \cdot z \cdot dA \quad (4.6)$$

A força total atuante na seção transversal é dada pela integral da força elementar  $dF$  ao longo da área:

$$F = \int dF = \int \kappa \cdot E \cdot z \cdot dA \quad (4.7)$$

O momento provocado pela força elementar  $dF$  em relação à linha neutra é dado por:

$$dM = z \cdot dF = \kappa \cdot E \cdot z \cdot z \cdot dA \quad (4.8)$$

A integral dos momentos elementares  $dM$  ao longo de toda a seção transversal é igual ao momento fletor atuante  $M$ :

$$M = \int dM = \kappa \cdot E \cdot \int z^2 \cdot dA \quad (4.9)$$

Temos que o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo Y é:

$$I_y = \int z^2 \cdot dA \quad (4.10)$$

De acordo com as equações (4.9) e (4.10) podemos escrever a expressão da curvatura  $\kappa$  em função do momento fletor  $M$ :

$$\kappa = \frac{M}{E \cdot I_y} \quad (4.11)$$

Assim, a tensão em uma fibra qualquer distante  $z$  da linha neutra, em função do momento fletor atuante  $M$ , é dada por:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot z}{I_y} \quad (4.12)$$

A Figura 4-4 apresenta o caso da flexão-composta, caracterizado pela atuação de um esforço normal  $N$  e de um momento fletor  $M$ .

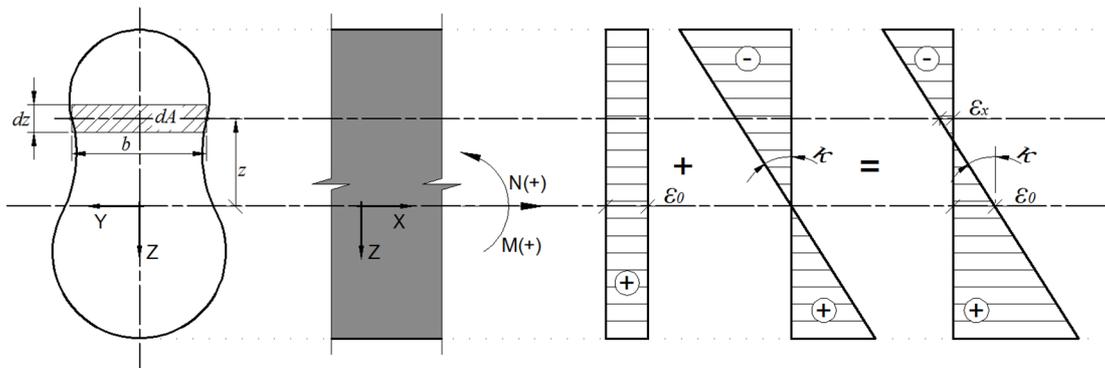


Figura 4-4 - Deformações em uma seção transversal submetida à flexão-composta.

Para o caso de flexão-composta, de acordo com a Figura 4-4, a deformação  $\varepsilon_x$  de uma faixa situada a uma distância  $z$  da linha neutra é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z \quad (4.13)$$

Onde  $\varepsilon_0$  é a deformação longitudinal na altura do centro de gravidade da peça.

#### 4.1.2. Definição da Seção Transversal de Concreto Armado

Seja uma seção transversal de concreto armado, de formato arbitrário, discretizada em elementos retangulares de concreto, com largura  $b_i$  e altura  $dz_i$ , cujo centróide está localizado à uma distância  $z_i$  do eixo de referência.

Há elementos discretos pontuais que representam os centróides das barras de aço longitudinais, com área específica  $A_{s_i}$ , localizados à uma distância  $z_{s_i}$  do eixo de referência, conforme apresentado na Figura 4-5(a).

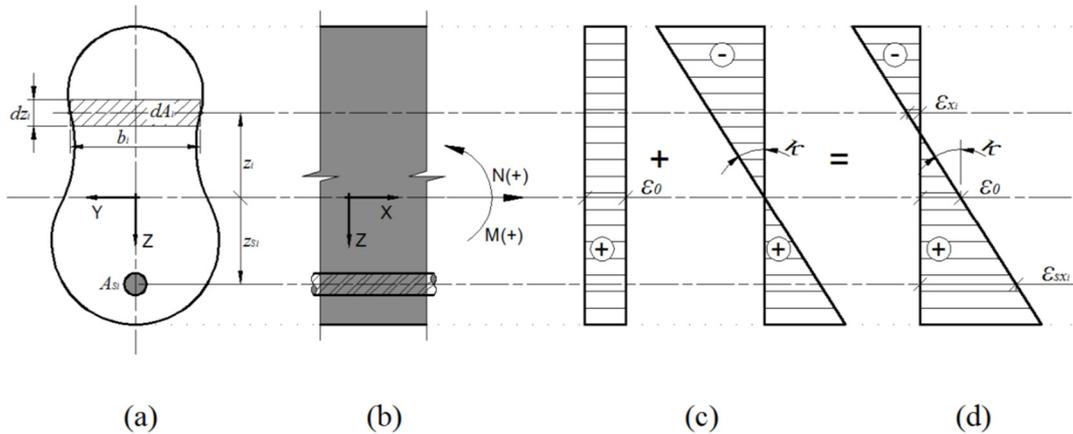


Figura 4-5 - Deformações em uma seção transversal de concreto armado, submetida à flexão-composta.

Para cada um dos elementos discretizados é possível atribuir uma relação constitutiva do material empregado, permitindo que cada elemento seja considerado em um estado de tensão-deformação uniaxial. Logo, a partir das solicitações de forças normais e momentos fletores apresentados na Figura 4-5(b), obtemos suas respectivas deformações, apresentadas na Figura 4-5(c).

A hipótese de viga de Navier-Bernoulli é considerada como lei cinemática, as superfícies planas permanecem planas após a deformação e conseqüentemente é mantida após a soma das deformações, Figura 4-5 (d).

Para a definição dos esforços resistentes de uma seção transversal são consideradas as seguintes hipóteses:

- A seção transversal deve ter como eixo de simetria a linha perpendicular à direção do momento fletor, tanto para seção de concreto quanto para a distribuição das barras de aço.
- É considerada a perfeita aderência entre o concreto e o aço, logo deformações longitudinais relativas entre ambos, localizadas à mesma profundidade  $z$ , serão consideradas nulas.

- As seções transversais planas permanecem planas após a deformação, conforme a hipótese da viga de Navier-Bernoulli.
- As tensões são proporcionais às deformações, de acordo com a relação constitutiva de cada material.

Os esforços resistentes de uma seção transversal devem satisfazer às condições de equilíbrio, onde:

$$N_R = \int_A \sigma(\varepsilon) \cdot dA \quad (4.14)$$

$$M_R = \int_A \sigma(\varepsilon) \cdot z \cdot dA \quad (4.15)$$

Portanto, para a seção transversal de um elemento linear de concreto armado, os esforços resistentes devem ser dados pela integração das tensões normais no concreto e no aço:

$$N_R = \int_{A_C} \sigma_C(\varepsilon_C) \cdot dA + \sum_{nb} [\sigma_S(\varepsilon_S) - \sigma_C(\varepsilon_S)] \cdot A_s \quad (4.16)$$

$$M_R = \int_{A_C} \sigma_C(\varepsilon_C) \cdot z \cdot dA + \sum_{nb} [\sigma_S(\varepsilon_S) - \sigma_C(\varepsilon_S)] \cdot z \cdot A_s \quad (4.17)$$

onde:

- $\varepsilon_C$  - Deformação longitudinal no concreto
- $\varepsilon_S$  - Deformação longitudinal no aço
- $\sigma_C(\varepsilon_C)$  - Tensão normal no concreto em função de sua deformação
- $\sigma_S(\varepsilon_S)$  - Tensão normal no aço em função de sua deformação
- $\sigma_C(\varepsilon_S)$  - Tensão normal no concreto em função da deformação do aço
- $nb$  - Número de barras de aço

A tensão de concreto contabilizada na área preenchida pela seção de aço deve ser descontada da tensão do aço,  $\sigma_S(\varepsilon_S) - \sigma_C(\varepsilon_S)$ .

#### 4.1.3. Relações Constitutivas do Concreto e do Aço.

A determinação do comportamento das curvas tensão-deformação do concreto e do aço, de um elemento estrutural, tem tantas variáveis quanto necessário. Diversos casos e particularidades já foram estudados e publicados sobre esse assunto.

No método apresentado neste trabalho podem ser utilizadas as curvas tensão-deformação mais adequadas ao modelo estrutural que se deseja estudar. Assim, todas as simplificações feitas aqui, tem apenas a intenção de dar maior objetividade ao estudo.

##### 4.1.3.1. Relações Constitutivas do Concreto.

Para análise no estado limite último de uma peça de seção retangular de concreto armado, com resistência característica do concreto  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$  e onde o concreto possui resistência apenas à compressão, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação idealizado mostrado na Figura 4-6, definido na NBR 6118:2014 [1].

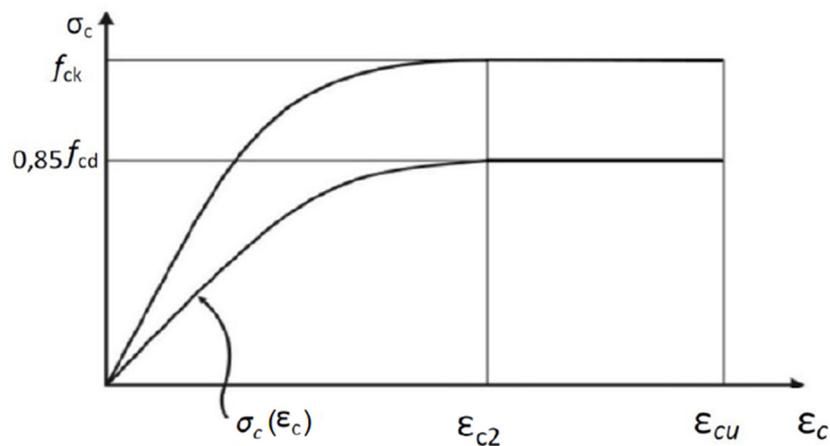


Figura 4-6-Diagrama tensão-deformação idealizado para [1].

No caso particular de concretos com  $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$ :

$$\sigma_c(\epsilon_c) = 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

onde:

- $\epsilon_c$  - Deformação específica de encurtamento do concreto.
- $\epsilon_{c2}$  - Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico.

- $\varepsilon_{cu}$  - Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura.

São adotados valores com sinais negativos para a compressão, para manter a notação estabelecida no trabalho e definidos a seguir:

$$\varepsilon_{c2} = - 2,0‰; \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{cu} = - 3,5‰; \quad (4.20)$$

O módulo de deformação longitudinal tangente do concreto pode ser definido como a derivada da curva tensão-deformação em função da deformação específica de encurtamento do concreto, como apresenta a equação (4.21).

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_c} \sigma_c(\varepsilon_c) = E_c(\varepsilon_c) \quad (4.21)$$

#### 4.1.3.2. Relações Constitutivas do Aço.

Segundo a NBR 6118:2014 [1], para o cálculo nos estados limites de serviço e último pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 4-7, para os aços da armadura passiva com ou sem patamar de escoamento.

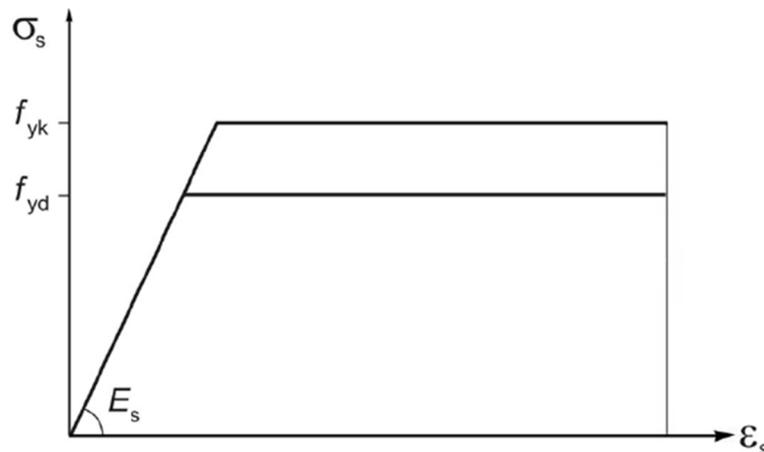


Figura 4-7- Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas [1].

Os valores adotados para o aço CA50 são apresentados a seguir.

Resistência característica do aço no escoamento:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad (4.22)$$

Resistência de cálculo do aço no escoamento:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500MPa}{1,15} = 435MPa \quad (4.23)$$

Módulo de deformação longitudinal do aço:

$$E_s = 210GPa \quad (4.24)$$

Deformação do aço no início do escoamento:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = 2,07‰ \quad (4.25)$$

Deformação última do aço à tração:

$$\varepsilon_{yu} = 10,0‰ \quad (4.26)$$

Deformação última do aço à compressão:

$$\varepsilon_{yu} = -3,50‰ \quad (4.27)$$

## **4.2. Método iterativo de Newton-Raphson para determinação não-linear da configuração deformada**

### *4.2.1. Conceitos básicos*

O método de Newton-Raphson é um método de otimização, sem restrição, iterativo de segunda ordem utilizado para resolução de equações não-lineares e aplicável no caso da determinação da configuração deformada ( $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$ ) de uma seção transversal.

Admite-se a hipótese de que o elemento está submetido a pequenos deslocamentos e pequenas deformações específicas, que as seções planas de uma viga, tomadas normalmente a seu eixo, permanecem planas após a viga ser submetida à flexão (Viga de Navier-Bernoulli) e que as tensões longitudinais são linearmente proporcionais às deformações. São desprezados efeitos de não-linearidade geométrica.

A aplicação do método no presente estudo tem como objetivo partir de valores iniciais da configuração deformada ( $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$ ) e iterativamente chegar a uma situação em que o par de esforços resistentes ( $N_R$ ,  $M_R$ ) seja próximo o suficiente do par de esforços

solicitantes ( $N_S, M_S$ ). Quando a proximidade entre os esforços solicitantes e resistentes se torna satisfatória, a deformada da seção transversal desejada é atingida.

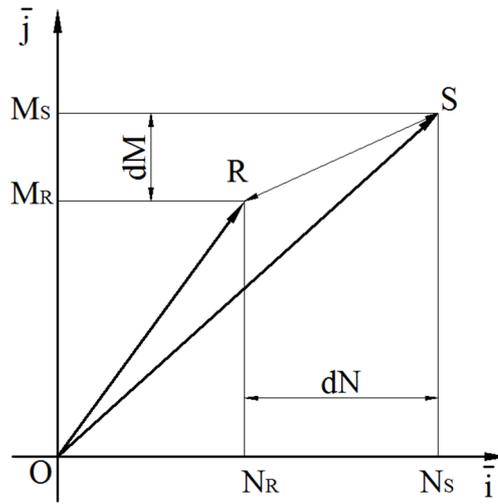


Figura 4-8 - Representação gráfica do Método de Newton-Raphson com duas variáveis.

