



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica
Programa de Projeto de Estruturas

Rejane Azevedo de Almeida Fonseca

**ANÁLISE PLÁSTICA DE VIGAS DE ACORDO COM OS CRITÉRIOS DA
NBR 6118**



UFRJ

Rejane Azevedo de Almeida Fonseca

ANÁLISE PLÁSTICA DE VIGAS DE ACORDO COM OS CRITÉRIOS DA
NBR 6118

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Rio de Janeiro

2016

Fonseca, Rejane Azevedo de Almeida

Análise Plástica de Vigas de Acordo com os Critérios da NBR 6118 / Rejane Azevedo de Almeida Fonseca – 2016.

99.: 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2016.

Orientador: Sergio Hampshire de Carvalho Santos

1. Concreto Armado, 2. Análise Plástica, 3. Rótulas Plásticas.
I. Santos, Sergio Hampshire de Carvalho. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola Politécnica. III. Título.



UFRJ

ANÁLISE PLÁSTICA DE VIGAS DE ACORDO COM OS CRITÉRIOS DA
NBR6118

Rejane Azevedo de Almeida Fonseca

Orientador:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Aprovada pela Banca:

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc., UFRJ

Prof. Mayra Soares Pereira Lima Perlingeiro, D. Sc., UFF

Prof. Emil de Souza Sánchez Filho, D. Sc., UFF

Rio de Janeiro
2016

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me amparar nos momentos difíceis, me dar forças para superar todas as dificuldades, mostrar sempre o caminho certo a seguir e por suprir todas as minhas necessidades.

Ao Professor Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, pela paciência, dedicação, apoio e atenção destinada à orientação e conclusão deste trabalho.

Aos meus queridos pais, Nirlei e Fatima, e aos meus irmãos, Diego e Thiago, por todo amor, carinho e por estarem sempre do meu lado, me incentivando, apoiando e dando todas as condições que me fizeram chegar até aqui. E à minha querida “irmã” Ana Júlia, por alegrar nossas vidas.

Ao meu querido esposo, Darlan, por ser tão importante na minha vida, que sempre me apoiou e esteve ao meu lado, me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido ao seu amor incondicional, carinho, amizade, compreensão e alegria este trabalho pôde ser concretizado.

À amiga Fabiana Rocha, pelo incentivo, sugestões e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores do Programa de Projeto de Estruturas, pelos conhecimentos transmitidos e pela contribuição à minha formação acadêmica e profissional.

A todos os amigos que torceram por mim, acreditaram e me incentivaram.

RESUMO

FONSECA, Rejane Azevedo de Almeida. **Análise Plástica de Vigas de Acordo com os Critérios da NBR 6118**. Rio de Janeiro. 2016. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2016.

Nas vigas de concreto armado, nos trechos onde os momentos fletores são grandes e o aço da armadura atinge o limite de escoamento, podem se formar rótulas plásticas, caracterizadas por um aumento rápido da curvatura, associado ao aumento do carregamento. Tal comportamento ocorre em pequenos trechos das vigas, para momentos fletores quase constantes. Estas rótulas plásticas representam as zonas plastificadas da estrutura, concentradas em seções críticas. A avaliação da capacidade de rotação plástica das vigas é essencial para a prevenção de uma possível ruptura e para garantir um adequado comportamento da estrutura, no que se refere aos estados limites últimos. Este trabalho tem como objetivo realizar análises plásticas de uma viga, por diferentes métodos. Quatro métodos foram aplicados, buscando-se calcular os valores de carregamento máximo que a viga biengastada analisada pode resistir. Para cada um dos métodos, foram desenvolvidas planilhas em MATHCAD, para sistematizar as aplicações. A partir dos resultados obtidos, análises comparativas foram realizadas, utilizando-se os critérios definidos na norma NBR 6118. Busca-se, assim, contribuir para os estudos de análise plástica e rotação plástica e oferecer uma avaliação crítica dos métodos e procedimentos da NBR 6118.

Palavras-chave: concreto armado; análise plástica; análises comparativas.

ABSTRACT

FONSECA, Rejane Azevedo de Almeida. **Plastic Analysis of Beams According to the Criteria of NBR 6118**. Rio de Janeiro. 2016. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2016.

In reinforced concrete beams, in regions where bending moments are big and the reinforcing steel achieve the yield strength, plastic hinges can appear, characterized by a rapid increase in the curvature, associated with an increase in the loading. This behavior occurs in small regions of the beams, for bending moments almost constant. These plastic hinges represent the plastified zones of the structure, concentrated in critical sections. The evaluation of the plastic rotation capacity of the beams is essential for the prevention of a possible rupture and for assuring an adequate behavior of the structure, with regard to the ultimate limit states. This work has the purpose of performing plastic analyzes of a beam, by different methods. Four methods were applied for calculating the values of the maximum loading that a fixed beam can resist. For each one of the methods, MATHCAD spreadsheets were developed in order to systematize the applications. From the obtained results, comparative analyzes have been done, using the criteria defined in the Brazilian Standard NBR 6118. It is proposed, in this way, to contribute with the studies of plastic analysis and plastic rotation and to offer a critical evaluation of the methods and procedures defined in the NBR 6118.

Keywords: reinforced concrete; plastic analysis; comparative analyzes.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Objetivo e Metodologia.....	1
1.2. Descrição dos Capítulos	2
2. DEFINIÇÕES	4
2.1. Definição dos Estados-Limites.....	4
2.1.1. Estados Limites Últimos (ELU)	4
2.1.2. Estados Limites de Serviço (ELS).....	4
2.1.3. Valores das Resistências.....	4
2.2. Características dos Materiais.....	5
2.2.1. Concreto	5
2.2.2. Aço	6
2.3. Análise Plástica de acordo com a NBR 6118:2014.....	8
2.3.1. Limites para redistribuição de momentos e condições de ductilidade ...	8
2.3.2. Análise não linear com verificação explícita da rotação plástica solicitante.....	9
3. ESTRUTURA A SER ANALISADA	12
3.1. Características gerais.....	12
3.1.1. 1ª análise – $K_x = 0,10$	13
3.1.2. 2ª análise – $K_x = 0,25$	14
3.1.3. 3ª análise – $K_x = 0,35$	14
3.1.4. 4ª análise – $K_x = 0,45$	14
3.1.5. 5ª análise – $K_x = 0,50$	15
3.2. Curvas Momento-Curvatura.....	15
4. MÉTODOS DE ANÁLISE.....	18
4.1. Planilha para cálculo pelo Método 1	19
4.2. Planilha para cálculo pelo Método 2	35
4.3. Planilha para cálculo pelo Método 3	49
4.4. Planilha para cálculo pelo Método 4	64
5. RESULTADOS	80
5.1. Resultados de acordo com a NBR 6118:2014.....	80
5.2. Resultados de acordo com Método 1	80
5.3. Resultados de acordo com Método 2	81

5.4. Resultados de acordo com Método 3	81
5.5. Resultados de acordo com Método 4	81
5.6. Comparação entre os métodos.....	82
6. CONCLUSÕES	83
6.1. Conclusão Final.....	84
6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros.....	84
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	85

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 – Diagrama tensão-deformação específica para aços de armadura passiva (NBR 6118:2014).	7
Figura 2-2 – Gráfico relacionando a posição da linha neutra com o coeficiente de redistribuição para os diferentes limites de resistência do concreto.....	9
Figura 2-3 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas (NBR 6118:2014).....	10
Figura 3-1 – Sistema de eixos da seção retangular $b \times h$	12
Figura 3-2 – Esquema estrutural da viga analisada.	12
Figura 3-3 – Parte final do arquivo de saída do programa MK-UFRJ, destacando-se o momento último.....	17
Figura 4-1 – Retirada de LEONHARDT (1978).....	19
Figura 4-2 – Página inicial, programa MATHCAD, Método 1 – $K_x = 0,25$	23
Figura 4-3 – Página dois, importação dos arquivos do MK-UFRJ.	24
Figura 4-4 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.....	25
Figura 4-5 – Página quatro, curva 1.	26
Figura 4-6 – Página cinco, interpolação da curva 1.	26
Figura 4-7 – Página seis, curva 2.....	27
Figura 4-8 – Página sete, interpolação da Curva 2.....	28
Figura 4-9 – Página oito, cálculo do momento.....	29
Figura 4-10 – Página nove, curvaturas.	30
Figura 4-11 – Página dez, rotações e começo das iterações.....	31
Figura 4-12 – Página onze, vetor curvatura e rotação próxima à zero.	32
Figura 4-13 – Diagrama de momentos de flexão, Método 1.....	35
Figura 4-14 – Esquema do Método 2.	38
Figura 4-15 – Página inicial, programa MATHCAD método 2 – $K_x = 0,25$	39
Figura 4-16 – Página dois, importando arquivos do MK-UFRJ.....	40
Figura 4-17 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.....	41
Figura 4-18 – Página quatro, curva 1.	42
Figura 4-19 – Página cinco, curva 2.....	43
Figura 4-20 – Página seis, interpolações das retas.	44
Figura 4-21 – Página sete, cálculo dos momentos.....	45
Figura 4-22 – Página oito, cálculo das curvaturas e dos coeficientes.	46
Figura 4-23 – Página nove, cálculo das integrais e do delta.....	47