Notação vetorial do método de Newton-Raphson de acordo com a Figura 4-8:

$$O\bar{S} = (N_S, M_S) \quad (4.28)$$

$$O\bar{R} = (N_R, M_R) \quad (4.29)$$

$$R\bar{S} = O\bar{S} - O\bar{R} \quad (4.30)$$

$$|R\bar{S}| = \sqrt{dN^2 + dM^2} \quad (4.31)$$

$$|O\bar{S}| = \sqrt{N_S^2 + M_S^2} \quad (4.32)$$

$$RDM = \frac{|R\bar{S}|}{|O\bar{S}|} \quad (4.33)$$

A cada iteração o parâmetro de controle utilizado é a razão distância-módulo (RDM), onde o resultado é considerado satisfatório quando a RDM é menor ou igual à tolerância matemática desejada.

#### 4.2.2. Determinação não-linear da configuração deformada

Admite-se que as tensões no concreto  $\sigma_C(\varepsilon_i)$  e no aço  $\sigma_S(\varepsilon_i)$  são determinadas a partir das relações constitutivas não-lineares de cada material como apresentado no item 4.1.3. Assim temos:

$$\sigma_C(\varepsilon_i) = \sigma_C(\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) \quad (4.34)$$

$$\sigma_S(\varepsilon_i) = \sigma_S(\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) \quad (4.35)$$

Considerando a discretização da seção transversal, como apresentado no item 4.1.2, temos as expressões para a determinação dos esforços resistentes ( $N_R, M_R$ ), conforme as equações (4.14) e (4.15), transformando a integração de tensões ao longo da seção transversal em um somatório de pequenas parcelas.

$$N_R = \sum_{i=1}^n \sigma_C(\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_S(\varepsilon_i) - \sigma_C(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \quad (4.36)$$

$$M_R = \sum_{i=1}^n \sigma_C(\varepsilon_i) \cdot (z_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_S(\varepsilon_i) - \sigma_C(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot (z_i) \quad (4.37)$$

As equações do par de esforços resistentes ( $N_R, M_R$ ) podem ser escritas em função da relação constitutiva dos materiais aplicando-se as equações (4.34) e (4.35) nas equações (4.36) e (4.37). Desta forma:

$$N_R = \sum_{i=1}^n \sigma_C \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_S \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) - \sigma_C \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i)] \cdot A_{si} \quad (4.38)$$

$$M_R = \sum_{i=1}^n \sigma_C \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) \cdot (z_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_S \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i) - \sigma_C \cdot (\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i)] \cdot (z_i) \cdot A_{si} \quad (4.39)$$

No processo iterativo utilizam-se parcelas diferenciais  $d\varepsilon_0$  e  $d\kappa_0$  denominadas incrementos controlados.

Sendo  $N_R$  e  $M_R$  funções de duas variáveis  $(\varepsilon_0, \kappa_0)$ , as parcelas diferenciais  $dN$  e  $dM$  são dadas por:

$$dN = \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} d\kappa_0 \quad (4.40)$$

$$dM = \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} d\kappa_0 \quad (4.41)$$

A diferenciação de  $N_R$  e  $M_R$  como funções de duas variáveis  $(\varepsilon_0, \kappa_0)$ , depende exclusivamente da diferenciação das tensões  $\sigma(\varepsilon_i)$  em relação a estas variáveis. Assim:

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_0} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_0} = E(\varepsilon_i) \cdot 1 \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \kappa_0} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i} \cdot \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \kappa_0} = E(\varepsilon_i) \cdot z_i \quad (4.43)$$

E portanto, as derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} = \sum_{i=1}^n E_C \cdot (\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [E_S \cdot (\varepsilon_i) - E_C \cdot (\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} = \sum_{i=1}^n E_C \cdot (\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot z_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [E_S \cdot (\varepsilon_i) - E_C \cdot (\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot z_i \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} = \sum_{i=1}^n E_C \cdot (\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot z_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [E_S \cdot (\varepsilon_i) - E_C \cdot (\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot z_i \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} = \sum_{i=1}^n E_C \cdot (\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot z_i^2 \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [E_S \cdot (\varepsilon_i) - E_C \cdot (\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot z_i^2 \quad (4.47)$$

Escrevendo as equações (4.40) e (4.41) em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} dN \\ dM \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} \\ \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_0 \\ d\kappa_0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Desta forma, os incrementos controlados  $(d\varepsilon_0, d\kappa_0)$  podem ser expressos por:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_0 \\ d\kappa_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} \\ \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} dN \\ dM \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Expandindo a matriz das derivadas parciais inversa:

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_0 \\ d\kappa_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} & -\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} \\ -\frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\left( \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} - \frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0} \cdot \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} \right)} \cdot \begin{bmatrix} dN \\ dM \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Desta forma os incrementos controlados calculados  $(d\varepsilon_0, d\kappa_0)$  serão somados à deformação plana da seção  $(\varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i)$ . Este processo deve se repetir até que a razão distancia-módulo (RDM) tenha o resultado considerado como satisfatório.

O fluxograma da Figura 4-9 apresenta o processo para a determinação da configuração deformada, da seção transversal de uma peça de concreto armado, submetida à flexão composta, considerando a não-linearidade física dos materiais.

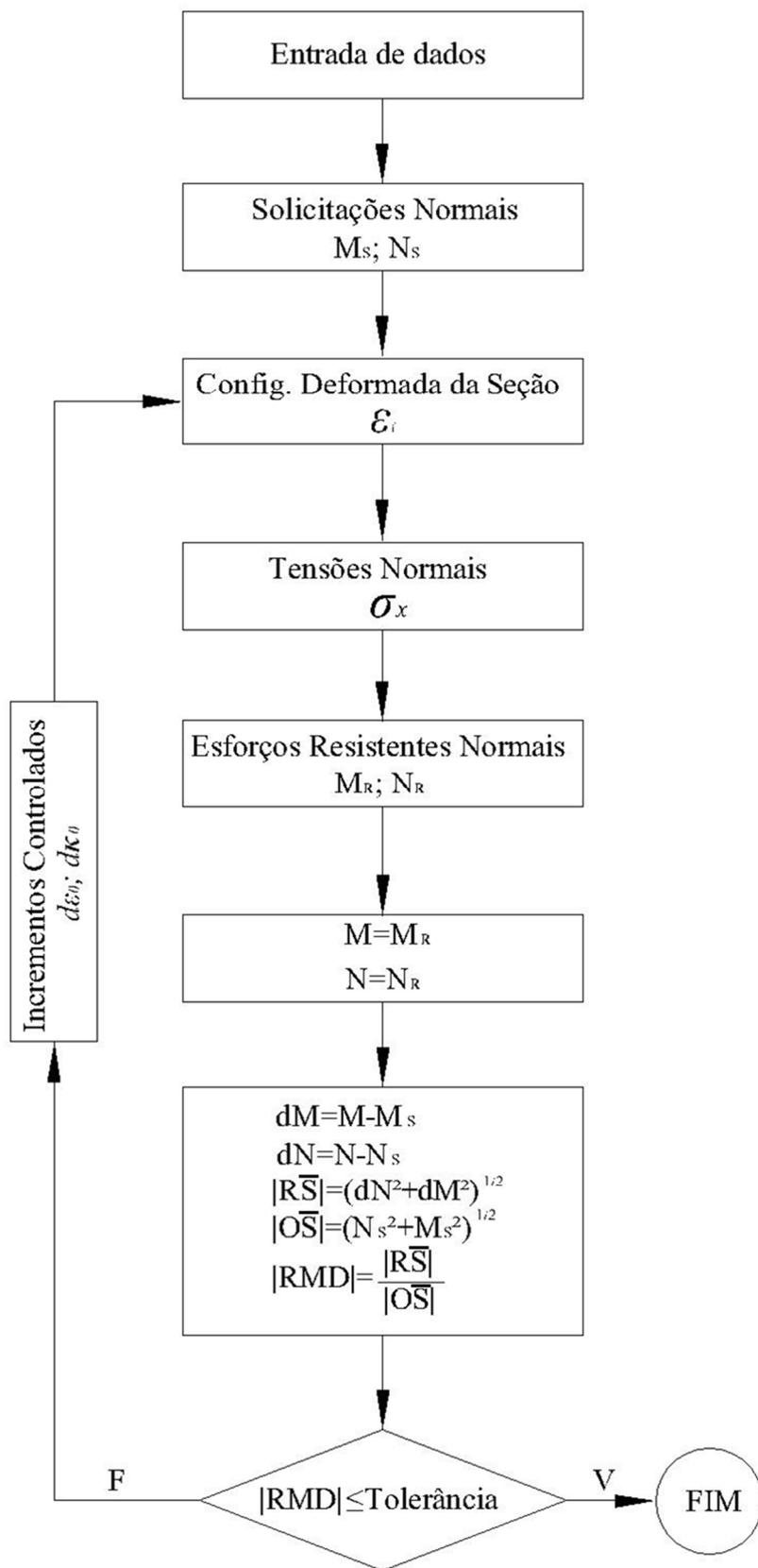


Figura 4-9 – Fluxograma para flexão composta.

### 4.3. Método da Seção Equivalente.

O método utilizado aqui, conforme já apresentado por DIAZ [11] e desenvolvido por SHULZ [12] e CUNHA [13], trata-se de uma adaptação do modelo de painel fissurado às regras usuais de dimensionamento à flexão, sendo uma maneira prática de se obter o fluxo de cisalhamento ao longo da altura da seção.

Esta teoria não considera a compatibilidade de deformações, como foi desenvolvido na Teoria do Campo de Compressão apresentada no item 0. O procedimento é dirigido para cálculos práticos de dimensionamento de peças usuais de concreto armado.

Serão adotadas as seguintes hipóteses:

- A seção transversal do concreto deve ser constante ao longo da viga.
- A seção transversal deve apresentar simetria em relação ao eixo  $Z$ .
- Para simplificar os cálculos, os estribos devem ser verticais, isto é, sempre paralelos ao eixo  $Z$ .
- A armadura longitudinal pode variar ao longo da peça e sua distribuição ao longo da altura é considerada discreta.
- O trecho analisado deve estar fora da zona de introdução de forças concentradas.
- As solicitações de forças normais e cortantes devem ser constantes ao longo do comprimento do trecho estudado. Essa restrição não limita o uso de casos usuais, apenas foi feita para que sejam obtidas expressões analíticas mais simples.
- Não são admitidos deslocamentos entre as barras de armaduras e o concreto que as envolve.
- Não são consideradas a resistência do concreto a tração e mecanismos resistentes complementares  $V_C$ .

Com a hipótese de viga com seção plana (Viga de Navier-Bernoulli) se obtém uma relação satisfatória entre tensões e deformações, quando a seção transversal é submetida apenas a solicitações normais. No entanto, quando as forças tangenciais são aplicadas, esta hipótese deixa de ser válida, devido ao aparecimento de distorções na seção transversal. A real distribuição de tensões e deformações tangenciais na seção

transversal é complexa e depende da distribuição das fissuras na seção e da distribuição das armaduras.

A presença de esforço cortante em uma viga gera a variação dos momentos fletores ao longo do seu eixo. Devido a este aumento de flexão, em um trecho longitudinal de uma viga, sua seção transversal é submetida a um incremento de esforços axiais, que variam de acordo com sua altura e são equilibrados por tensões transversais, conforme a Figura 4-10.

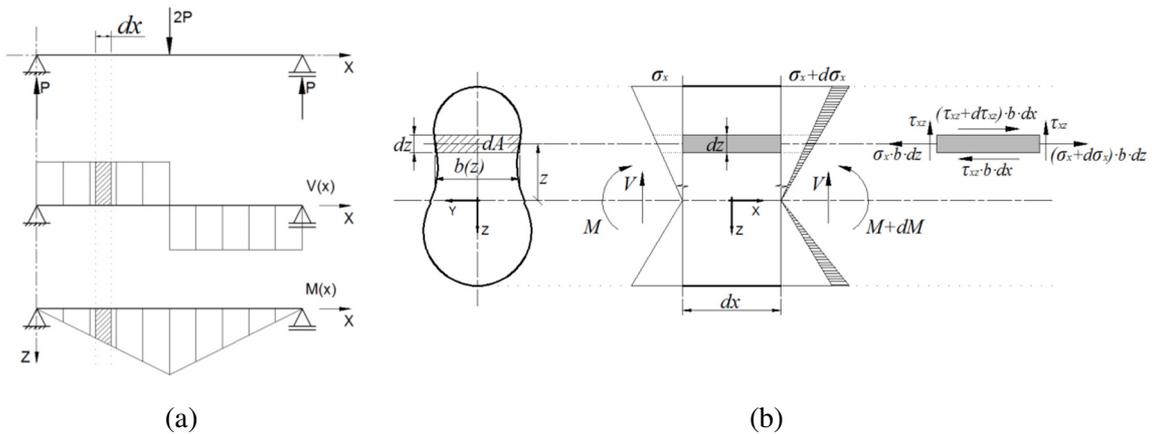


Figura 4-10 - Plano de tensões de cisalhamento em uma viga: (a) esforços em uma viga; (b) equilíbrio de tensões em uma fibra.

A equação de equilíbrio das tensões nas fibras é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.51)$$

A tensão de cisalhamento em qualquer ponto da seção  $\tau_{xz}(z)$  pode ser escrita como:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{1}{b_w} \cdot \int_0^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot b_w \cdot dz \quad (4.52)$$

No caso de material isotrópico elástico, a solução para a equação anterior é simples e bem conhecida:

$$\tau_{xz}(z) = \frac{1}{b_w} \cdot \int_0^z \frac{V \cdot b_w \cdot z}{I} \cdot dz = \frac{V \cdot S(z)}{I \cdot b_w} \quad (4.53)$$

Sendo :

- $S(z)$  - Momento estático dos elementos de área equivalentes integrados em relação ao centro de gravidade da seção equivalente.
- $I$  - Momento de inércia da seção equivalente.
- $bw$  - Largura da alma da viga.

As áreas equivalentes nada mais são do que o somatório das forças resistentes dos materiais de uma viga em resposta a uma deformação imposta ao longo da altura da peça. Sua representação gráfica em forma de áreas torna sua utilização mais didática e ajuda a incorporar conceitos da Mecânica Clássica, como centro de gravidade, momento de inércia e momento estático.

O conceito de seção equivalente é definido como sendo a seção obtida pelo somatório da multiplicação das áreas das fibras das seções de concreto  $b(z) \cdot dz$  pelo módulo de deformação longitudinal do concreto  $E_c(\epsilon_x)$  e o somatório da multiplicação das áreas de aço  $A_{Si}$  por  $[E_s(\epsilon_x) - E_c(\epsilon_x)]$ , sendo  $E_s(\epsilon_x)$  o módulo de deformação longitudinal do aço.

A Figura 4-11 apresenta o esquema representativo deste cálculo, para uma deformação longitudinal com a linha neutra dentro da seção; o concreto não resiste à tração e sua tensão máxima ocorre à  $\epsilon_i = -2,0\text{‰}$ ; a deformação no aço não é suficiente para atingir o escoamento. A configuração da deformada longitudinal da seção é  $\epsilon_i = (\epsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i)$ , conforme a equação (4.13).

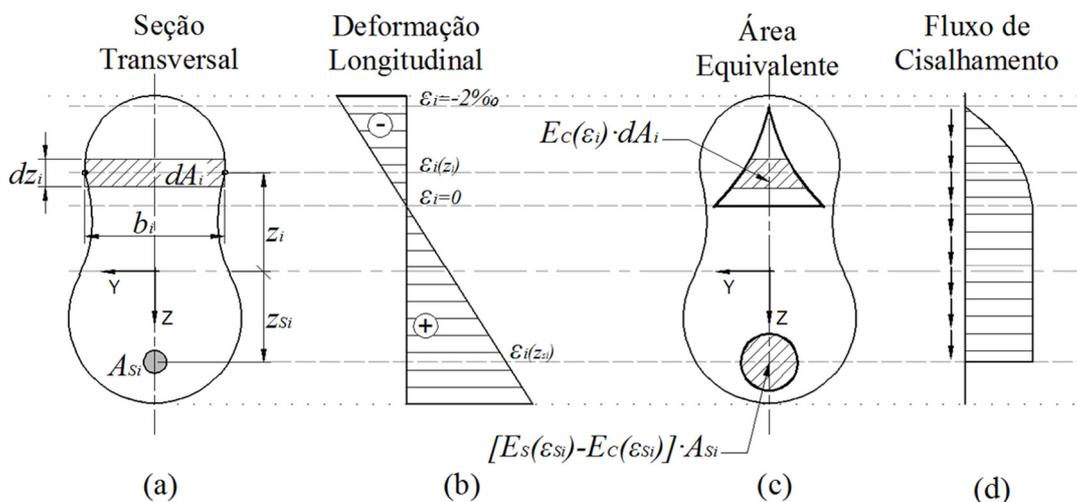


Figura 4-11 - Determinação do Fluxo de Cisalhamento pelo Método da Área Equivalente.

A principal simplificação introduzida corresponde a admitir que as tensões tangenciais  $\tau_{xz}$  obtidas através das expressões (4.51) a (4.53), a partir das componentes horizontais das tensões de compressão  $\sigma_x$ , podem ser aproximadas por uma distribuição de tensões  $\sigma_{xn}$ , expressa de acordo com as regras usuais de dimensionamento à flexão, conforme a Figura 4-12. Assim, a expressão (4.51), é substituída pela equação (4.54):

$$\frac{\partial \sigma_{xn}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.54)$$

Então, de acordo com a Figura 4-12, pode-se introduzir o conceito de tensões longitudinais complementares  $\sigma_{xt}$ , devidas ao esforço cortante  $V$  solicitante na seção, que em conjunto com as tensões longitudinais de flexão  $\sigma_{xn}$ , obtidas através dos esforços solicitantes  $N$  e  $M$  incrementados por  $\bar{N}$  e  $\bar{M}$  (ver Figura 4-11), reproduzem a distribuição de tensões longitudinais  $\sigma_x$ , correspondentes aos esforços solicitantes  $N$  e  $M$ .

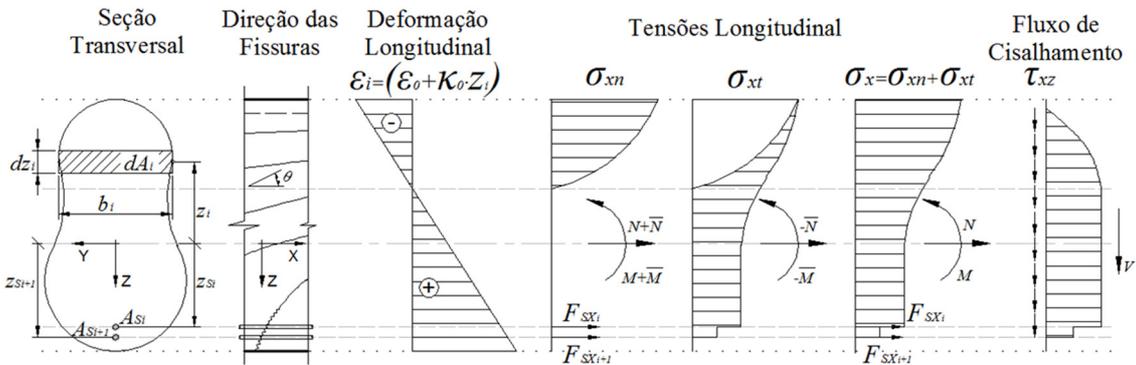


Figura 4-12– Tensões decorrentes de força normal, momento fletor e força cortante atuantes em vigas de concreto armado.

Assim:

$$\sigma_x = \sigma_{xn} + \sigma_{xt} \quad (4.55)$$

O fato dos esforços de tração no concreto ser totalmente desprezados ( $\sigma_1 = 0$ ), e a compatibilidade das deformações não ser considerada como na Teoria do Campo de Compressão Modificada (item 0), simplifica bastante as condições de equilíbrio e as equações constitutivas do método, facilitando o seu manuseio prático.

A Figura 4-13 apresenta círculo de Mohr para as tensões no concreto fissurado, que não resiste a esforços de tração.

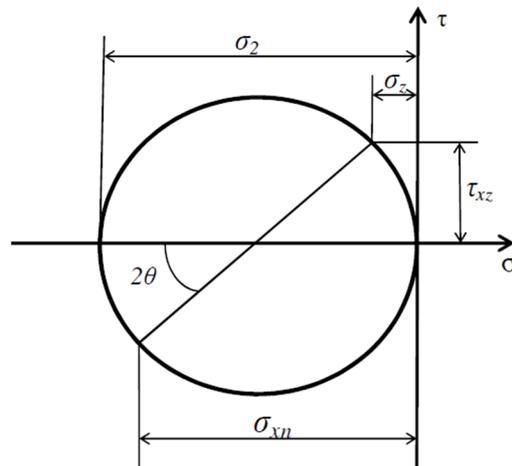


Figura 4-13 - Círculo de Mohr das tensões no concreto fissurado que não resiste aos esforços de tração.

Conhecidas as tensões longitudinais de flexão  $\sigma_{xn}$  e as tensões tangenciais  $\tau_{xz}$ , obtemos o ângulo  $\theta$ , que corresponderia à inclinação das fissuras se elas se orientassem de acordo com a direção das tensões principais de compressão  $\sigma_2$ . Assim, obtemos o ângulo  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \text{tg}^{-1} \left( -\frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_{xn}} \right) \quad (4.56)$$

Conhecido o ângulo  $\theta$  e as tensões tangenciais  $\tau_{xz}$ , por equilíbrio de tensões em cada nível, obtemos as tensões na direção vertical  $\sigma_z$ , as tensões longitudinais  $\sigma_x$  e as tensões na direção da biela comprimida  $\sigma_2$ .

$$\sigma_x = -\frac{\tau_{xz}}{\text{tg} \theta} \quad (4.57)$$

Aplicando a equação (4.57) à equação (4.55), obtemos os valores das tensões longitudinais complementares  $\sigma_{xt}$ :

$$\sigma_{xt} = -\sigma_{xn} + \frac{\tau_{xz}}{\operatorname{tg} \theta} \quad (4.58)$$

Como já mostrado, para o dimensionamento das armaduras longitudinais da seção solicitada pelos esforços  $N$ ,  $M$  e  $V$ , a armadura instalada também deve resistir ao incremento de esforços  $\bar{N}$  e  $\bar{M}$ . Isto significa que o dimensionamento no sentido longitudinal pode ser feito pelo par de esforços  $N_R$  e  $M_R$ , definidos da seguinte forma:

$$N_R = N + \bar{N} \quad (4.59)$$

$$M_R = M + \bar{M} \quad (4.60)$$

Admite-se que a relação tensão-deformação do concreto à compressão  $\sigma_c(\varepsilon_c)$  possa ser utilizada para o cálculo de  $\sigma_{xn}$ , a partir da deformação longitudinal  $\varepsilon_i$ , ou seja:

$$\sigma_{xn} = \sigma_c(\varepsilon_i) \quad (4.61)$$

As equações globais de equilíbrio passam a ser:

$$N_R = N + \bar{N} = \sum_{i=1}^n \sigma_{xn}(\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_s(\varepsilon_i) - \sigma_{xn}(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \quad (4.62)$$

$$M_R = M + \bar{M} = \sum_{i=1}^n \sigma_{xn}(\varepsilon_i) \cdot (z_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_s(\varepsilon_i) - \sigma_{xn}(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot (z_i) \quad (4.63)$$

É importante lembrar que no caso de vigas tipo "I" ou "T", a porção do flange que não resiste ao esforço cortante é desprezada para o cálculo do fluxo cisalhante  $\tau_{xz}$ , sendo somente a largura constante da alma, fixada como  $b_w$ , considerada ao longo da altura. Para o cálculo dos esforços resistentes devidos a solicitações normais, é considerada a seção completa como seção resistente, conforme apresentado na Figura 4-14.

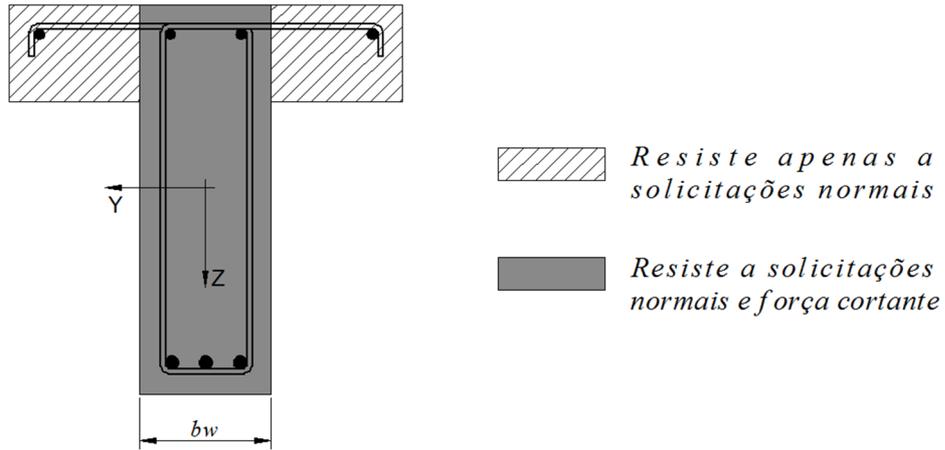


Figura 4-14 - Seção resistente a solicitações normais e à força cortante.

A Figura 4-15, adaptada do trabalho desenvolvido por FERREIRA [16], mostra o equilíbrio das tensões longitudinais, na região não resistente ao cisalhamento, (a), e o equilíbrio das tensões longitudinais, transversais e verticais com a força na armadura transversal, na região resistente ao cisalhamento, (b).

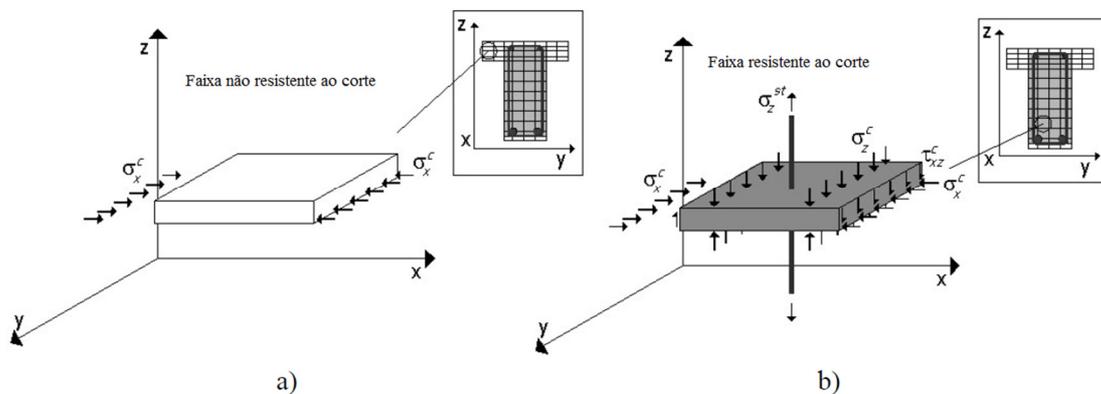


Figura 4-15 - Esforço cortante aplicado nas faixas, [16].

É conveniente para o cálculo do fluxo cisalhante  $\tau_{xz}$ , que o processo seja realizado em relação ao centro de gravidade da área equivalente, distante  $z_{cg}$  do topo da seção. As derivadas parciais da força normal resistente,  $\frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0}$  e  $\frac{\partial N_R}{\partial \kappa_0}$ , são calculadas para a largura fixa da alma,  $b_w$ . Então, a distância  $z_{cg}$  pode ser obtida da seguinte forma:

$$z_{cg} = \sum \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} / \sum \frac{\partial N_R}{\partial \varepsilon_0} \quad (4.64)$$

Com as derivadas parciais dos momentos resistentes,  $\frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0}$  e  $\frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0}$ , calculadas em relação ao centro de gravidade  $z_{cg}$  e da largura fixa da alma  $b_w$ , serão obtidos o momento estático dos elementos de área equivalentes  $S(z_i)$  e o momento de inércia da seção equivalente  $I$ , da seguinte maneira:

$$I = \sum \frac{\partial M_R}{\partial \kappa_0} \quad (4.65)$$

$$S(z_i) = \sum_1^i \frac{\partial M_R}{\partial \varepsilon_0} \quad (4.66)$$

Conhecidas as grandezas  $S(z_i)$  e  $I$ , o fluxo de cisalhamento  $\tau_{xz}(z_i)$  é calculado em cada ponto da altura da peça  $z_i$ , aplicando as equações (4.65) e (4.66) na equação (4.53).