Figura 4-24 – Diagrama de momentos de flexão, Método 2.	49
Figura 4-25 – Página inicial, programa MATHCAD, Método 3 – $K_x = 0,25$	52
Figura 4-26 – Página dois, importação dos arquivos do MK-UFRJ.	53
Figura 4-27 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.....	54
Figura 4-28 – Página quatro, curva 1.	55
Figura 4-29 – Página cinco, interpolação da Curva 1.....	55
Figura 4-30 – Página seis, curva 2.....	56
Figura 4-31 – Página sete, interpolação da curva 2.	56
Figura 4-32 – Página oito, cálculo dos momentos.....	57
Figura 4-33 – Página nove, curvaturas e rotações.	58
Figura 4-34 – Página dez, começo das iterações.	59
Figura 4-35 – Página onze, vetor curvatura e rotação próxima à zero.	60
Figura 4-36 – Diagrama de momentos de flexão, Método 3.	64
Figura 4-37 – Página inicial, programa MATHCAD método 4 – $K_x = 0,25$	68
Figura 4-38 – Página dois, importando arquivos do MK-UFRJ.....	69
Figura 4-39 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.....	70
Figura 4-40 – Página quatro, Curva 1.	71
Figura 4-41 – Página cinco, curva 2.	72
Figura 4-42 – Página seis, interpolações das retas.	73
Figura 4-43 – Página sete, cálculo dos momentos.....	74
Figura 4-44 – Página oito, cálculo das distâncias e das curvaturas.	75
Figura 4-45 – Página nove, cálculo da rotação.....	76
Figura 4-46 – Página dez, cálculo do delta.....	77
Figura 4-47 – Diagrama de momentos de flexão, Método 4.	79
Figura 5-1 – Valores obtidos com os quatro métodos e com a NBR 6118:2014.	82

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2-1 – Valores dos coeficientes γ_c e γ_s , Tabela 12.1 da NBR 6118:2014.....	5
Tabela 4-1 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,10$	32
Tabela 4-2 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,25$	33
Tabela 4-3 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,35$	33
Tabela 4-4 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,45$	33
Tabela 4-5 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,50$	33
Tabela 4-6 – Resultados de δ para $K_x = 0,10$	34
Tabela 4-7 – Resultados de δ para $K_x = 0,25$	34
Tabela 4-8 – Resultados de δ para $K_x = 0,35$	34
Tabela 4-9 – Resultados de δ para $K_x = 0,45$	34
Tabela 4-10 – Resultados de δ para $K_x = 0,50$	34
Tabela 4-11 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,10$	48
Tabela 4-12 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,25$	48
Tabela 4-13 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,35$	48
Tabela 4-14 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,45$	48
Tabela 4-15 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,50$	48
Tabela 4-16 – Resultados de δ para o Método 2.....	48
Tabela 4-17 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,10$	61
Tabela 4-18 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,25$	61
Tabela 4-19 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,35$	62
Tabela 4-20 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,45$	62
Tabela 4-21 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,50$	63
Tabela 4-22 – Resultados de δ para $K_x = 0,10$	63
Tabela 4-23 – Resultados de δ para $K_x = 0,25$	63
Tabela 4-24 – Resultados de δ para $K_x = 0,35$	63
Tabela 4-25 – Resultados de δ para $K_x = 0,45$	64
Tabela 4-26 – Resultados de δ para $K_x = 0,50$	64
Tabela 4-27 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,10$	77
Tabela 4-28 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,25$	77
Tabela 4-29 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,35$	78
Tabela 4-30 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,45$	78

Tabela 4-31 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,50$	78
Tabela 4-32 – Resultados de δ para o Método 4.	78
Tabela 5-1 – Resultados de acordo com a NBR 6118:2014.	80
Tabela 5-2 – Resultados de acordo com o Método 1.	80
Tabela 5-3 – Resultados de acordo com o Método 2.	81
Tabela 5-4 – Resultados de acordo com o Método 3.	81
Tabela 5-5 – Resultados de acordo com o Método 4	81

1. INTRODUÇÃO

Nas vigas de concreto armado, nos trechos onde os momentos de flexão são grandes e o aço da armadura atinge o limite de escoamento, podem se formar rótulas plásticas, caracterizadas por um aumento rápido da curvatura, associado ao aumento do carregamento.

Tal comportamento ocorre em pequenos trechos das vigas, para momentos de flexão quase constantes. Essas rótulas plásticas representam as zonas plastificadas da estrutura, concentradas em seções críticas.

A avaliação da capacidade de rotação plástica das vigas é essencial para prevenção de possíveis rupturas, e para garantir que o comportamento da estrutura está adequado, no que se refere aos estados limites últimos.

A NBR 6118:2014 apresenta critérios de redistribuição de momentos e de análise plástica de elementos unidimensionais de concreto armado, associados à capacidade de rotação nas seções de engastamento e à profundidade da linha neutra no estado limite último da flexão. Esses critérios são estudados e analisados criticamente, por meio de uma série de exemplos numéricos.

1.1. Objetivo e Metodologia

O objetivo principal deste trabalho é estudar os critérios definidos na NBR 6118:2014, especificamente em seus itens 14.6.4 e 14.6.5, respectivamente, para análise linear com ou sem redistribuição e análise não linear, tendo em vista verificar a precisão e o conservadorismo desses critérios. A partir dessas análises poderão vir a ser propostas, eventualmente, melhorias, complementações e extensões destes critérios normativos.

A metodologia a ser aqui seguida consiste em realizar análises plásticas de uma viga biengastada, para diferentes classes de resistência de concreto e diferentes taxas de armadura, por diferentes métodos de análise. A viga teórica biengastada analisada é submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Associadas às diferentes taxas de armadura admitidas, a viga é analisada para cinco valores de profundidade relativa de linha neutra, K_x .

Quatro métodos foram implantados para se avaliar o valor de carregamento máximo que a viga resiste até sua plastificação final:

-Método 1 – método rigoroso, com diagrama tensão-deformação específica do aço de acordo com os critérios normativos do dimensionamento à flexão;

-Método 2 – método simplificado, com consideração pré-definida da extensão da rótula e diagrama tensão-deformação específica do aço de acordo com os critérios normativos do dimensionamento à flexão;

-Método 3 – método rigoroso, com diagrama tensão-deformação real do aço;

-Método 4 – método simplificado de LEONHARDT (1978), considerando uma região plastificada com curvatura média constante.

Para obtenção das relações momento-curvatura, essenciais nas análises apresentadas, utilizou-se o programa computacional MK-UFRJ desenvolvido por CASTRO (2008) em seu Trabalho Final de Graduação.

Para os quatro métodos considerados foram desenvolvidas planilhas em MATHCAD para sistematizar as aplicações.

A partir dos resultados obtidos, foram realizadas análises comparativas, utilizando-se os critérios definidos na norma NBR 6118:2014.

Busca-se, assim, contribuir para os estudos de análise plástica e rotação plástica e oferecer uma avaliação crítica dos métodos e procedimentos da NBR 6118:2014.

1.2. Descrição dos Capítulos

O presente trabalho está dividido em seis capítulos: Introdução, Definições, Estrutura a ser Analisada, Métodos de Análise, Resultados e Conclusões.

No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos básicos da Teoria do Concreto Armado pertinentes a este trabalho, tais como, definição dos estados limites, características dos materiais envolvidos e conceitos da NBR 6118:2014 para a consideração da Análise Plástica.

O Capítulo 3 apresenta os dados da estrutura a ser analisada, como a geometria da viga, incluindo as características da seção transversal, os valores de f_{ck} utilizados, os

dados comuns aos diversos métodos e a obtenção das curvas necessárias Momento-Curvatura, obtidas com o programa MK-UFRJ.

No capítulo 4 são descritos os métodos de análise. É apresentado, detalhadamente, o que foi considerado em cada método, quais as fórmulas e critérios utilizados e as planilhas desenvolvidas em MATHCAD. Foi apresentada uma planilha para exemplificar cada método, tendo sido criadas 20 planilhas, cinco planilhas (uma para cada K_x estudado) para cada um dos quatro métodos.

O capítulo 5 apresenta os resultados de cada método. São apresentados os valores obtidos para δ , que é a relação entre a carga original correspondente ao limite da análise elástica linear e a carga máxima encontrada, para cada K_x estudado. Apresentam-se também os valores de δ definidos na NBR 6118:2014, para as comparações.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões para cada um dos métodos analisados e uma conclusão geral, através da comparação dos resultados obtidos.

2. DEFINIÇÕES

2.1. Definição dos Estados-Limites

Nas estruturas de concreto, os estados limites a serem considerados são os Estados Limites Últimos e os Estados Limites de Serviço.

2.1.1. Estados Limites Últimos (ELU)

De acordo com a NBR 6118:2014, os ELU estão relacionados ao colapso ou qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação, no todo ou em parte, da utilização da estrutura.

2.1.2. Estados Limites de Serviço (ELS)

Estados Limites de Serviço são aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação a equipamentos suportados pelas estruturas.

2.1.3. Valores das Resistências

As resistências dos materiais empregadas nas estruturas de concreto armado são definidas através de seus valores característicos e de cálculo de acordo com a NBR 6118, em seus itens 12.2 e 12.3, respectivamente.

Segundo o item 12.2 da NBR 6118:2014, os valores característicos das resistências, f_k , são aqueles que, dentro de um lote do material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança. Além dos valores médios das resistências, f_m , existem os valores da resistência característica inferior, $f_{k,inf}$, cujo valor é menor que a resistência média, e superior, $f_{k,sup}$, cujo valor é maior que a resistência média, f_m .

A resistência característica inferior, $f_{k,inf}$, é definida como sendo o valor que tem apenas 5% de probabilidade de não ser atingido pelos elementos de um dado lote de material.

Os valores de cálculo das resistências são estabelecidos pela NBR 6118:2014, a partir dos respectivos valores característicos e dos coeficientes de ponderação das resistências.

Para verificações estruturais realizadas com o concreto (de idade igual ou superior a 28 dias) e o aço, respectivamente, são utilizadas as seguintes definições (de acordo com a NBR 6118:2014):

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad (2.1)$$

$$f_{td} = f_{tk} / \gamma_c \quad (2.2)$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (2.3)$$

$$f_{ykd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (2.4)$$

A Tabela 2-1, extraída da NBR 6118:2014, apresenta os valores dos coeficientes de ponderação das resistências, no Estado Limite Último.

Tabela 2-1 – Valores dos coeficientes γ_c e γ_s , Tabela 12.1 da NBR 6118:2014.

Combinações	Concreto	Aço
	γ_c	γ_s
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

2.2. Características dos Materiais

2.2.1. Concreto

O módulo de elasticidade inicial (tangente à origem) E_{ci} deve ser obtido em ensaio realizado de acordo com a NBR 8522:1984. Quando não forem realizados ensaios, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade inicial com as expressões que seguem.

Para concretos com resistência no intervalo $20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$:

$$E_{ci} = \alpha_E \times 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (2.5)$$

Para concretos com resistência no intervalo $55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$:

$$E_{ci} = 21,5 \times 10^3 \times \alpha_E \times (f_{ck}/10 + 1,25)^{1/3} \quad (2.6)$$

O parâmetro α_E é definido em função da rocha matriz da brita empregada:

$\alpha_E = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_E = 1,0$ para granito e gnaisse;

$\alpha_E = 0,9$ para calcário;

$\alpha_E = 0,7$ para arenito;

E_{ci} e f_{ck} são expressos em MPa.

Na determinação das solicitações e verificações em geral dos Estados Limites de Serviço e Último, deve ser utilizado o módulo de elasticidade secante, que pode ser obtido por meio de ensaio estabelecido pela NBR 8522:1984 ou estimado por:

$$E_{cs} = \alpha_i \times E_{ci} \quad (2.7)$$

sendo

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times f_{ck}/80 \leq 1,0 \quad (2.8)$$

O coeficiente de Poisson do concreto (ν) e o módulo de elasticidade transversal G_c , para tensões de compressão menores que $0,5 f_{ck}$ e tensões de tração menores que f_{ct} , podem ser adotados, respectivamente:

$$\nu = 0,2 \quad (2.9)$$

$$G_c = E_{cs}/2,4 \quad (2.10)$$

2.2.2. Aço

Os aços utilizados nos projetos de estruturas de concreto armado são os classificados na NBR 7480:2007, de acordo com seu valor característico de resistência de escoamento, nas categorias CA-25, CA-50 e CA-60.

Para os aços de armadura passiva, a NBR 6118:2014 estabelece que, na ausência de ensaios ou valores fornecidos pelo fabricante, o valor do módulo de elasticidade pode ser admitido como igual a 210 GPa.

Para cálculos nos estados limites de serviço e último pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 2-1, para aços com ou sem patamar de escoamento.

Nessa figura:

σ_s – tensão no aço;

ϵ_s – deformação específica no aço;

f_{yk} – resistência de escoamento do aço, em seu valor característico;

f_{yd} – resistência de escoamento do aço, em seu valor de cálculo;

E_s – módulo de elasticidade longitudinal do aço.

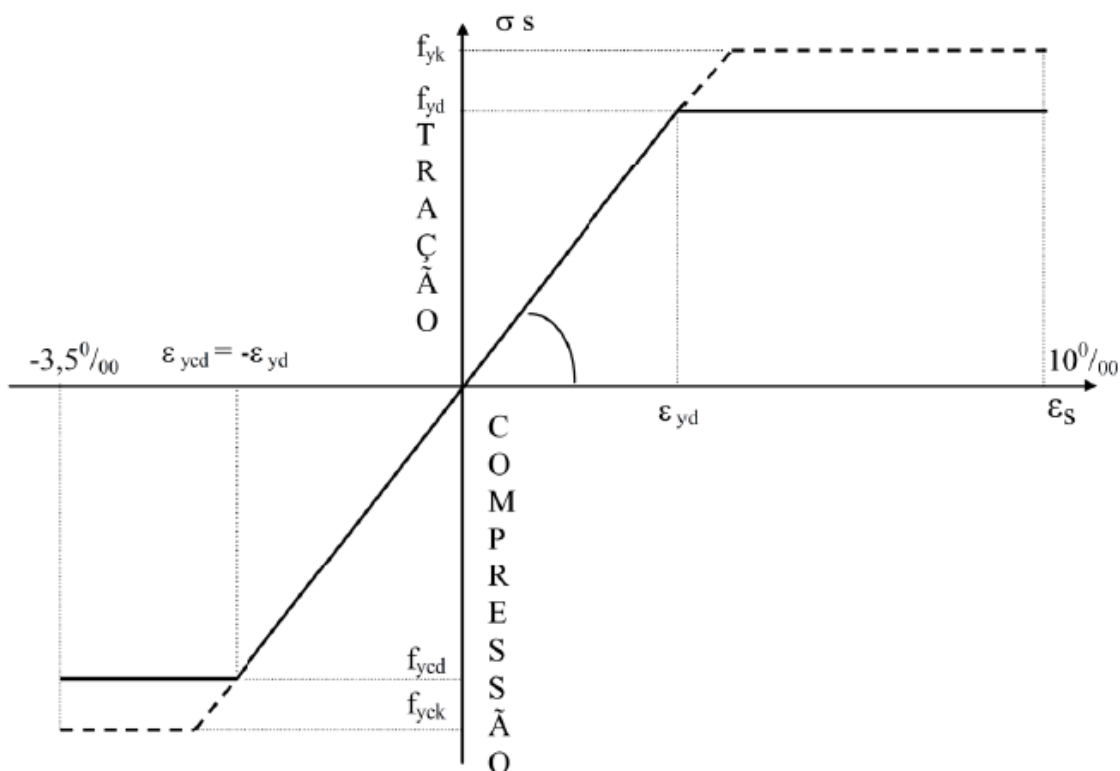


Figura 2-1 – Diagrama tensão-deformação específica para aços de armadura passiva (NBR 6118:2014).

2.3. Análise Plástica de acordo com a NBR 6118:2014

De acordo com NBR 6118:2014, a análise estrutural é denominada plástica quando as não linearidades são consideradas, admitindo-se materiais de comportamento rígido-plástico perfeito ou elastoplástico perfeito. Esse tipo de análise deve ser usado apenas para verificações no ELU.

A análise plástica de estruturas reticuladas não pode ser adotada quando:

- a) se consideram os efeitos de segunda ordem global;
- b) não houver suficiente ductilidade para que as configurações adotadas sejam atingidas.

2.3.1. Limites para redistribuição de momentos e condições de ductilidade

Em elementos lineares, segundo os itens 14.6.4.3 e 14.6.4.4 da NBR 6118:2014, a seguir reproduzidos, a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for $K_x = x/d$ (profundidade relativa da linha neutra = profundidade da linha neutra/altura útil), tanto maior será essa capacidade.

Para proporcionar um adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

a) $x/d \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa; (2.11)

b) $x/d \leq 0,35$, para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$ MPa. (2.12)

Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como os que produzem confinamento nas regiões de máximos momentos.

Quando for efetuada uma redistribuição, reduzindo-se um momento de flexão de M para δM em uma determinada seção transversal, a profundidade relativa da linha neutra (x/d) nessa seção, para o momento reduzido δM , deve ser limitada por:

a) $x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25$, para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa; (2.13)

b) $x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25$, para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$ MPa. (2.14)

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

a) $\delta \geq 0,90$, para estruturas de nós móveis; (2.15)

b) $\delta \geq 0,75$, para qualquer outro caso. (2.16)

A Figura 2-2 apresenta a relação da posição da linha neutra com o coeficiente de redistribuição.

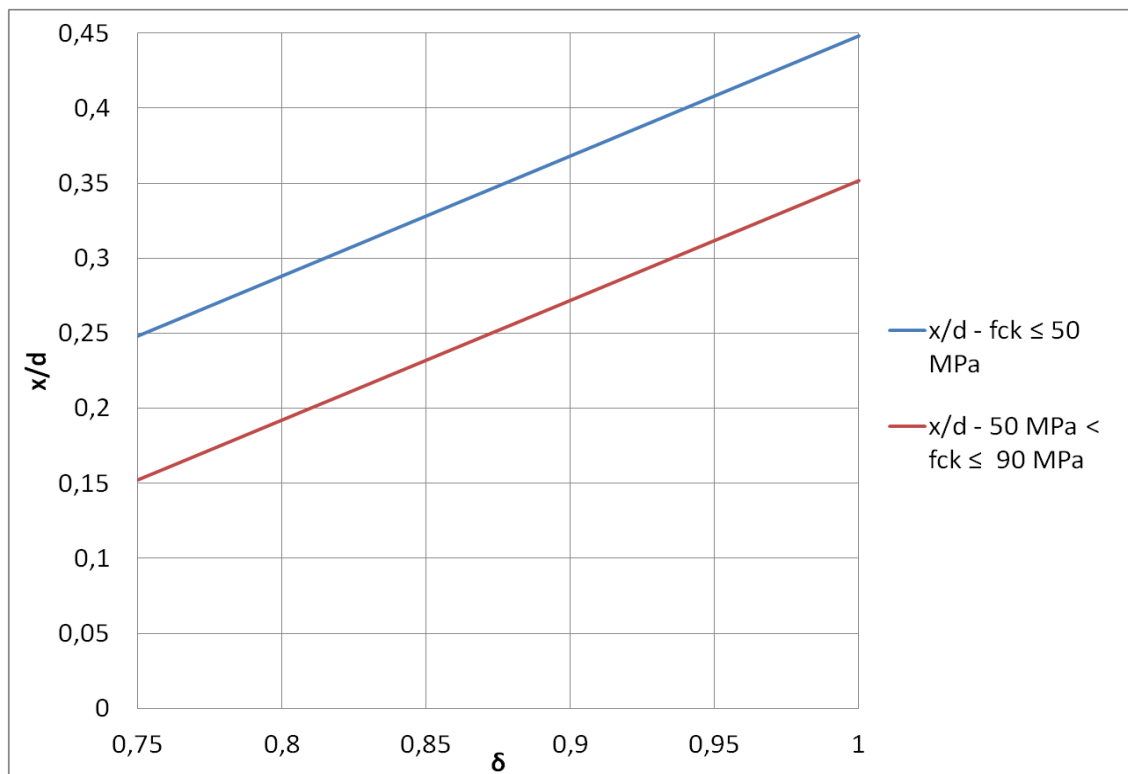


Figura 2-2 – Gráfico relacionando a posição da linha neutra com o coeficiente de redistribuição para os diferentes limites de resistência do concreto.