As tensões longitudinais  $\sigma_x(\varepsilon_i)$  são encontradas a partir da equação (4.57) e os esforços  $N$ ,  $M$  e  $V$  são obtidos através das seguintes equações:

$$N = \sum_{i=1}^n \sigma_x(\varepsilon_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_s(\varepsilon_i) - \sigma_x(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \quad (4.67)$$

$$M = \sum_{i=1}^n \sigma_x(\varepsilon_i) \cdot (z_i) \cdot b_i \cdot dz_i + \sum_{i=1}^{nb} [\sigma_s(\varepsilon_i) - \sigma_x(\varepsilon_i)] \cdot A_{si} \cdot (z_i) \quad (4.68)$$

$$V = \sum_{i=1}^n \tau_{xzi} \cdot b_w \cdot dz_i \quad (4.69)$$

As diferenças entre esforços solicitantes e resistentes  $(dN, dM)$ , são feitas em função do conjunto  $(N, M)$ , da seguinte maneira:

$$dN = N_s - N \quad (4.70)$$

$$dM = M_s - M \quad (4.71)$$

Substituindo-se as equações (4.70) e (4.71), juntamente com as derivadas parciais, equações (4.44) a (4.47), calculadas em relação ao centro de gravidade  $z_{cg}$  e da largura variável da alma,  $b_i$ , na equação (4.49), os incrementos controlados de deformação longitudinal da próxima iteração  $(d\epsilon_0, d\kappa_0)$  são encontrados.

A cada iteração, os incrementos controlados de deformação longitudinal  $(d\epsilon_0, d\kappa_0)$ , serão somados à configuração deformada plana inicial da seção  $(\epsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i)$ . Este processo deve se repetir até que a razão distância-módulo (RDM) seja inferior à tolerância matemática considerada satisfatória.

Partindo das hipóteses de que não são admitidos deslocamentos entre as barras de armaduras e o concreto que as envolve e que o esforço cortante deva ser constante ao longo do comprimento do trecho estudado, podemos dizer que a força nas armaduras verticais é dada pela seguinte equação:

$$\rho_{SW} \cdot \sigma_{SW} = -\sigma_z \quad (4.72)$$

onde:

$$\sigma_z = -\tau_{xz} \cdot tg\theta \quad (4.73)$$

$$\rho_{SW} = \frac{A_{SW}}{b_w \cdot s} \quad (4.74)$$

A tensão nas armaduras dos estribos  $\sigma_{SW}$  devem ser inferiores ao valor da tensão de projeto de escoamento do aço utilizado,  $f_{yd}$ .

As tensões de compressão na biela podem ser determinadas com a seguinte equação:

$$\sigma_2 = -\tau_{xz} \cdot \left( tg\theta + \frac{1}{tg\theta} \right) \quad (4.75)$$

Para ângulos entre  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ , o valor da tensão de compressão na biela deve ser inferior a  $f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd}$ . Para ângulos  $\theta < 30^\circ$ , admite-se que a tensão de compressão na biela deva ser inferior a  $0,85 f_{cd}$ .

O fluxograma da Figura 4-16 apresenta o processo para a determinação da configuração deformada, da seção transversal de uma peça de concreto armado, submetida à flexão composta e força cortante, pelo método da seção equivalente.

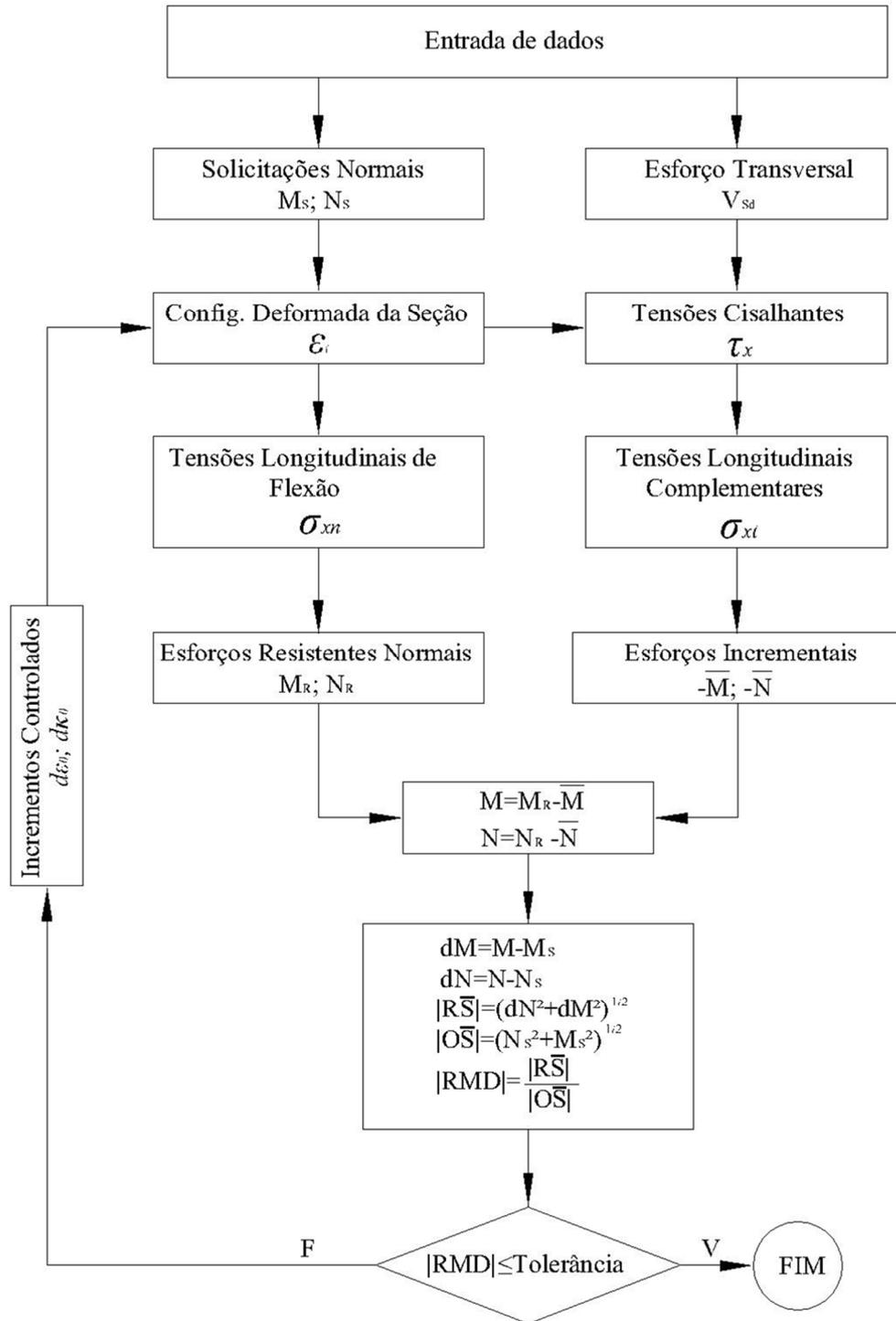


Figura 4-16 – Fluxograma para o método da seção equivalente.

#### 4.4. Abordagem Geral do Programa FNL-CORTE

Os fundamentos teóricos apresentados até aqui foram utilizados para a elaboração do programa FNL-CORTE, que automatiza as verificações em vigas de concreto armado pelo método da seção equivalente, através de um processo iterativo de flexão-composta, não-linear, considerando o acoplamento do esforço cortante.

As figuras deste item tem a função apenas de ilustrar a apresentação do programa. Complementando, no item 5.3 é apresentado um exemplo completo de dimensionamento.

##### 4.4.1. *Dados Geométricos*

O programa não admite variação de seção ao longo do seu comprimento. As seções aceitas devem ter geometria retangular ou composta por faixas retangulares ao longo de sua altura, simétricas em relação ao eixo  $z$ .

A seção é composta por vinte elementos de faixas discretas, com largura  $b_i$  e altura  $dz_i$ , onde a única restrição é que o somatório das alturas dos elementos seja igual à altura total da seção. É necessário que a largura da seção resistente ao cisalhamento,  $b_w$ , também seja definida para o cálculo das tensões cisalhantes.

As armaduras longitudinais têm dezenove posições possíveis de distribuição de suas camadas, sendo o seu posicionamento, ao longo da altura, em relação ao centro de gravidade das barras. É considerado que as barras longitudinais discretas têm comprimento suficiente, além da posição da seção analisada, para garantir a sua ancoragem.

As armaduras transversais devem ter distribuição uniforme ao longo do trecho longitudinal analisado e da altura da seção. Não é admitida a inclinação da armadura transversal em valores diferentes de  $\alpha = 90^\circ$ . O programa considera que as armaduras transversais estão presentes ao longo de toda a altura da seção, caso contrário não seria possível chegar ao equilíbrio das forças verticais, uma vez que o concreto não resiste à tração. Os erros causados devido a essa aproximação são minimizados pela tensão cisalhante quase nula nas extremidades.

São apresentadas a seguir as tabelas dos dados de entrada do programa FNL-CORTE. Apenas as células marcadas de azul precisam ser preenchidas. As demais células são calculadas automaticamente.

Os dados apresentados na sequência serão utilizados no item 5.3, onde será analisado o “Exemplo 3”.

A Tabela 4-1 insere no programa os dados de entrada da seção de concreto. Onde:

$z_{sup}$  e  $z_{inf}$  - são as posições superiores e inferiores das faixas discretas da seção de concreto, em relação ao topo da seção.

$b_i$  - largura da faixa “ $i$ ”, resistente as solicitações normais.

Tabela 4-1 - Dados da Seção de Concreto.

GEOMETRIA DO CONCRETO								
ELEM.	$z_{sup}$	$z_{inf}$	$zm_i$	$b_i$	$dz$	$\Delta Ac$	$zm_i \cdot \Delta Ac$	$I_{cg}$
CONC.	m	m	m	m	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	m <sup>4</sup>
1	0.000	0.030	0.015	1.35	0.0300	0.041	6.1E-04	4.9E-03
2	0.030	0.060	0.045	1.35	0.0300	0.041	1.8E-03	4.1E-03
3	0.060	0.090	0.075	1.35	0.0300	0.041	3.0E-03	3.4E-03
4	0.090	0.120	0.105	1.35	0.0300	0.041	4.3E-03	2.7E-03
5	0.120	0.181	0.151	0.20	0.0613	0.012	1.8E-03	5.6E-04
6	0.181	0.243	0.212	0.20	0.0613	0.012	2.6E-03	2.9E-04
7	0.243	0.304	0.273	0.20	0.0613	0.012	3.3E-03	1.1E-04
8	0.304	0.365	0.334	0.20	0.0613	0.012	4.1E-03	1.5E-05
9	0.365	0.426	0.396	0.20	0.0613	0.012	4.8E-03	1.6E-05
10	0.426	0.488	0.457	0.20	0.0613	0.012	5.6E-03	1.1E-04
11	0.488	0.549	0.518	0.20	0.0613	0.012	6.3E-03	2.9E-04
12	0.549	0.610	0.579	0.20	0.0613	0.012	7.1E-03	5.7E-04
13	0.610	0.671	0.641	0.20	0.0613	0.012	7.8E-03	9.4E-04
14	0.671	0.733	0.702	0.20	0.0613	0.012	8.6E-03	1.4E-03
15	0.733	0.794	0.763	0.20	0.0613	0.012	9.3E-03	2.0E-03
16	0.794	0.855	0.824	0.20	0.0613	0.012	1.0E-02	2.6E-03
17	0.855	0.916	0.886	0.20	0.0613	0.012	1.1E-02	3.3E-03
18	0.916	0.978	0.947	0.20	0.0613	0.012	1.2E-02	4.2E-03
19	0.978	1.039	1.008	0.20	0.0613	0.012	1.2E-02	5.1E-03
20	1.039	1.100	1.069	0.20	0.0613	0.012	1.3E-02	6.1E-03

A Tabela 4-2 insere no programa os dados de entrada da distribuição da armadura longitudinal. Onde:

$z_{s_i}$  - é a posição discreta da camada de armadura longitudinal  $i$ , em relação ao topo da seção.

$\phi$  - é o diâmetro das barras da camada de armadura longitudinal.

QUANT. - é quantidade de barras na camada de armadura longitudinal.

Tabela 4-2 – Distribuição da Armadura Longitudinal.

DISTRIBUIÇÃO AsL						
ELEM.	$z_{s_i}$	$\Delta A_s$	$z_{s_i} \cdot \Delta A_s$	$I_{cg}$	$\phi$	QUANT.
AÇO	m	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>	m <sup>4</sup>	mm	UNIT.
1	0.05	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
2	0.11	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
3	0.16	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
4	0.21	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
5	0.26	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
6	0.32	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
7	0.37	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
8	0.42	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
9	0.47	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
10	0.53	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
11	0.58	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
12	0.63	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
13	0.68	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
14	0.74	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
15	0.79	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
16	0.84	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
17	0.89	0.00E+00	0.0E+00	0.00E+00		
18	0.95	6.28E-04	5.9E-04	7.85E+03	20.0	2
19	1.00	9.42E-04	9.4E-04	7.85E+03	20.0	3

A Figura 4-17 apresenta graficamente o formato gerado pelos dados de entrada da seção de concreto, a partir da Tabela 4-1, e a distribuição da armadura longitudinal, conforme a Tabela 4-2.

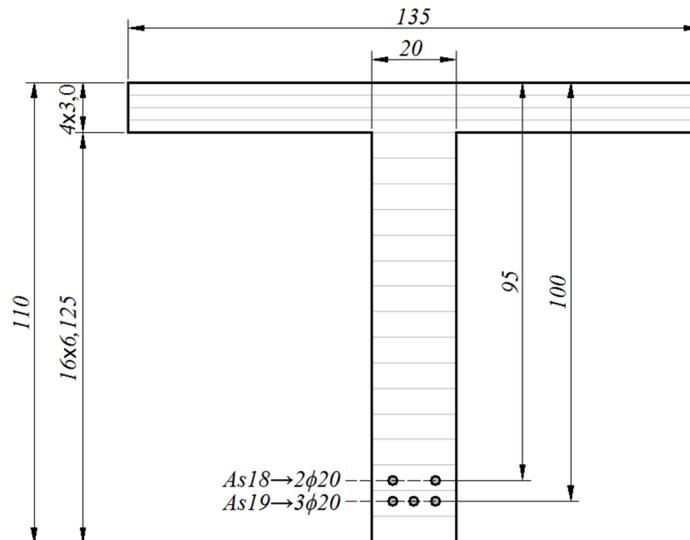


Figura 4-17 - Seção transversal de concreto e distribuição da armadura longitudinal, FNL-CORTE.

#### 4.4.2. Dados Constitutivos

São utilizados os diagramas tensão-deformação idealizados, apresentados na NBR 6118:2014 [1], para o dimensionamento no estado-limite último.