Pode ser adotada redistribuição fora destes limites estabelecidos na NBR 6118:2014, desde que a estrutura seja analisada com o emprego de análise não linear ou de análise plástica, e com verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas.

2.3.2. *Análise não linear com verificação explícita da rotação plástica solicitante*

Para verificações de estados-limites últimos, pode ser efetuada a análise plástica da estrutura, com a consideração de rótulas plásticas localizadas em seções críticas.

É obrigatória a verificação das rotações nas rótulas plásticas, correspondentes aos mecanismos adotados, que não podem superar a capacidade de rotação plástica das seções transversais correspondentes.

O limite da rotação plástica solicitante, função da profundidade da linha neutra no Estado Limite Último (flexão simples) para o momento de flexão solicitante M_{Sd} em uma seção crítica (Figura 2-3), correspondente à razão $a/d = 3$, onde $a = M_{Sd}/V_{Sd}$, sendo V_{Sd} a força cortante nessa seção. Para outras razões a/d , multiplicar os valores dados na Figura 2-3 pelo fator $\sqrt{\frac{a}{d}}/3$.

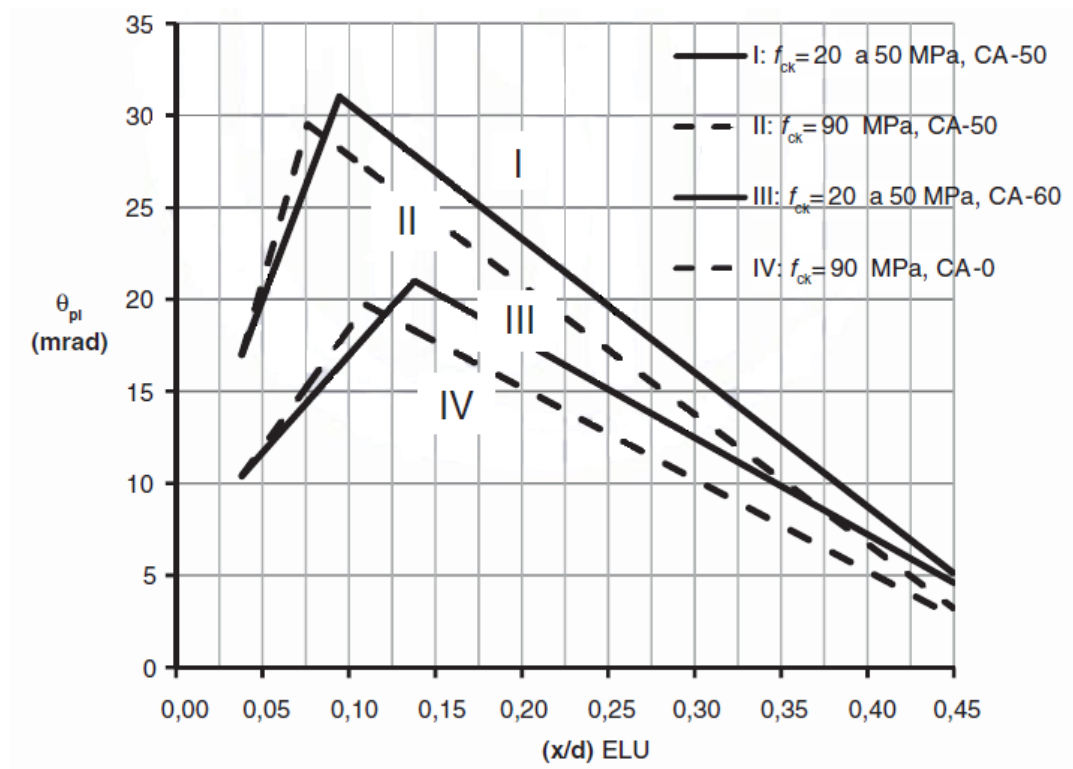


Figura 2-3 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas (NBR 6118:2014).

Para classes de concreto entre C50 e C90 deve ser efetuada a interpolação linear dos valores obtidos na Figura 2-3.

É dispensada na análise plástica (como na aplicação do Método das Charneiras Plásticas), a verificação explícita da capacidade de rotação plástica prescrita acima, desde que a posição da linha neutra seja limitada em:

$$x/d \leq 0,25, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}; \quad (2.17)$$

$$x/d \leq 0,15, \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa}. \quad (2.18)$$

Observar que, em edições da NBR 6118 anteriores a 2004, o valor definido para δ era constante e igual a 0,85, e os valores de x/d eram simplesmente limitados na flexão simples

nos correspondentes limites dos Domínios de Deformação 3 e 4 ($x/d = 0,628$ para o aço anteriormente denominado de CA 50-A).

3. ESTRUTURA A SER ANALISADA

Neste capítulo são descritos a geometria da estrutura e os carregamentos utilizados na análise do exemplo numérico apresentado. O estudo tem como objetivo realizar a comparação de resultados nele obtidos com as considerações da norma NBR 6118:2014.

3.1. Características gerais

Considera-se uma viga biengastada, de comprimento $L = 10$ m, com seção transversal $h = 0,80$ m e $b = 0,20$ m, utilizando-se uma camada de aço CA-50 e com o sistema de eixos definido na Figura 3-1.

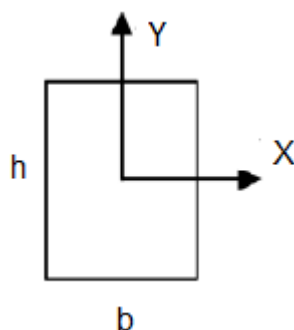


Figura 3-1 – Sistema de eixos da seção retangular $b \times h$.

Quanto à resistência à compressão do concreto foi previsto um concreto com um $f_{ck} = 25$ MPa. Constata-se que os resultados obtidos independem da resistência do concreto até $f_{ck} = 50$ MPa.

A viga é submetida a um carregamento uniformemente distribuído denominado de “q”, conforme apresentado na Figura 3-2.

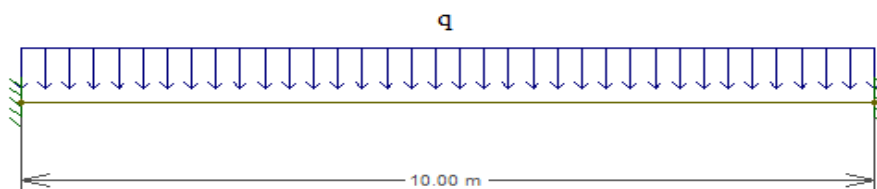


Figura 3-2 – Esquema estrutural da viga analisada.

São analisados diferentes valores de $K_x = 0,10, 0,25, 0,35, 0,45$ e $0,50$, sem consideração de armadura de compressão, para posterior comparação com resultados obtidos, seguindo as recomendações da NBR 6118:2014. Observa-se que, apesar do valor $K_x = 0,50$ não ser permitido por essa norma, ele será aqui considerado para se avaliar a pertinência dessa limitação. É considerado que nos trechos onde ocorrem momentos positivos as armaduras calculadas têm o mesmo valor das armaduras negativas.

Nas análises a seguir os valores adimensionais K_{md} (momento adimensional) e K_z (braço de alavanca adimensional) são relacionados a K_x , por expressões simples, encontradas em planilhas de dimensionamento de concreto armado à flexão simples (SANTOS, 2015), para $f_{ck} \leq 50$ MPa:

$$K_{md} = \frac{M_d}{b \times d^2 \times f_{cd}} \quad (3.1)$$

ou

$$M_d = K_{md} \times b \times d^2 \times f_{cd} \quad (3.2)$$

$$K_{md} = 0,68 \times k_x - 0,272 \times k_x^2 \quad (3.3)$$

$$K_z = 1 - 0,4 \times k_x \quad (3.4)$$

$$f_{cd} = \frac{25000}{1,4} = 17857,14 \text{ kN/m}^2 \quad (3.5)$$

Como $b = 0,20$ m e $h = 0,80$ m, considerando-se $d' = 0,08$ m, tem-se $d = 0,72$ m.

3.1.1. 1ª análise – $K_x = 0,10$

Para $K_x = 0,10$, tem-se $K_{md} = 0,065$ e $K_z = 0,960$.

$$M_d = 0,065 \times 0,20 \times 0,72^2 \times 17857,14 = 120,3 \text{ kNm} \quad (3.6)$$

$$A_s = \frac{M_d}{f_{yd} \times k_z \times d} \quad (3.7)$$

$$f_{yd} = \frac{50}{1,15} = 43,5 \text{ kN/cm}^2 \quad (3.8)$$

$$A_s = \frac{120,3}{0,960 \times 0,72 \times 43,5} = 4,0 \text{ cm}^2 \quad (3.9)$$

Para vigas biengastadas o momento no engaste é $M = ql^2/12$, logo, para uma análise elástica-linear:

$$q = \frac{12 \times M_d}{l^2} \quad (3.10)$$

$$q = \frac{12 \times 120,3}{10^2} = 14,4 \text{ kN/m} \quad (3.11)$$

3.1.2. 2ª análise – $K_x = 0,25$

Para $K_x = 0,25$, $K_{md} = 0,153$ e $K_z = 0,900$.

$$M_d = 0,153 \times 0,20 \times 0,72^2 \times 17857,14 = 283,3 \text{ kNm} \quad (3.12)$$

$$A_s = \frac{283,3}{0,900 \times 0,72 \times 43,5} = 10,06 \text{ cm}^2 \quad (3.13)$$

$$q = \frac{12 \times 283,3}{10^2} = 34 \text{ kN/m} \quad (3.14)$$

3.1.3. 3ª análise – $K_x = 0,35$

Para $K_x = 0,35$, $K_{md} = 0,205$ e $K_z = 0,860$.

$$M_d = 0,205 \times 0,20 \times 0,72^2 \times 17857,14 = 379,5 \text{ kNm} \quad (3.15)$$

$$A_s = \frac{379,5}{0,860 \times 0,72 \times 43,5} = 14,1 \text{ cm}^2 \quad (3.16)$$

$$q = \frac{12 \times 379,5}{10^2} = 45,53 \text{ kN/m} \quad (3.17)$$

3.1.4. 4ª análise – $K_x = 0,45$

Para $K_x = 0,45$, $K_{md} = 0,251$ e $K_z = 0,820$.

$$M_d = 0,251 \times 0,20 \times 0,72^2 \times 17857,14 = 464,7 \text{ kNm} \quad (3.18)$$

$$A_s = \frac{464,7}{0,820 \times 0,72 \times 43,5} = 18,1 \text{ cm}^2 \quad (3.19)$$

$$q = \frac{12 \times 464,7}{10^2} = 55,8 \text{ kN/m} \quad (3.20)$$

3.1.5. 5ª análise – $K_x = 0,50$

Para $K_x = 0,50$, $K_{md} = 0,272$ e $K_z = 0,800$.

$$M_d = 0,272 \times 0,20 \times 0,72^2 \times 17857,14 = 503,59 \text{ kNm} \quad (3.21)$$

$$A_s = \frac{503,59}{0,800 \times 0,72 \times 43,5} = 20,1 \text{ cm}^2 \quad (3.22)$$

$$q = \frac{12 \times 503,59}{10^2} = 60,4 \text{ kN/m} \quad (3.23)$$

3.2. Curvas Momento-Curvatura

As curvas momento-curvatura para todos os casos de K_x estudados foram obtidas com o programa MK-UFRJ desenvolvido por CASTRO (2008).

O programa MK-UFRJ (que trabalha com o parábola-retângulo real – no diagrama tensão-deformação do concreto) tem como parâmetros de entrada: a magnitude da força normal de compressão de cálculo N_d em kN; a resistência de cálculo do concreto f_{cd} em MPa; a resistência de cálculo do aço f_{yd} em MPa; a largura da base b em cm; a altura h em cm; o número de camadas ou níveis de aço; a ordenada do centro de gravidade das camadas em cm (a partir do topo da seção) e a área de aço contida em cada camada A_s em cm^2 . No caso analisado:

$$N_d = 0 \quad (3.24)$$

$$f_{cd} = \frac{25}{1,4} = 17,857 \text{ MPa} \quad (3.25)$$

$$f_{yd} = \frac{500}{1,15} = 435 \text{ MPa} \quad (3.26)$$

$$b = 20 \text{ cm} \quad (3.27)$$

$$h = 80 \text{ cm} \quad (3.28)$$

$$n^\circ \text{ de camadas} = 1 \quad (3.29)$$

$$d = 72 \text{ cm} \quad (3.30)$$

$$A_s \text{ para } K_x = 0,10: 4,00 \text{ cm}^2 \quad (3.31)$$

$$A_s \text{ para } K_x = 0,25: 10,06 \text{ cm}^2 \quad (3.32)$$

$$A_s \text{ para } K_x = 0,35: 14,10 \text{ cm}^2 \quad (3.33)$$

$$A_s \text{ para } K_x = 0,45: 18,10 \text{ cm}^2 \quad (3.34)$$

$$A_s \text{ para } K_x = 0,50: 20,10 \text{ cm}^2 \quad (3.35)$$

A Figura 3-3 apresenta a parte final do arquivo de saída do MK-UFRJ para $K_x = 0,25$, onde se observa que, além do momento de flexão e da curvatura, o resultado do processamento também fornece a força normal, o K_x correspondente e as deformações específicas do concreto e do aço.

***** ANALISE NAO-LINEAR FISICA DE SECOES DE CONCRETO ARMADO *****

SECAO TRANSVERSAL:

bw [cm] = 20.00
h [cm] = 80.00
fcd [MPa] = 17.86
fyd [MPa] = 435.00

DISPOSICAO DAS ARMADURAS:

CAMADA	As [cm2]	d [cm]
1	10.06	72.00

RESULTADOS DA ANALISE:

FORÇA NORMAL [kN]	MOMENTO FLETOR [kN.m]	CURVATURA [1/1000.m]
kx (x/d)	EPS CONC [1/1000]	EPS ACO [1/1000]
0.00	280.50	10.53524
0.29	-2.185	5.400
0.00	280.55	10.62207
0.29	-2.198	5.450
0.00	280.60	10.70890
0.29	-2.210	5.500
-0.00	280.64	10.79573
0.29	-2.223	5.550
-0.00	280.69	10.88256
0.29	-2.235	5.600
-0.00	280.73	10.96939
0.28	-2.248	5.650
-0.00	280.78	11.05622
0.28	-2.260	5.700
-0.00	280.82	11.14305
0.28	-2.273	5.750
0.00	280.86	11.22987
0.28	-2.286	5.800
-0.00	280.90	11.31670
0.28	-2.298	5.850
0.00	280.94	11.40353
0.28	-2.311	5.900
0.00	280.98	11.49036
0.28	-2.323	5.950
0.00	281.02	11.57719
0.28	-2.336	6.000
-0.00	281.06	11.66402
0.28	-2.348	6.050
-0.00	281.09	11.75085
0.28	-2.361	6.100
-0.00	281.13	11.83768
0.28	-2.373	6.150
-0.00	281.17	11.92451
0.28	-2.385	6.200
-0.00	281.20	12.01133
0.28	-2.397	6.250

Figura 3-3 – Parte final do arquivo de saída do programa MK-UFRJ, destacando-se o momento último.

4. MÉTODOS DE ANÁLISE

De forma a possibilitar uma ampla análise da viga em estudo foram considerados quatro métodos distintos, para posterior comparação com os resultados obtidos com as considerações da Norma NBR 6118:2014.

No primeiro método são realizadas análises rigorosas, compatibilizando-se as deformações e as rotações, obtidas por integração das curvaturas ao longo do eixo da viga, curvaturas essas compatíveis ponto a ponto com os correspondentes valores de momentos de flexão. Essa compatibilização é assegurada pela aplicação das curvas momento-curvatura obtidas no MK-UFRJ. Um procedimento iterativo é aplicado, em que a incógnita em cada análise é a carga distribuída aplicada, que zera a rotação no engaste. A característica deste primeiro método é a aplicação dos diagramas tensão-deformação específica de cálculo do aço (Figura 2-1), que expressa os critérios da NBR 6118:2014 para as verificações no ELU (flexão simples): limitação da deformação específica do aço em 10⁰/₀₀ e consideração do material como elastoplástico perfeito, com patamar na tensão de escoamento de cálculo f_{yd} , sem a consideração da tensão de ruptura do aço.

No segundo método também utilizam-se os critérios da NBR 6118:2014 para as verificações no ELU, mas de forma simplificada, considerando-se a extensão do trecho plastificado até uma distância de 0,6h do engaste. Essa hipótese é definida no EUROCODE 2 (2004), no seu item 5.6.3 e no CÓDIGO MODELO 2010, item 7.2.2.4.3. Essa hipótese foi também considerada nos estudos de BUCHAIM e VAZ (2006) e BUCHAIM (2013).

No terceiro método também são realizadas análises rigorosas, com integração das curvaturas ao longo do eixo da viga, mas considera-se um diagrama tensão-deformação específica mais realístico para o aço, levando-se em conta que esse rompe para uma tensão de ruptura $f_{std} = 1,1 f_{yd}$ e que o rompimento ocorre a 8%, que é o limite de ruptura do aço CA-50, conforme definido na NBR 7480:2007.

No quarto método são aplicadas as simplificações propostas por LEONHARDT (1978). O esquema dessas simplificações é reproduzido na Figura 4-1. As nomenclaturas utilizadas na figura estão definidas nesta referência.

Nessa abordagem é considerada uma área plastificada “média” simplificada, aproximada por um retângulo, de altura igual ao valor da curvatura “plástica” e com a base adotada de modo a se obter uma compatibilidade entre a área real e a área equivalente. Os valores correspondentes à parte elástica são calculados pela Resistência dos Materiais. A rotação total inclui a parcela plástica somada à parcela elástica.