Nos dados de entrada para o concreto temos:

- resistência característica do concreto,  $f_{ck}$  ou  $f_{cj}$ ;
- coeficiente de ponderação de resistência do concreto,  $\gamma_c$ ;
- parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão,  $\alpha_c$ , ver item 17.2.2e [1];
- as deformações específicas de encurtamento no início do patamar plástico e de ruptura,  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$ .

Nos dados de entrada para o aço das armaduras longitudinais, temos:

- a resistência característica do aço ao escoamento,  $f_{yk}$ ;
- o coeficiente de ponderação de resistência do aço,  $\gamma_s$ ;
- o módulo de elasticidade,  $E_s$ ;
- a deformação específica de alongamento máximo,  $\epsilon_{yk,máx}$ .

A Tabela 4-3 insere no programa as características pertinentes ao concreto e ao aço.

Tabela 4-3 – Características Pertinentes ao Concreto e ao Aço,.

SECÃO DE CONCRETO			AÇO LONGITUDINAL		
$f_{ck}$	30	MPa	$f_{yk}$	500	MPa
$\gamma_c$	1.4		$\gamma_s$	1.15	
$\alpha_c$	0.85		$E_s$	210	GPa
$E_{ci}$	30672.5	MPa	$\epsilon_{sy,máx}$	0.01000	m/m
$\epsilon_{c2}$	-0.0020	m/m	$\epsilon_{svk}$	0.00207	m/m
$\epsilon_{cu}$	-0.0035	m/m	$\rho_{mín.}$	0.437	%
$b_w$	0.2	m	$A_{s_{mín}}$	9.61E-04	cm <sup>2</sup>
$h$	1.10	m			
$d$	1.02	m			
$A_c$	0.358	m <sup>2</sup>			
$CG$	0.36	m			
$I_0$	0.043	m <sup>4</sup>			

Além de características referentes aos materiais, deve ser fornecida também:

$b_w$  - largura da alma da seção de concreto resistente a tensões cisalhantes.

#### 4.4.3. Carregamentos

O programa trabalha com o trio de solicitações de projeto, Força Normal, Momento Fletor e Força Cortante ( $N_{sd}$ ,  $M_{sd}$ ,  $V_{sd}$ ), segundo a referência de orientação apresentada na Figura 4-18.

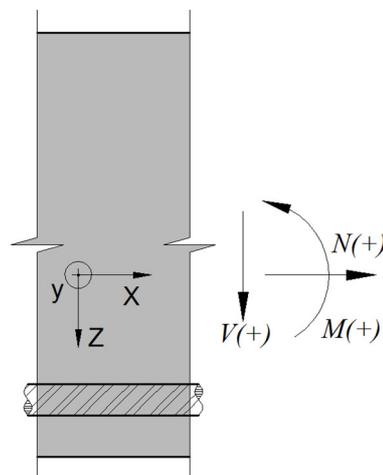


Figura 4-18 - Referência de orientação das solicitações, FNL-CORTE.

A Tabela 4-4 insere no programa os valores dos esforços solicitantes de cálculo.

Tabela 4-4 – Dados de Entrada dos Esforços de Cálculo.

ESFORÇOS DE CÁLCULO		
$N_{sd}$	0	kN
$M_{sd}$	588	kN.m
$V_{sd}$	146	kN

#### 4.4.4. *Análise*

Primeiramente é encontrado o equilíbrio do modelo de análise não-linear para flexão-composta, considerando que o material que constitui a seção tem deformação não-linear, através de um processo iterativo de Newton-Raphson, que converge em até três iterações.

Em seguida, com a configuração deformada obtida apenas para a flexão-composta,  $\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \kappa_0 \cdot z_i$ , é calculado o fluxo de tensões de cisalhamento ao longo da altura da seção,  $\tau_{xz}$ , e o acréscimo de tensões normais que por ele é causado,  $\sigma_{xt}$ .

Através do acréscimo de tensões normais,  $\sigma_{xt}$ , é obtido o acréscimo de força normal e momento fletor,  $\bar{N}$  e  $\bar{M}$ .

Um segundo processo iterativo é iniciado até que seja encontrada uma configuração deformada que resista às solicitações e seus acréscimos,  $N_R = N + \bar{N}$  e  $M_R = M + \bar{M}$ . Este processo se repete durante sete iterações pré-definidas.

O primeiro item a ser verificado é a condição de convergência do processo iterativo, feita pela razão distância-módulo |RDMI|, que deve ser um valor bastante pequeno, como apresentado na Tabela 4-5.

Tabela 4-5 - Controle Inicial dos Resultados.

CONTROLE DE RESULTADOS		
RDMI	4.39E-13	
$V_{Rd}$	147.9	kN
$V_{Rd}/V_{Sd}$	1.01	

Por motivos de simplificação do processo, conforme já mencionado, não é feita a compatibilização de deformações. Essa simplificação não permite que seja feito o equilíbrio de forças verticais. Desta forma um pequeno “erro” é notado no somatório das forças cortantes resistentes,  $V_{Rd}$ , em relação à força cortante solicitante  $V_{Sd}$ . Esse valor só se torna significativo quando a seção está na iminência de ruptura, quando então deve ser observado.

Caso esses dois fatores de verificação apresentem valores considerados como não aceitáveis, uma nova configuração geométrica e/ou de distribuição de armaduras deve ser estudada.

#### 4.4.5. Resultados

Os resultados são apresentados em forma de tabelas, com valores atribuídos a cada nível dos elementos discretos ao longo da altura.

Para a seção de concreto são apresentados resultados das deformações longitudinais  $\varepsilon_x$ , tensões longitudinais  $\sigma_{xm}$ ,  $\sigma_{xt}$  e  $\sigma_x$ , tensões cisalhantes  $\tau_{xz}$ , ângulo de inclinação das fissuras  $\theta$ , tensões verticais  $\sigma_t$ , tensões de compressão diagonais  $\sigma_2$ .

Para as armaduras longitudinais são apresentados resultados das deformações longitudinais  $\varepsilon_x$ , tensões longitudinais  $\sigma_{sx}$  e a força em cada nível da armadura existente  $F_{sx}$ .

A partir destes dados são criados gráficos que ajudam a visualizar a progressão do dimensionamento ao longo da altura da seção.

A análise das tabelas e gráficos dos resultados é apresentada no item 5.3.

## 5. EXEMPLOS

---

### 5.1. Exemplo 1

O exemplo a seguir compara os resultados do dimensionamento de uma viga de concreto armado, submetida a esforços de flexão e cisalhamento, por quatro métodos distintos:

- (NBR) - Dimensionamento simples da flexão e do cortante separadamente, considerando a correção da força na armadura principal devido ao cortante, conforme proposto pela NBR6118 [1].
- (TRELIÇA) - Dimensionamento pelo método de bielas e tirantes, utilizando um modelo de treliça, com ângulo de inclinação das bielas fixado em  $\theta = 45^\circ$ .
- (MSE) - Dimensionamento acoplado da flexão e do cortante, pelo método da seção equivalente.
- (RSP) - Dimensionamento pela teoria do campo de compressão, utilizando o programa RESPONSE-2000.

Propriedades da viga:

$$L = 8,00m; b = 0,20m; h = 1,20m; d' = 0,10m; d = 1,10m$$

Propriedades dos materiais:

$$\text{Concreto} = C25; \gamma_C = 1,40$$

$$\text{Aço} = CA 50; \gamma_S = 1,15$$

Coefficiente de ponderação das solicitações:

$$\gamma_f = 1,40$$

A Figura 5-1 apresenta o esquema longitudinal de carregamento e a distribuição das armaduras. É importante lembrar que neste exemplo, as armaduras longitudinais e transversais são consideradas constantes e o peso próprio da viga foi desconsiderado.

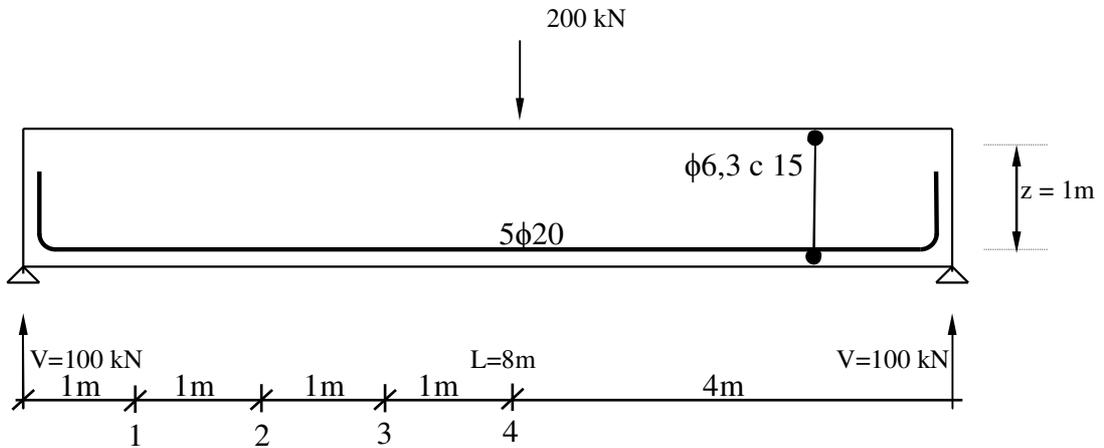


Figura 5-1 - Esquema longitudinal de carregamento e armaduras. [14]

#### 5.1.1. Dimensionamento da Flexão Simples e do Esforço Cortante (NBR)

Primeiramente é feito o dimensionamento da força necessária na armadura para obter o equilíbrio da seção solicitada apenas por esforços de flexão,  $F_{Sd}$ . Então é calculada a correção desta força para contabilizar a influência do esforço cortante,  $F_{Sd,cor}$ , conforme a equação (2.22), para  $\theta = 45^\circ$ .

Como a armadura longitudinal já está definida, a configuração deformada da seção transversal será estabelecida em função da deformação da armadura longitudinal  $\varepsilon_{Sd}$ , para a força  $F_{Sd,cor}$ .

A tensão na armadura transversal será definida através da equação (2.16), para  $\theta = 45^\circ$  e  $\alpha = 90^\circ$ .

A parcela  $V_C$  não está sendo levada em conta nestes cálculos, que tem apenas o objetivo de comparar resultados com os outros métodos.

### 5.1.2. Dimensionamento por bielas e tirantes (Treliça)

O dimensionamento pelo método de bielas e tirantes utiliza uma treliça com ângulo fixo em  $\theta = 45^\circ$  e o braço de alavanca  $z = 1,0\text{m}$  fixo referente à  $M_{d,Máx}$ , conforme já foi apresentado por SANTOS [14].

Para se encontrar o braço de alavanca  $z$  mínimo, ou seja, em função do momento fletor máximo, são calculados os coeficientes adimensionais  $\kappa_{Md}$ ,  $\kappa_x$  e  $\kappa_z$ :

$$\kappa_{Md} = \frac{M_d}{(b_w \cdot d^2 \cdot f_{ck} / \gamma_c)} = 0,130;$$

$$\kappa_x = \frac{1 - \left(1 - \frac{2 \cdot \kappa_{Md}}{0,85}\right)^{0,5}}{0,80} = 0,208;$$

$$\kappa_z = 1 - 0,4 \cdot \kappa_x = 0,916;$$

$$z = d \cdot \kappa_z = 1,00\text{m}$$

As forças na biela comprimida, no banzo comprimido, nos banzos horizontal e vertical tracionados, já obtidos com as equações (2.8) a (2.11) respectivamente, e seus valores avaliados, para esforços característicos, com  $\theta = 45^\circ$  e  $z = 1,0\text{m}$ .

O cálculo da força na armadura transversal, O método da treliça modificada considera a variação do braço de alavanca  $z$  em função do momento fletor  $M_d$  no local analisado.

A Figura 5-2 apresenta o equilíbrio de forças no modelo de treliça discreta para o método de bielas e tirantes.

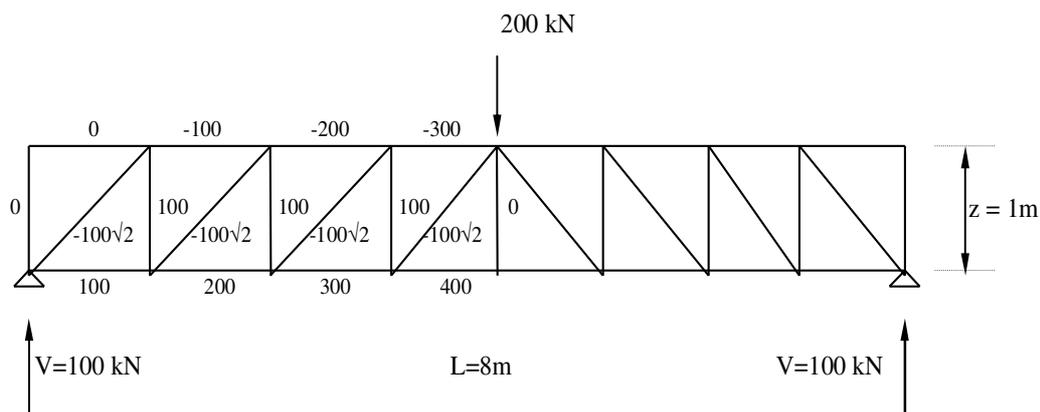


Figura 5-2 - Esquema de treliça discreta para o método de bielas e tirantes. [14]

### 5.1.3. Dimensionamento pelo Método da Seção Equivalente (MSE)

O dimensionamento foi realizado pelo programa FNL-CORTE, para uma seção transversal de concreto armado, subdividida em vinte faixas horizontais de concreto e uma posição discreta de camada de armadura, conforme apresentado no item 4.4.

O processo iterativo foi realizado para dez iterações pré-definidas, onde se obteve, para todos os casos calculados, o valor de  $|RDM| \leq 10^{-7}$ , considerado como satisfatório.

### 5.1.4. Dimensionamento pela Teoria de Campo de Compressão (RSP)

Foi utilizado o programa RESPONSE 2000, para concreto que não resiste à tração e nem a mecanismos complementares de resistência ao cortante, conforme apresentado no item 3.2.

### 5.1.5. Comparação de resultados

Foram analisadas quatro seções transversais, espaçadas a cada metro, a partir do apoio até a seção central. A seção central será utilizada para calcular os parâmetros apenas relação ao momento fletor máximo  $M_{sd,max}$  e não sofre influência do esforço cortante.

A Tabela 5-1 e a Figura 5-3 apresentam as deformações da seção no nível da armadura,  $\epsilon_{sd}$ , e as deformações no topo da seção,  $\epsilon_{cd}$ , para esforços de cálculo em cada uma das seções, calculadas por cada método distinto.