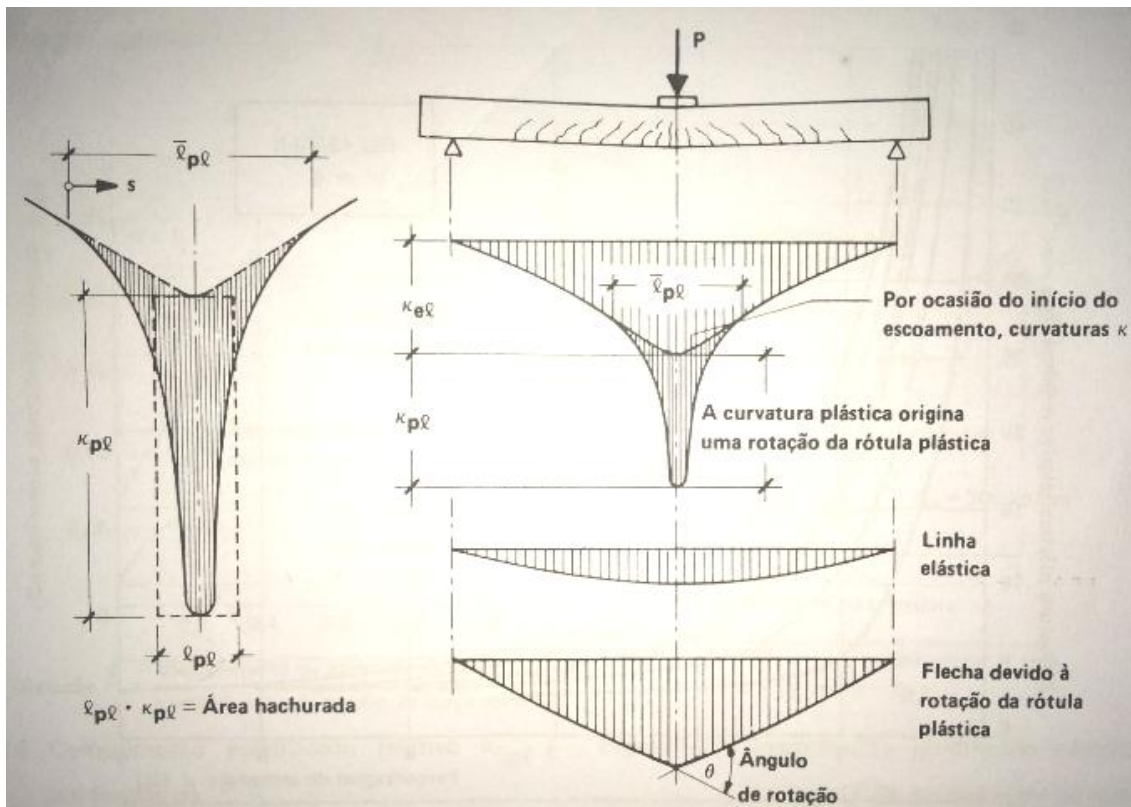


Figura 4-1 – Retirada de LEONHARDT (1978).

4.1. Planilha para cálculo pelo Método 1

Neste trabalho foram desenvolvidas planilhas no aplicativo MATHCAD (versão 15.0), com as sequências de cálculo para os diferentes métodos.

Os dados principais de entrada para a planilha são pontos das curvas momento-curvatura, obtidos por meio do programa MK-UFRJ desenvolvido por CASTRO (2008). Esses pontos são salvos em um arquivo do tipo *txt*.

Com o comando *import*, o MATHCAD faz a leitura do arquivo *txt* e salva, em dois vetores independentes, os valores respectivos de momentos e curvaturas. Os

valores são colocados em vetores “x” e “y”, já com as curvaturas em metro e os momentos em kNm. Assim são gerados gráficos (xy) das relações momento x curvatura.

Ao se analisar os gráficos da relação momento x curvatura observa-se que, especificamente nos casos estudados em flexão simples, é possível se dividir as figuras em dois trechos praticamente lineares, possibilitando, assim, aproximar o gráfico em duas partes, definindo-se para cada uma delas uma equação diferente. Nos gráficos, observa-se o valor do momento que divide as duas curvas, e assim tem-se o valor da sua ordenada nos vetores “x” e “y”.

Para $K_x = 0,10$, momento divisor $M_{div} = 114,53$ kNm;

Para $K_x = 0,25$, momento divisor $M_{div} = 271,51$ kNm;

Para $K_x = 0,35$, momento divisor $M_{div} = 367,99$ kNm;

Para $K_x = 0,45$, momento divisor $M_{div} = 460,58$ kNm;

Para $K_x = 0,50$, momento divisor $M_{div} = 495,70$ kNm.

Assim, aproximando-se a primeira curva por uma equação linear, interpola-se uma reta entre os valores obtidos até a ordenada do momento divisor. Esse procedimento é realizado duas vezes, a primeira para os momentos positivos e a segunda para os momentos negativos.

A segunda curva começa na ordenada posterior ao momento divisor e vai até o momento máximo.

Para $K_x = 0,10$, momento último, $M_u = 119,06$ kNm;

Para $K_x = 0,25$, momento último, $M_u = 281,20$ kNm;

Para $K_x = 0,35$, momento último, $M_u = 376,20$ kNm;

Para $K_x = 0,45$, momento último, $M_u = 465,78$ kNm;

Para $K_x = 0,50$, momento último, $M_u = 499,20$ kNm.

A segunda curva foi interpolada por um polinômio de grau oito, para que se consiga obter continuamente os valores de momentos e curvaturas em cada ponto. É aplicado um processo de regressão ou interpolação polinomial.

Esse ajuste de uma função polinomial de duas variáveis independentes é possível por meio da função *regress*, pertencente à biblioteca do MATHCAD.

São interpolados dois polinômios: um para momentos positivos e outro para negativos, sendo estes polinômios iguais em módulo.

Sendo assim, tem-se o cálculo interativo das cargas distribuídas máximas. O processo consiste em transformar a viga biengastada real em uma viga biapoiada equivalente, com um carregamento a ser determinado (carregamento máximo que a viga suporta), sendo aplicados nos apoios momentos iguais ao momento máximo suportado pela seção M_u . É inicialmente aplicado o carregamento correspondente à análise elástica linear. Irão necessariamente resultar nos apoios, inicialmente, rotações com sinal positivo (mesmo sinal dos momentos aplicados nas extremidades). O carregamento é progressivamente aumentado até numericamente se zerar a rotação no apoio, que é a condição de contorno da viga engastada real.

Inicia-se utilizando o carregamento encontrado na análise elástica linear.

q para $K_x = 0,10$: 14,40 kN/m;

q para $K_x = 0,25$: 34,00 kN/m;

q para $K_x = 0,35$: 45,53 kN/m;

q para $K_x = 0,45$: 55,80 kN/m;

q para $K_x = 0,50$: 60,40 kN/m.

A viga tem 10,00 m de vão, e como é simétrica, as análises se processarão somente até o meio do vão. Dividi-se o trecho até o meio do vão em 100 partes para se obterem resultados bem precisos.

A equação geral de momentos de flexão em um ponto qualquer de uma viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído “q” é uma expressão quadrática:

$$M(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (4.1)$$

No caso em estudo:

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} + \frac{ql^2}{12} \quad (4.2)$$

No MATHCAD o “x” foi denominado como “P”, que são os pontos de estudo e “l” como “Le”. A parcela da equação $ql^2/12$ corresponde ao momento inicial no engaste. Nos cálculos posteriores foram considerados os momentos máximos M_u listados anteriormente. Assim, a equação no MATHCAD, no caso geral, passa a ser:

$$M = \frac{qP^2}{2} - \frac{q \times Le \times P}{2} + M_u \quad (4.3)$$

Para se obter as curvaturas relacionadas aos momentos encontrados basta utilizar as funções criadas para interpolar as curvas momento X curvatura e encontrar a curvatura desejada. Se a curvatura procurada for correspondente a um momento menor que o momento divisor, entra-se na primeira curva, e se for maior, entra-se na segunda curva.

Assim cria-se um vetor de curvaturas, onde cada curvatura corresponde a um momento, ou seja, têm-se 101 valores de curvatura, um para cada ponto de estudo.

Então se segue para o cálculo das rotações. A rotação corresponde à integral da curvatura ao longo do eixo da viga. Como se tem todos os valores de curvatura, a rotação pode ser obtida como sendo a área sob a curva das curvaturas. Assim, somam-se numericamente as áreas dos cem trapézios obtidos e encontra-se o valor da rotação. A expressão (4.4) faz o somatório dessas áreas.

$$\sum_{i=0}^{99} (((curv)_i + (curv)_{1+i}) \times delta \div 20) \quad (4.4)$$


Onde:

$$delta = \frac{Le}{20} \quad (4.5)$$

Com o valor obtido tem-se a rotação para a carga original e deseja-se encontrar qual o valor máximo de carga para que se tenha a rotação igual à zero no engaste.

Repete-se o cálculo incrementando-se o valor da carga “q” até que se possa encontrar uma rotação numericamente igual à zero.

As Figuras 4-2 a 4-12 mostram as páginas da planilha MATHCAD para $K_x = 0,25$, para exemplificar a sequência de cálculos para cada etapa da aplicação do Método 1.



Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Escola Politécnica
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas
Mestrado Profissional
Programa de Pós Graduação em Projeto de Estruturas

MÉTODO 1

Aluna: Rejane Azevedo de Almeida Fonseca
Orientador: Professor Sérgio Hampshire

1. Dados iniciais:

alt := 0.80	b := 0.20	As := 10.06	ORIGIN := 0
d := 0.72			
fy := 50		fck := 25000	
$f_{yd} := \frac{f_y}{1.15}$		$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{1.4}$	

2. O arquivo de entrada para a planilha é um arquivo com extensão .txt obtido pelo programa MK-UFRJ:




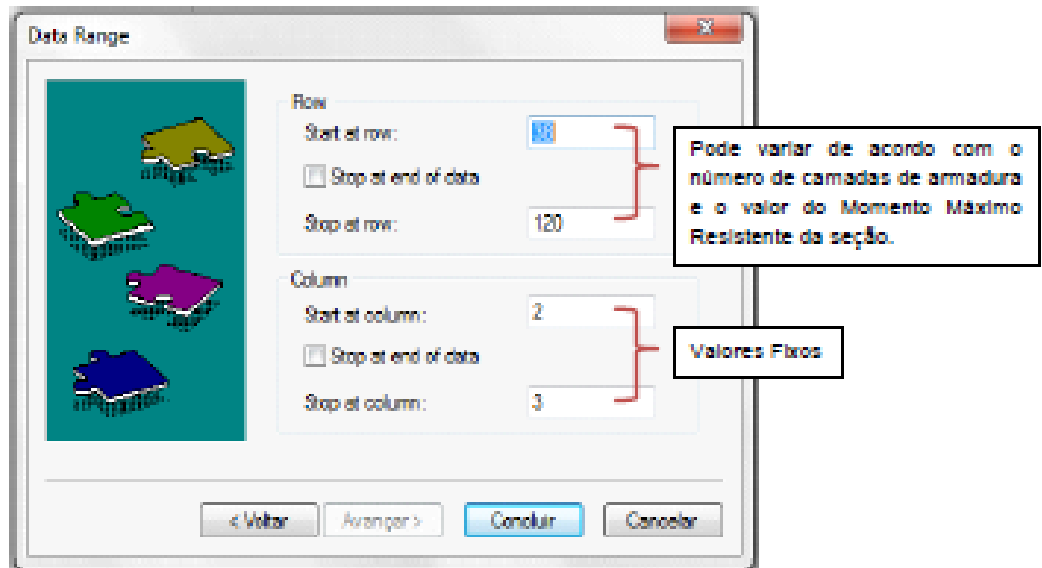
Figura 4-2 – Página inicial, programa MATHCAD, Método 1 – $K_x = 0,25$.