Tabela 5-1 – Deformações longitudinais, Exemplo 1.

x	.....NBR		-----Treliça		----- MSE		-----RSP	
	$\epsilon_s$	$\epsilon_{cd}$	$\epsilon_s$	$\epsilon_{cd}$	$\epsilon_s$	$\epsilon_{cd}$	$\epsilon_s$	$\epsilon_{cd}$
m	mm/m	mm/m	mm/m	mm/m	mm/m	mm/m	mm/m	mm/m
1	0.606	-0.031	0.637	-0.187	0.626	-0.203	0.725	-0.080
2	1.016	-0.112	1.062	-0.312	1.067	-0.487	1.140	-0.438
3	1.445	-0.259	1.486	-0.437	1.513	-0.781	1.569	-0.748
4	1.684	-0.442	1.699	-0.500	1.745	-1.076	1.786	-1.128

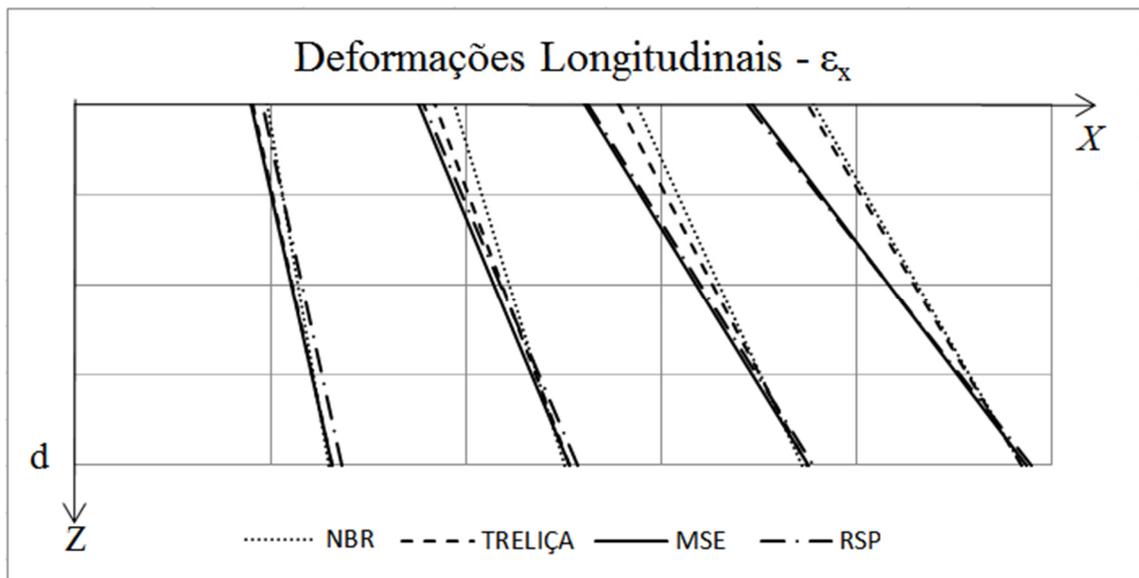


Figura 5-3 – Diagrama qualitativo de deformações longitudinais nas seções analisadas, Exemplo 1.

A Tabela 5-2 apresenta as deformações das armaduras longitudinais, calculadas pelos métodos (TRELIÇA), (MSE) e (RSP), nas seções S1 a S4, em razão dos valores valores calculados pelo método (NBR).

Tabela 5-2 - Deformação longitudinal na armadura inferior em razão dos valores de (NBR), Exemplo 1.

Seção	Treliça	MSE	RSP
S1	1.05	1.03	1.20
S2	1.04	1.05	1.12
S3	1.03	1.05	1.09
S4	1.01	1.04	1.06

Apesar das deformações longitudinais das armaduras terem valores semelhantes, em cada seção, a não-linearidade do material, considerada nos modelos de seção equivalente (MSE) e do campo de compressão (RSP), fornece maior curvatura,  $\kappa$ , em relação os modelos lineares, (NBR) e (Treliça). A Seção S4, sem a influência do cortante, tem valores muito próximos entre (MSE) e (RSP) e entre (NBR) e (Treliça).

A Tabela 5-3 e a Figura 5-4 apresentam as forças de tração na armadura longitudinal,  $F_{Sd}$ , para esforços de cálculo em cada uma das seções, calculadas por cada método distinto.

Tabela 5-3 – Força na Armadura Longitudinal, Exemplo 1.

x	...NBR	---Treliça	--- MSE	--- RSP
	$F_{Sd}$	$F_{Sd}$	$F_{Sd}$	$F_{Sd}$
m	kN	kN	kN	kN
1	200	210	207	240
2	335	350	352	376
3	477	490	499	518
4	555	560	576	589

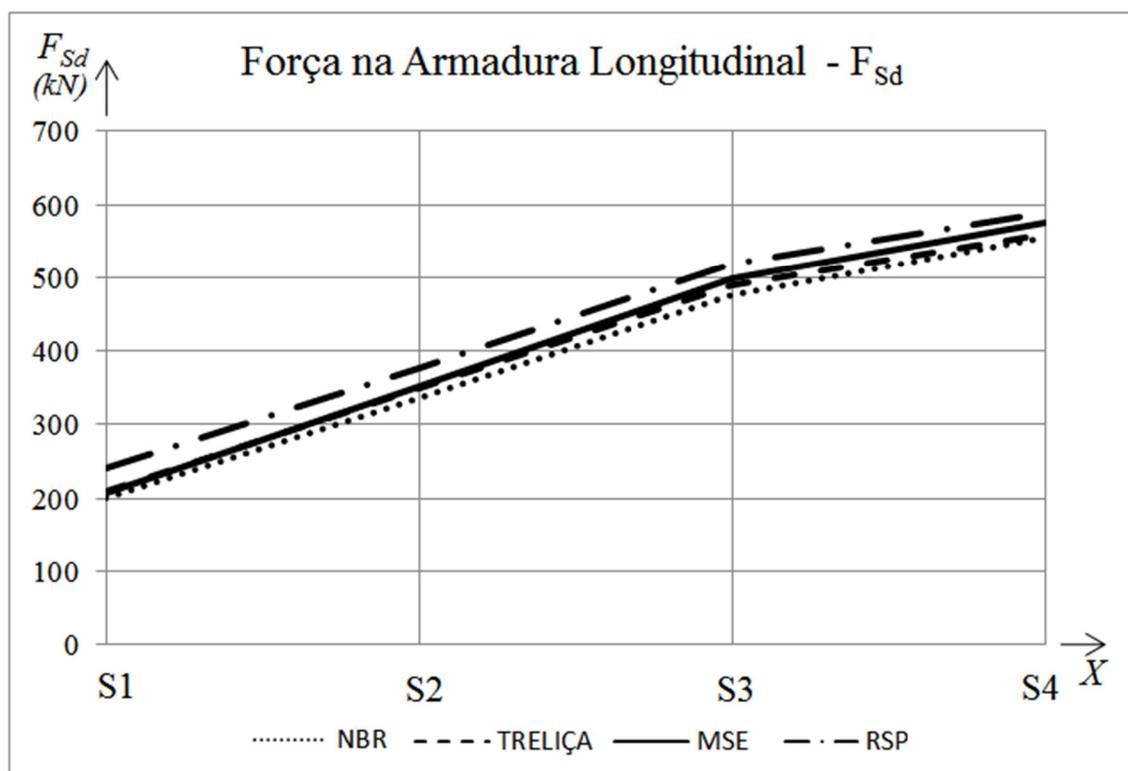


Figura 5-4 – Diagrama de Força na Armadura Longitudinal, Exemplo 1.

A Tabela 5-4 apresenta os valores das forças as armaduras longitudinais, calculadas pelos métodos (TRELIÇA), (MSE) e (RSP), nas seções S1 a S4, em razão dos valores valores calculados pelo método (NBR).

Tabela 5-4 – Força na Armadura Longitudinal em razão dos valores de (NBR), Exemplo 1.

Seção	Treliça	MSE	RSP
S1	1.05	1.03	1.20
S2	1.04	1.05	1.12
S3	1.03	1.05	1.09
S4	1.01	1.04	1.06

Seguindo a lógica apresentada na Tabela 5-1 e na Figura 5-3, onde as deformações nas armaduras são bastante parecidas, para cada seção analisada, a Tabela 5-3 e a Figura 5-4, apresentam valores de forças nas armaduras bastante próximos. A

Teoria de Campo de Compressão fornece os maiores resultados na região onde a força cortante é considerada no dimensionamento da armadura longitudinal.

A Tabela 5-5 e a Figura 5-5 apresentam as forças de tração na armadura transversal,  $F_{Sw}$ , para esforços de cálculo em cada uma das seções, calculadas por cada método distinto. É importante lembrar que não esta sendo considerada a resistência à tração do concreto e a resistência devida aos mecanismos complementares “ $V_c$ ”

Tabela 5-5 – Força na Armadura Transversal, Exemplo 1.

x	.....NBR	---Treliça	-----MSE	-·-·- RPS
	$F_{Sw}$	$F_{Sw}$	$F_{Sw}$	$F_{Sw}$
m	kN	kN	kN	kN
1	141	140	141	133
2	141	140	146	128
3	141	140	148	147

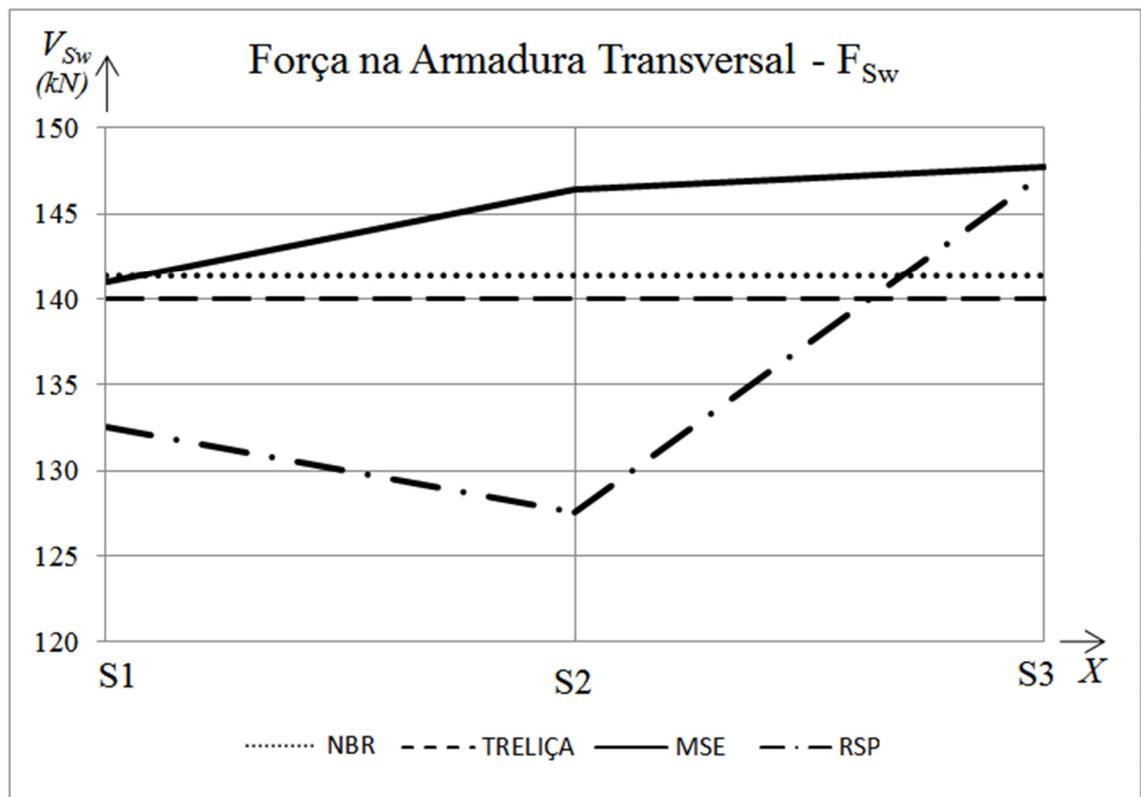


Figura 5-5 – Diagrama de Força na Armadura Transversal, Exemplo 1.

A Tabela 5-6 apresenta os valores das forças as armaduras transversais, calculadas pelos métodos (TRELIÇA), (MSE) e (RSP), nas seções S1 a S3, em razão dos valores valores calculados pelo método (NBR).

Tabela 5-6 - Força na Armadura Transversal em razão dos valores de (NBR), Exemplo 1.

Seção	Treliça	MSE	RSP
S1	0.99	1.00	0.94
S2	0.99	1.04	0.90
S3	0.99	1.04	1.04

Nos resultados apresentados na Tabela 5-5 e na Figura 5-5, o método da seção equivalente tem os maiores valores de forças na armadura transversal e os métodos de bielas e tirantes (Treliça) e de dimensionamento simples (NBR), tem valores de forças próximos. No modelo baseado na Teoria de Campo de Compressão (RSP), devido à compatibilização de deformações verticais, nas regiões de menores momentos fletores, seções S1 e S2, as forças de tração nas armaduras transversais são inferiores às obtidas nos demais métodos.

## 5.2. Exemplo 2

O Exemplo 2, desenvolvido por EBOLI [15], trata do dimensionamento de uma viga “T”, de dois vãos, simétrica, que em cada um dos vãos recebe uma carga concentrada devido a uma viga secundária e carregamentos uniformemente distribuídos de cargas permanentes e variáveis, como apresentado na Figura 5-6.