3. Importando o arquivo:

Após obter o arquivo .txt no programa MK-UFRJ, clicar com o botão direito do mouse sobre a Matrix **A** abaixo - **Import**;

No botão **Browse** indicar onde está salvo o arquivo .txt gerado pelo MK-UFRJ;

Clicar em **Avançar...** Aparecerá a seguinte janela:



Após clicar em **Concluir** os dados serão importados para o Mathcad.

2ª análise

$kx := 0.25$

$A :=$

	0	1
0	6.71	0.108
1	13.41	0.215
2	20.1	0.323
3	26.79	0.431
4	33.48	0.54
5	40.16	0.648
6	46.83	0.757
7	53.5	0.866
8	60.16	0.976
9	66.81	...

$$x := A^{(0)}$$

$$y := A^{(1)} \div 1000$$

$$h := -A^{(0)}$$

$$g := -(A^{(1)} \div 1000)$$

Figura 4-3 – Página dois, importação dos arquivos do MK-UFRJ.

	0
0	1.0752·10 ⁻⁴
1	2.1526·10 ⁻⁴
2	3.2322·10 ⁻⁴
3	4.314·10 ⁻⁴
4	5.3981·10 ⁻⁴
5	6.4845·10 ⁻⁴
6	7.5733·10 ⁻⁴
7	8.6646·10 ⁻⁴
8	9.7583·10 ⁻⁴
9	1.08546·10 ⁻³
10	1.19534·10 ⁻³
11	1.3055·10 ⁻³
12	1.41592·10 ⁻³
13	1.52663·10 ⁻³
14	1.63762·10 ⁻³
15	...

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

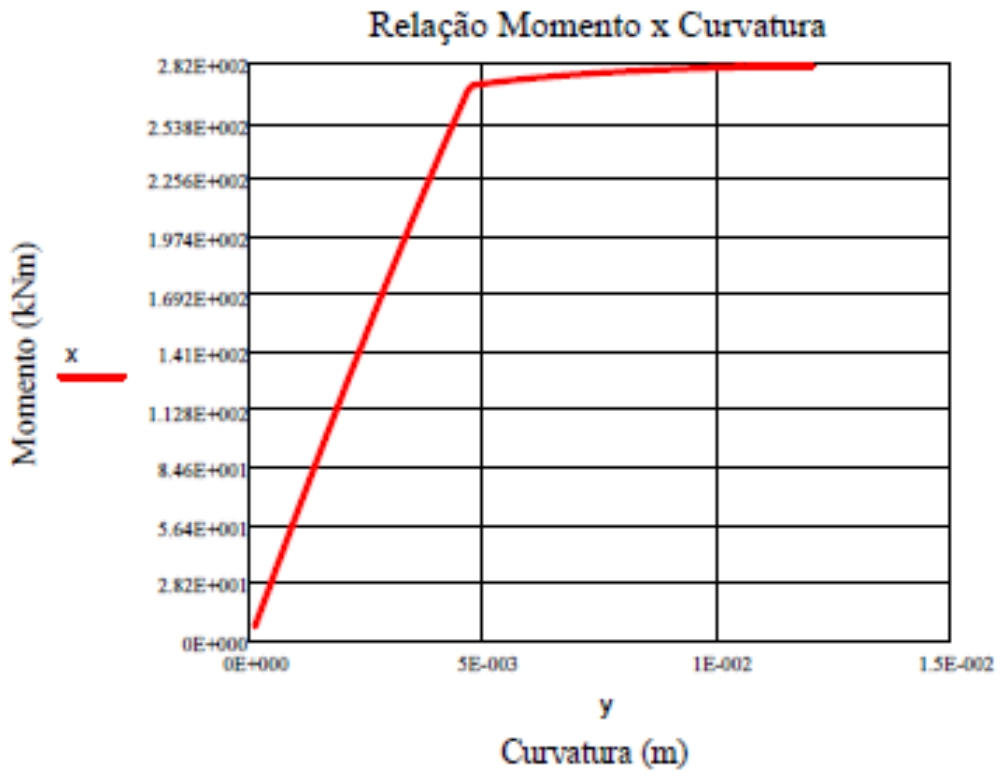


Figura 4-4 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.

Momento Parte 1

$$D1M(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ x1_i \leftarrow x_i \\ x1 \end{cases}$$

a := D1M(41) a =

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

Curvatura Parte 1

$$D1c(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ y1_i \leftarrow y_i \\ y1 \end{cases}$$

b := D1c(41) b =

	0
0	1.075·10 ⁻⁴
1	2.153·10 ⁻⁴
2	3.232·10 ⁻⁴
3	4.314·10 ⁻⁴
4	5.398·10 ⁻⁴
5	6.484·10 ⁻⁴
6	7.573·10 ⁻⁴
7	8.665·10 ⁻⁴
8	9.758·10 ⁻⁴
9	1.085·10 ⁻³
10	1.195·10 ⁻³
11	1.305·10 ⁻³
12	1.416·10 ⁻³
13	1.527·10 ⁻³
14	1.638·10 ⁻³
15	...

Figura 4-5 – Página quatro, curva 1.

Interpolação Positiva

Primeira Reta

$$\text{line}(a, b) = \begin{pmatrix} -7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$p(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + -7.4874 \times 10^{-5}$$

$$p(210) = 3.573 \times 10^{-3}$$

Interpolação Negativa

Primeira Reta

$$\text{line}(-a, -b) = \begin{pmatrix} 7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$t(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + 7.4874 \times 10^{-5}$$

$$t(-210) = -3.573 \times 10^{-3}$$

Figura 4-6 – Página cinco, interpolação da curva 1.

Momento Parte 2

$$D2M(p) := \begin{cases} \text{for } i \in 42..p \\ x2_i \leftarrow x_i \\ x2 \end{cases}$$

Curvatura Parte 2

$$D2c(p) := \begin{cases} \text{for } i \in 42..p \\ y2_i \leftarrow y_i \\ y2 \end{cases}$$

$c := D2M(124)$

$c =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

$d := D2c(124)$

$d =$

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

Figura 4-7 – Página seis, curva 2.

Segundo Polinomio

$k := 8$

$s := \text{regress}(c, d, k)$

$q(z) := \text{interp}(s, c, d, z)$

	0
0	3
1	3
2	8
3	$-1.212 \cdot 10^{-9}$
4	$-1.776 \cdot 10^6$
5	$4.515 \cdot 10^4$
6	-491.988
7	2.978
8	-0.011
9	$2.357 \cdot 10^{-5}$
10	$-2.854 \cdot 10^{-8}$
11	$1.481 \cdot 10^{-11}$

O polinômio obtido é do tipo:

$$q(a) := s_{11} \cdot a^8 + s_{10} \cdot a^7 + s_9 \cdot a^6 + s_8 \cdot a^5 + s_7 \cdot a^4 + s_6 \cdot a^3 + s_5 \cdot a^2 + s_4 \cdot a^1 + s_3 \cdot a^0$$

$$q(270) = 4.073 \times 10^{-3}$$

Segundo Polinomio

$k := 8$

$s := \text{regress}(-c, -d, k)$

$r(z) := \text{interp}(s, -c, -d, z)$

	0
0	3
1	3
2	8
3	$1.212 \cdot 10^{-9}$
4	$-1.776 \cdot 10^6$
5	$-4.515 \cdot 10^4$
6	-491.988
7	-2.978
8	-0.011
9	$-2.357 \cdot 10^{-5}$
10	$-2.854 \cdot 10^{-8}$
11	$-1.481 \cdot 10^{-11}$

O polinômio obtido é do tipo:

$$r(a) := s_{11} \cdot a^8 + s_{10} \cdot a^7 + s_9 \cdot a^6 + s_8 \cdot a^5 + s_7 \cdot a^4 + s_6 \cdot a^3 + s_5 \cdot a^2 + s_4 \cdot a^1 + s_3 \cdot a^0$$

$$r(-270) = -4.073 \times 10^{-3}$$

Figura 4-8 – Página sete, interpolação da Curva 2.

$$\text{linc}(r) := \begin{cases} (p(r)) & \text{if } r \geq 0 \\ (t(r)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{func}(a) := \begin{cases} q(a) & \text{if } a \geq 0 \\ r(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linc}(210) = 3.573 \times 10^{-3}$$

$$\text{func}(270) = 4.073 \times 10^{-3}$$

Cálculo do Momento:

$$\begin{aligned} q &:= 34 \\ Le &:= 10 \end{aligned} \quad \text{Mu} := 281.2$$

$$\text{delta} := \frac{Le}{20} \quad \text{delta} = 0.5$$

$$\text{MontaP}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M := q \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(Le \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (Mu)$$

Figura 4-9 – Página oito, cálculo do momento.