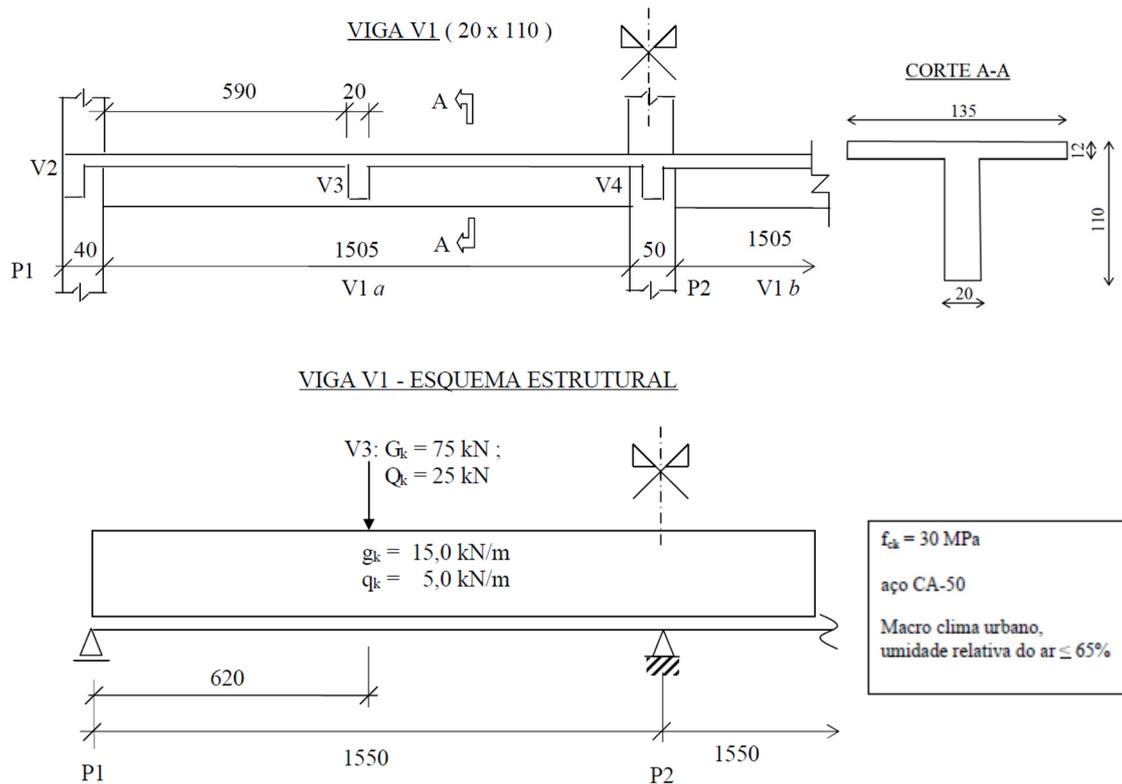


Figura 5-6 - Esquema geométrico e estrutural da viga V1, Exemplo 2. [15]

Três combinações foram analisadas levando em conta ou não a existência de carga variável no lado direito ( $F_{q,LD}$ ) ou no lado esquerdo ( $F_{q,LE}$ ), da viga simétrica, desta forma:

$$C1 = 1,4 \cdot F_g + 1,4 \cdot F_{q,LE} + 1,4 \cdot F_{q,LD}$$

$$C2 = 1,4 \cdot F_g + 1,4 \cdot F_{q,LE}$$

$$C3 = 1,4 \cdot F_g + 1,4 \cdot F_{q,LD}$$

Os diagramas de força cortante e de momentos fletores para cada uma das combinações definidas acima são apresentados na Figura 5-7 e Figura 5-8, respectivamente.

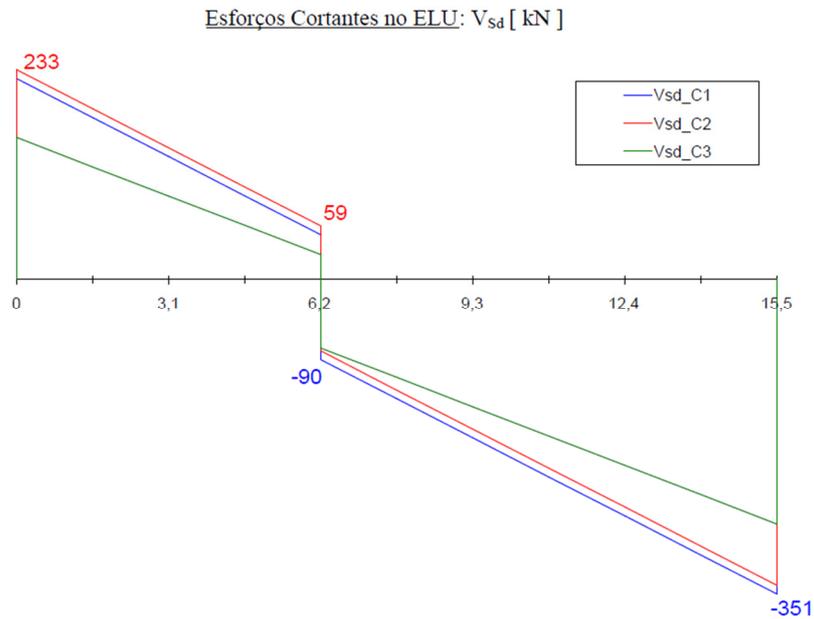


Figura 5-7 - Diagrama de Esforços Cortantes, Exemplo 2. [15]

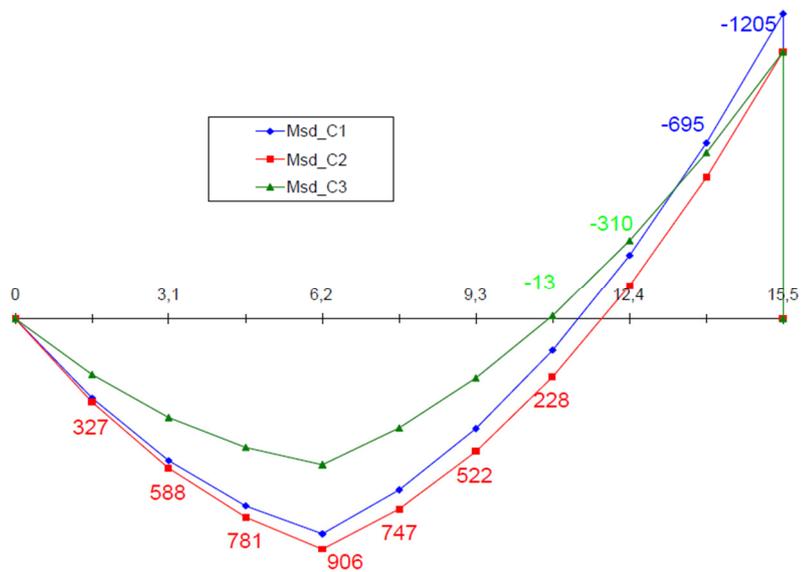


Figura 5-8 - Diagrama de Momentos Fletores, Exemplo 2. [15]

As seções distantes do apoio de 3,1m e de 13,95m serão analisadas, por estarem longe dos apoios e fora da zona de perturbação devido à introdução de cargas concentradas.

A Tabela 5-7 apresenta o dimensionamento à flexão das seções analisadas e das seções de momentos fletores máximos.

Tabela 5-7 – Determinação da força na armadura longitudinal, NBR6118 [1],

Exemplo 2.

$x$	$V_{Sd}$	$M_{Sd}$	$\kappa_{Md}$	$\kappa_x$	$\kappa_z$	$F_{Sd}$	$F_{Sd,cor}$ [kN]	
							$kN$	$\theta=45^\circ$
$m$	$kN$	$kN.m$						
3,10	146	588	0,020	0,030	0,988	595	668	722
13,95	-307	-695	0,162	0,267	0,893	778	932	1044

Na Tabela 5-8 são apresentados os valores das deformações, tensões e forças nas armaduras, através do método da seção equivalente, utilizando o programa FNL-CORTE. São apresentados valores de como seria o dimensionamento apenas por flexão não-linear composta, sem a influência do cortante, e também os valores com o esforço cortante acoplado.

Tabela 5-8 - Deformações, Tensões e Forças nas armaduras, FNL-CORTE, Exemplo 2.

$x$	Armaduras adotadas					sem cortante			com cortante		
	Camadas	$z$	$Q$	$\phi$	$A_s$	$\epsilon_x$	$\sigma_{sx}$	$F_{sx}$	$\epsilon_x$	$\sigma_{sx}$	$F_{sx,cor}$
$m$		$m$		$mm$	$cm^2$	$mm/m$	$MPa$	$kN$	$mm/m$	$MPa$	$kN$
3.1	1 - inf.	1.05	3	20	9.4	1.58	331	312	1.76	369	347
	2 - inf.	1.00	3	20	9.4	1.49	312	294	1.66	348	328
	$A_{s,total} =$					18.8	$F_{sx,total} =$		606	$F_{sx,cor,total} =$	
13.95	1 - sup.	0.05	3	25	14.7	1.60	336	495	1.86	391	576
	2 - sup.	0.10	2	25	9.8	1.47	308	302	1.72	361	354
	$A_{s,total} =$					24.5	$F_{sx,total} =$		797	$F_{sx,cor,total} =$	

Comparando os resultados da Tabela 5-7 com os da Tabela 5-8, nota-se que o dimensionamento da armadura longitudinal por flexão composta não-linear, supera os valores obtidos por flexão simples. As forças de tração nas armaduras, considerando o acoplamento do esforço cortante, calculadas pelo programa FNL-CORTE, têm valores próximos aos calculados para  $\theta = 45^\circ$ , pela NBR6118 [1].

A Tabela 5-9 faz o cálculo da parcela da força cortante resistida pela a armadura transversal,  $V_{SW}$ , onde, não foram considerados mecanismos complementares de treliça,  $V_C$ , para o ângulo  $\theta=45^\circ$ , segundo a NBR 6118 [1] e pelo método da seção equivalente, utilizando o programa FNL-CORTE, para as seções distantes do apoio de 3,10m e 13,95m.

Tabela 5-9 - Comparação da Força Cortante Resistida pela Armadura Transversal, Exemplo 2.

NBR				MSE	
x	$F_{Sd}$	$\kappa_z \cdot d$	$V_{SW}$ [kN]	$-\sigma_z$	$V_{SW}$
m	kN		$\theta=45^\circ$	MPa	kN
3.1	146	1.008	145	0.75	150
13.95	307	0.92	334	1.66	332

Os valores de  $V_{SW}$  calculados pelo método da seção equivalente são maiores que os valores encontrados segundo a NBR6118 [1] para o ângulo  $\theta=45^\circ$ .

### 5.3. Exemplo 3

#### 5.3.1. *Dados Gerais*

Esse exemplo tem como objetivo apresentar os resultados completos para o dimensionamento da seção transversal de uma seção de uma viga de concreto armado pelo programa FNL-CORTE.

A seção escolhida pertence à viga apresentada no Exemplo 2, posicionada a uma distância  $x = 3,10\text{m}$  do apoio extremo, sujeita às mesmas combinações de carregamentos, com a mesma geometria, armaduras e materiais conforme já apresentado.

Os dados de entrada da viga são os já apresentados no item 4.4.

#### 5.3.2. *Resultados*

São apresentados para todas as vinte faixas de concreto, os seguintes valores:

- $\varepsilon_x$  - deformações longitudinais;
- $\sigma_{xn}$  - tensões normais;
- $\tau_{xz}$  - tensões cisalhantes;
- $\theta$  - ângulo de inclinação das fissuras;
- $\sigma_{xt}$  - acréscimo de tensões normais devido ao cisalhamento;
- $\sigma_x$  - tensões normais acrescidas devido ao cisalhamento;
- $\sigma_t$  - tensões verticais;
- $\sigma_2$  - tensões de compressão diagonais.

Tabela 5-10 - Resultados Pertinentes a Seção de Concreto, Exemplo 3.

CONCRETO									
ELEMENTO	$z_m$	$\varepsilon_x$	$\sigma_{xn}$	$\tau_{xz}$	$\theta$	$\sigma_{xt}$	$\sigma_x$	$\sigma_z$	$\sigma_2$
CONCRETO	m	mm/m	MPa	MPa	deg	MPa	MPa	MPa	MPa
1	0.02	-0.26	-4.41	0.12	1.52	0.00	-4.41	0.00	-4.41
2	0.05	-0.20	-3.47	0.55	8.75	0.08	-3.55	0.08	-3.64
3	0.08	-0.14	-2.50	0.65	13.77	0.16	-2.66	0.16	-2.82
4	0.11	-0.08	-1.50	0.75	22.51	0.31	-1.81	0.31	-2.12
5	0.15	0.00	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
6	0.21	0.12	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
7	0.27	0.24	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
8	0.33	0.36	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
9	0.40	0.48	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
10	0.46	0.60	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
11	0.52	0.72	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
12	0.58	0.84	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
13	0.64	0.95	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
14	0.70	1.07	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
15	0.76	1.19	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
16	0.82	1.31	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
17	0.89	1.43	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
18	0.95	1.55	0.00	0.75	45.00	0.75	-0.75	0.75	-1.50
19	1.01	1.67	0.00	0.39	45.00	0.39	-0.39	0.39	-0.78
20	1.07	1.78	0.00	0.00	90.00	0.00	0.00	0.00	0.00

A Tabela 5-8 apresenta, para todas as dezenove camadas de distribuição de armadura longitudinal, os valores para o caso sem o acoplamento da força cortante e com o acoplamento da força cortante. São fornecidos:

$\varepsilon_x$  - deformações longitudinais;

$\sigma_{sx}$  - tensões longitudinais;

$F_{sx}$  - força em cada nível da armadura existente

Tabela 5-11 - Resultados Pertinentes à Armadura Longitudinal, Exemplo 3.

ARMADURA LONGITUDINAL						
ELEMENTO	sem cortante			com cortante		
	$\varepsilon_x$	$\sigma_{sx}$	$F_{sx}$	$\varepsilon_x$	$\sigma_{sx}$	$F_{sx}$
AÇO	m/km	MPa	kN	m/km	MPa	kN
1	-0.2104	-41	-59.7	-0.191	-37	-54.1
2	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
3	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
4	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
5	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
6	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
7	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
8	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
9	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
10	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
11	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
12	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
13	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
14	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
15	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
16	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
17	0.0000	0	0.0	0.000	0	0.0
18	1.4834	312	293.6	1.650	346	326.6
19	1.5726	330	311.2	1.747	367	345.7

Os gráficos referentes aos resultados apresentados nas Tabelas 5-7 e 5-8 são plotados e apresentados a seguir.

Na Figura 5-9 são apresentadas as deformações longitudinais da seção transversal. Seguindo a hipótese básica de que as seções planas permanecem planas, são traçados estes gráficos de deformações longitudinais, considerando a não-linearidade física dos materiais, para o caso de apenas força normal e momento fletor, e para o caso de onde a influência da força cortante também é considerada.

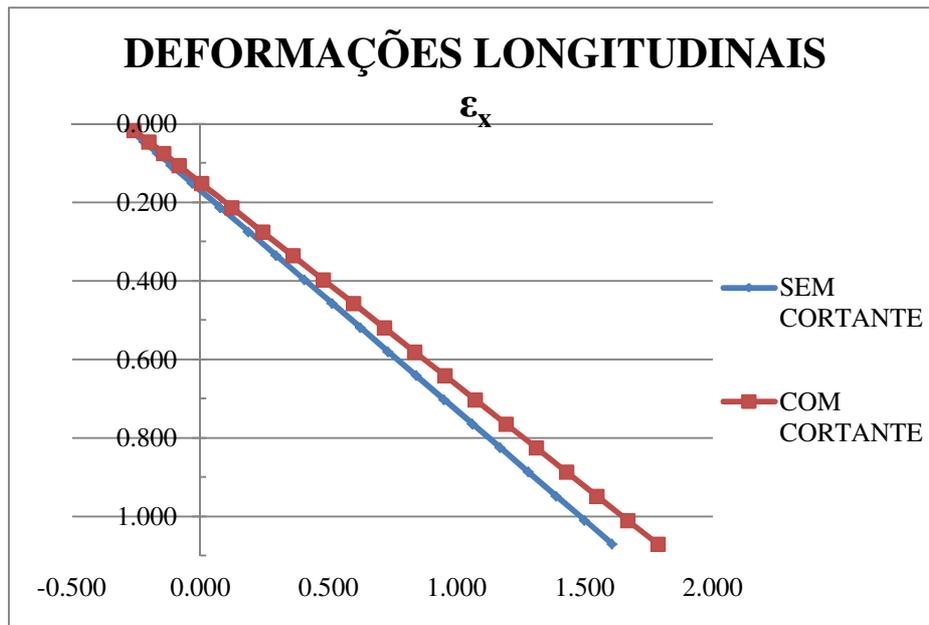


Figura 5-9 – Deformações Longitudinais, Exemplo 3.

Observando-se a Figura 5-9, é perceptível que a seção transversal que considera a influência da força cortante tem maior deformação longitudinal em relação à seção em que a força cortante não é considerada, como era de se esperar.

A Figura 5-10 traça o desenvolvimento dos ângulos de inclinação das fissuras, ao longo da altura.

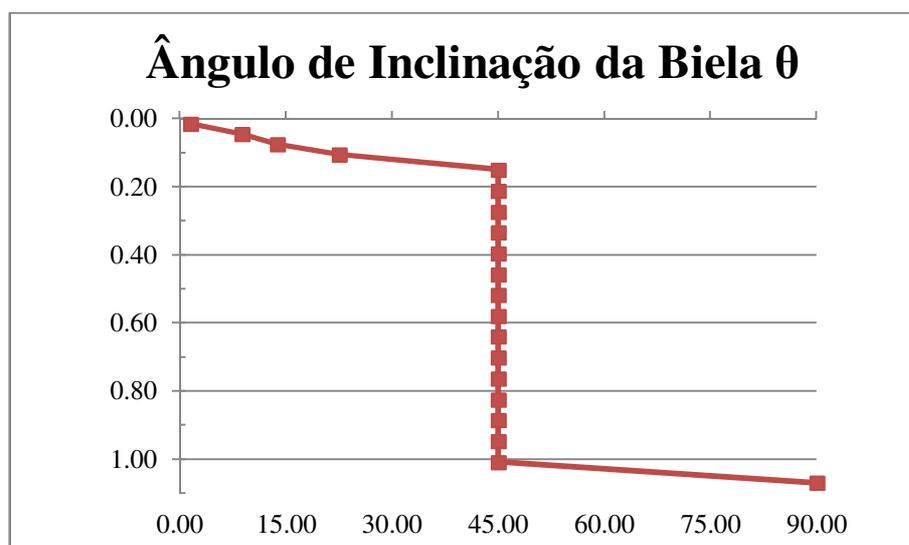


Figura 5-10 - Ângulo de Inclinação das Fissuras, Exemplo 3.

Analisando a expressão (4.56), que define o desenvolvimento do ângulo de inclinação das fissuras ao longo da altura da peça, para valores de tensões normais que tendem a  $\sigma_{xn} \rightarrow 0$ , temos o ângulo de inclinação das fissuras  $\theta = 45^\circ$ , e para valores de tensão cisalhante  $\tau_{xz} = 0$ , temos  $\theta = 90^\circ$ . É considerada a aproximação que define o ângulo de inclinação das bielas igual ao ângulo inclinação das fissuras.

A Figura 5-11 apresenta os gráficos das tensões normais,  $\sigma_{xn}$ , tensões normais com acréscimo devido ao cisalhamento,  $\sigma_x$ , e as tensões na direção da diagonal comprimida,  $\sigma_2$ , ao longo da altura.

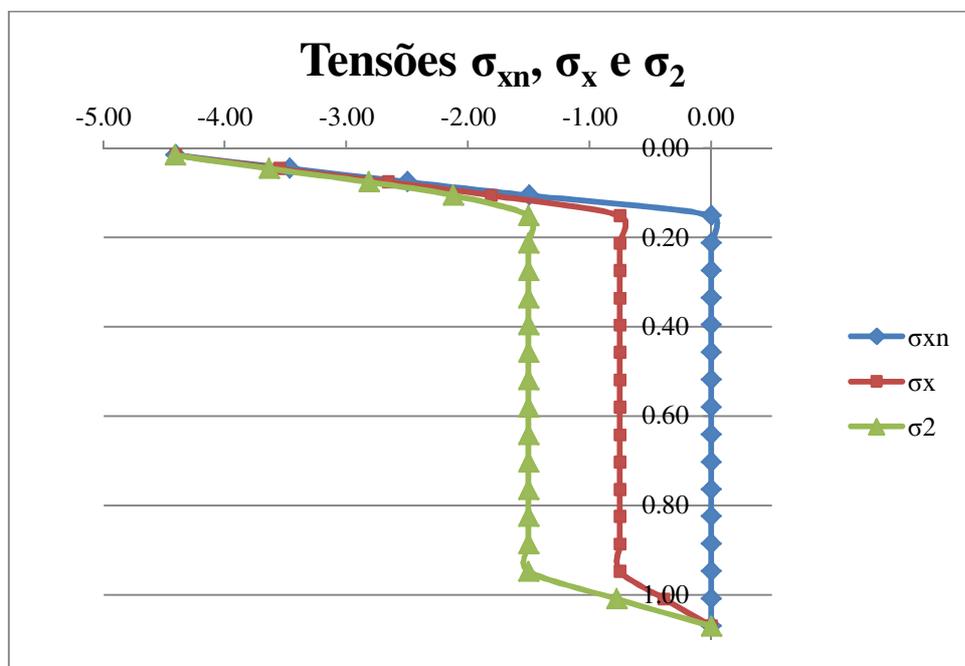


Figura 5-11 - Tensões Longitudinais e Tensão Diagonal, Exemplo 3.

Reciprocamente ao apresentado em relação à Figura 5-10, para valores de  $\theta \geq 45^\circ$ , as tensões normais tendem a  $\sigma_{xn} = 0$ . A partir do topo, onde ocorrem os valores máximos, as tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_2$  sofrem redução até se estabilizar o ângulo  $\theta = 45^\circ$ . Depois disso, estas permanecem constantes até a altura da camada de armadura mais interna, onde seus valores sofrem redução até se tornarem zero na camada mais externa.

Como foi proposto, para ângulos entre  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ , o valor da tensão de compressão na biela é inferior a  $f_{cd2} = 0,6 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd}$ . Para ângulos  $\theta < 30^\circ$ , a tensão de compressão na biela é inferior a  $0,85 f_{cd}$ .

A Figura 5-12 apresenta os diagramas da tensão cisalhante,  $\tau_{xz}$ , e da tensão na direção vertical,  $\sigma_t$ , ao longo da altura da seção. O digrama de tensão vertical é traçado com seu sinal negativo, para que seja feita a comparação com o diagrama de tensões cisalhantes.

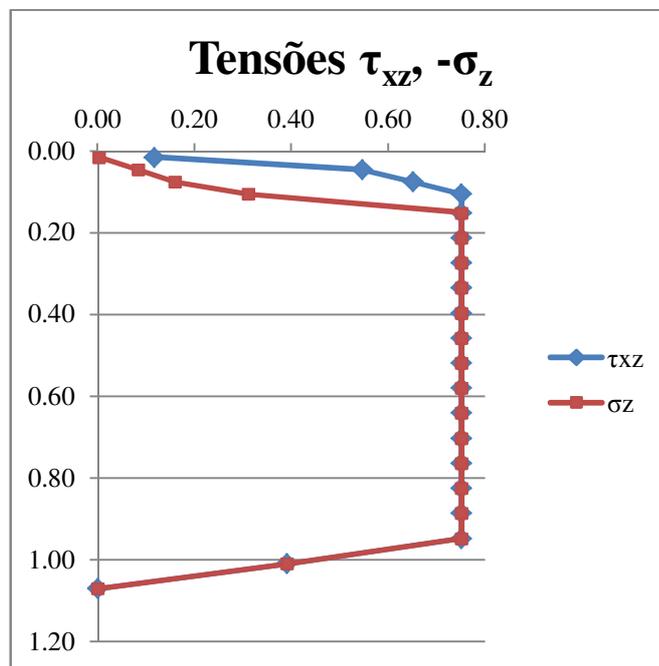


Figura 5-12 - Tensão Cisalhante e Tensão Vertical, Exemplo 3.

A tensão cisalhante,  $\tau_{xz}$ , e a tensão na direção vertical,  $\sigma_t$ , apresentam valores iguais à zero no topo da viga e tem encaminhamentos distintos até atingir a altura onde  $\theta \geq 45^\circ$ . A partir deste ponto, voltam a ter o mesmo valor máximo e permanecem constantes até a profundidade da camada de armadura mais interna e tendem à zero na profundidade da camada de armadura mais externa.

O dimensionamento da armadura transversal se dá através da equação (4.72), para o valor máximo de  $\sigma_t$ , da seguinte maneira:

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{\sigma_z}{f_{ywd}} \quad b_w = \frac{0,75MPa}{435MPa} \quad 0,20m = 3,44cm^2/m \rightarrow \phi 6,3c.15$$

Por não considerar a resistência à tração do concreto e a contribuição de mecanismos complementares na resistência ao esforço cortante  $V_c$ , o dimensionamento da armadura transversal se mostra antieconômico em relação ao realizado pela NBR6118 [1].

## 6. CONCLUSÃO

---

O estudo apresentado nesta Dissertação teve como objetivo ampliar os recursos de abordagem dos métodos racionais de análise de elementos lineares de concreto armado, submetidos ao momento fletor e à força cortante.

Foi demonstrado que, quando as tensões combinadas devidas ao cisalhamento e à flexão não forem tratadas adequadamente ao longo da seção da viga, a integridade desta pode ser seriamente comprometida. As tensões diagonais conhecidas como tração diagonal e compressão diagonal do concreto, devem ter atenção especial, durante o dimensionamento dos elementos lineares de concreto.

As teorias de treliça, do campo de compressão e o método simplificado de seção equivalente, tem como base o modelo de painel fissurado, sujeitos a estados de tensão em duas dimensões, incluindo o cisalhamento.

A Teoria do Campo de Compressão e o método de seção equivalente contemplam a não-linearidade física para a obtenção da configuração deformada da seção, sendo que apenas a primeira faz a compatibilização de deformações.

Ambas as teorias, não levam em consideração o histórico de carregamentos, supondo comportamento elástico e também a hipótese de que a direção das bielas e a direção das fissuras coincidem.

Foi mostrado que o método da seção equivalente omite a compatibilização de deformações, mas esta simplificação não desqualifica o método. O equilíbrio das forças normais e dos momentos fletores é mantido. O valor da força cortante resistente  $V_{Rd}$ , apresenta resultado um pouco superior, mas ainda assim, bastante parecido à força cortante solicitante  $V_{Sd}$ .

O Exemplo 1 e o Exemplo 2 apresentaram resultados comparativos satisfatórios para as situações analisadas. A armadura longitudinal, considerando o efeito do esforço cortante, tem pouca variação de valores para deformações e forças. Em ambos os exemplos, o valor da força transversal calculado pelo método da seção equivalente superou os demais.

O Exemplo 3 apresentou a interpretação dos resultados obtidos pelo programa FNL-CORTE, para uma seção transversal de uma viga submetida a força cortante e momento fletor.

A Teoria do Campo de Compressão Modificada tem em sua formulação, a compatibilização das deformações, considera a resistência do concreto à tração e os mecanismos complementares de resistência à força de cisalhamento, mas não é intuitiva e nem prática para o cálculo usual. O programa RESPONSE-2000 consegue dar praticidade ao processo e se mostra balizado por resultados de ensaios experimentais.

O método da seção equivalente, neste trabalho foi tratado em uma abordagem específica, que não considera a resistência de mecanismos complementares de resistência à força de cisalhamento  $V_c$ .

São sugeridos novos estudos, que possam chegar, de uma maneira prática, segura e econômica à consideração das referidas parcelas. A inclusão da compatibilização de deformações e da pertinência da consideração da coincidência da direção das bielas com a direção das fissuras são assuntos que podem ser também temas de futuras pesquisas.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR-6118, *Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento*, Rio de Janeiro, 2014.
- [2] NILSON, A. *Design of Concrete Structures*. McGraw-Hill International Editions, New York, 1997.
- [3] MÖRSCH, E., *Concrete Steel Construction*, McGraw-Hill, New York, 1909.
- [4] RITTER, W., *Die Bauweise Hennebique* (Construction Technics of Hennebique), Schweizerische Bauzeitung, Zürich, 1899.
- [5] SCHLAICH, J., SCHÄFER, K., JENNEWEIN, M., *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*, Journal of the Prestressed Concrete Institute, Vol. 32, No. 3, May/June 1987.
- [6] VECCHIO, F.J., COLLINS, M. P., *The Modified Compression field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*, ACI Structural Journal, No 83, 1986.
- [7] BENTZ, E. C., VECCHIO, F. J., COLLINS, M. P., *Simplified Modified Compression Field Theory for Calculating Shear Strength of Reinforced Concrete Elements*. ACI Structural Journal, N° 103, N°4, 2006.
- [8] BENTZ, E. C., *Sectional Analysis of Reinforced Concrete Members*,. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 2000.
- [9] BENTZ, E. C., COLLINS, M. P., *User Manual – MEMBRANE-2000, RESPONSE-2000, TRIAX-2000, SHELL-2000*. Version 1.1, September 2001.
- [10] PAES, J. L. R., *Contribuição ao Projeto de Elementos Pré-Fabricados de Argamassa Armada com Ênfase na Durabilidade*. Dissertação de Mestrado, UFF, Niterói, RJ, 1994.

- [11] DIAZ, B. E., *Dimensionamento a Esforço Cortante*. Revista Estrutura, ed. 92: 36 – 54, Rio de Janeiro, Setembro, 1980.
- [12] SCHULZ, M., *Verificação Geral de Peças de Concreto Armado Baseada no Modelo da Chapa Fissurada*. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1988.
- [13] CUNHA, M. T., *Dimensionamento Prático à Força Cortante de Seções de Concreto Armado*. Tese de Mestrado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1981.
- [14] SANTOS, S. H. C., *Detalhamento de Estruturas de Concreto Armado*. Apostila, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- [15] EBOLI, C. R., *Notas de Aula – EEA 414 – Concreto Armado II*. Apostila, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [16] FERREIRA, D. C. S., *A model for the nonlinear, time-dependent and strengthening analysis of shear critical frame concrete structures*, Doctoral Thesis, Departament d'Enginyeria de la Construcció, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha, 2013.