Cálculo das Curvaturas

$$Mdiv := 271.51$$

$$Curv(M) := \begin{cases} \text{linc}(M) & \text{if } M \leq Mdiv \\ \text{func}(M) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Curv(155) = 2.618 \times 10^{-3}$$

$$\text{MontaCurv}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \quad (\text{Curvaturas})_i \leftarrow \text{Curv}(M_i) \\ \text{Curvaturas} \end{cases}$$

MontaCurv(100) =

	0
0	0.012
1	$5.15 \cdot 10^{-3}$
2	$4.517 \cdot 10^{-3}$
3	$4.373 \cdot 10^{-3}$
4	$4.231 \cdot 10^{-3}$
5	$4.09 \cdot 10^{-3}$
6	$3.95 \cdot 10^{-3}$
7	$3.812 \cdot 10^{-3}$
8	$3.676 \cdot 10^{-3}$
9	$3.541 \cdot 10^{-3}$
10	$3.407 \cdot 10^{-3}$
11	$3.275 \cdot 10^{-3}$
12	$3.144 \cdot 10^{-3}$
13	$3.015 \cdot 10^{-3}$
14	$2.887 \cdot 10^{-3}$
15	...

Figura 4-10 – Página nove, curvaturas.

Cálculo das Rotações

$$\sum_{i=0}^{99} \left[(\text{MontaCurv}(100)_i + \text{MontaCurv}(100)_{1+i}) \cdot \text{delta} \div 20 \right] = 8.321 \times 10^{-5}$$

Cálculo do Momento 2:

$$\begin{aligned} q2 &:= 34.11 \\ \text{Le} &:= 10 & \text{Mu} &:= 281.2 \\ \text{delta} &:= \frac{\text{Le}}{20} & \text{delta} &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{MontaP}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M2 := q2 \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q2 \cdot \frac{(\text{Le} \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (\text{Mu})$$

Cálculo das Curvaturas 2

$$\begin{aligned} \text{Mdiv} &:= 271.51 \\ \text{Curv}(M2) &:= \begin{cases} \text{linc}(M2) & \text{if } M2 \leq \text{Mdiv} \\ \text{func}(M2) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Curv}(60.16) = 9.701 \times 10^{-4}$$

$$\text{MontaCurv2}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (\text{Curvaturas})_i \leftarrow \text{Curv}(M2_i) \\ \text{Curvaturas} \end{cases}$$

Figura 4-11 – Página dez, rotações e começo das iterações.

	0
0	0.012
1	$5.142 \cdot 10^{-3}$
2	$4.516 \cdot 10^{-3}$
3	$4.372 \cdot 10^{-3}$
4	$4.229 \cdot 10^{-3}$
5	$4.088 \cdot 10^{-3}$
6	$3.948 \cdot 10^{-3}$
MontaCurv2(100) -	7
	$3.809 \cdot 10^{-3}$
	8
	$3.672 \cdot 10^{-3}$
	9
	$3.537 \cdot 10^{-3}$
	10
	$3.403 \cdot 10^{-3}$
	11
	$3.27 \cdot 10^{-3}$
	12
	$3.139 \cdot 10^{-3}$
	13
	$3.009 \cdot 10^{-3}$
	14
	$2.881 \cdot 10^{-3}$
	15
	...

Cálculo das Rotações 2

$$\sum_{i=0}^{99} [(MontaCurv2(100)_i + MontaCurv2(100)_{i+1}) \cdot \text{delta} \div 20] = 3.243 \times 10^{-6}$$

Figura 4-12 – Página onze, vetor curvatura e rotação próxima à zero.

A planilha do MATHCAD foi executada para todos os K_x estudados, e os resultados constam nas Tabelas 4-1 a 4-5, e os valores dos δ estão nas Tabelas 4-6 a 4-10.

$$\delta = \frac{q_{original}}{q_{alcançado}} \quad (4.6)$$

Tabela 4-1 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,10$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
14,4	0,0002253
14,5	0,00008145
14,51	0,00006696
14,52	0,00005278
14,53	0,00003838
14,54	0,00002386
14,55	0,000009484
14,56	-0,000004823

Tabela 4-2 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,25$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
34	0,00008321
34,1	0,00001051
34,11	0,000003243
34,12	-0,000004004

Tabela 4-3 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,35$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
45,53	9,455E-07
45,531	3,487E-07
45,532	-2,481E-07
45,535	-0,000002039
45,54	-0,000005023

Tabela 4-4 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,45$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
55,8	0,00000556
55,81	1,405E-07
55,82	-0,000005279
55,83	-0,0000107
55,84	-0,00001612
55,85	-0,00002154
55,9	-0,00004864

Tabela 4-5 – Resultados do Método 1 para $K_x = 0,50$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
60,4	0,00008197
60,5	0,00002919
60,55	0,000002806
60,56	-0,000002471
60,6	-0,00002358
60,7	-0,00007636

Tabela 4-6 – Resultados de δ para $K_x = 0,10$.

$\delta = 0,989691$	
q original (kN/m)	14,4
q alcançado (kN/m)	14,55

Tabela 4-7 – Resultados de δ para $K_x = 0,25$.

$\delta = 0,996775$	
q original (kN/m)	34
q alcançado (kN/m)	34,11

Tabela 4-8 – Resultados de δ para $K_x = 0,35$.

$\delta = 0,999978$	
q original (kN/m)	45,53
q alcançado (kN/m)	45,531

Tabela 4-9 – Resultados de δ para $K_x = 0,45$.

$\delta = 0,999821$	
q original (kN/m)	55,8
q alcançado (kN/m)	55,81

Tabela 4-10 – Resultados de δ para $K_x = 0,50$.

$\delta = 0,997523$	
q original (kN/m)	60,4
q alcançado (kN/m)	60,55

Os resultados indicaram que com a consideração dos diagramas tensão-deformação específica do aço, de acordo com os critérios de dimensionamento à flexão simples da NBR 6118:2014, não se consegue uma representação real do comportamento não-linear das seções de concreto armado, obtendo-se coeficientes de redistribuição próximos à unidade.

Na Figura 4-13, tem-se o diagrama esquemático de momentos de flexão, utilizando-se o carregamento $q_{\text{alcançado}}$ e destacando-se os pontos principais do método.

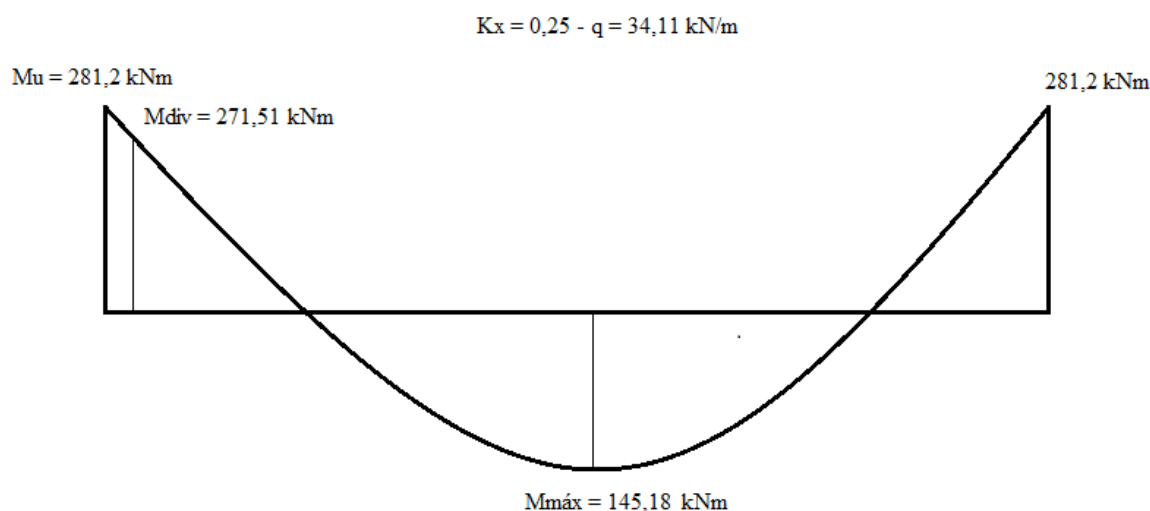


Figura 4-13 – Diagrama de momentos de flexão, Método 1.

4.2. Planilha para cálculo pelo Método 2

Assim como no Método 1 também foram desenvolvidas planilhas no MATHCAD para o segundo método.

Os principais dados de entrada são os pontos da curva momento-curvatura obtidos no programa MK-UFRJ, importados da mesma forma que no primeiro método e dispostos em vetores “x” e “y”, gerando gráficos da relação momento x curvatura.

Por o gráfico criado ser praticamente linear e dividido em duas curvas, encontram-se facilmente os momentos divisores (momentos esses já encontrados no Método 1).

Neste método as duas curvas são aproximadas por equações lineares. Interpola-se uma reta entre o valor inicial e o momento divisor e outra reta começando da ordenada posterior ao momento divisor até o momento máximo. Para as duas retas são efetuadas duas interpolações, uma para momentos positivos e outra para momentos negativos.

Segue-se para o cálculo de momentos. O momento último adotado é o mesmo encontrado no programa MK-UFRJ. Como no primeiro método a viga de 10,00 m de vão é avaliada somente até o meio do vão.

A equação de momentos de uma viga biengastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído “q”, adaptada ao MATHCAD, serve como base para o cálculo nos diversos pontos da viga.

$$M = \frac{qP^2}{2} - \frac{q \times L \times P}{2} + M_u, \text{ conforme equação (4.3).}$$

Os valores de “q” são obtidos de forma interativa, para se obter rotações no engaste próximas de zero.

A rótula é considerada a uma distância de 0,6h do apoio. Como a altura da viga é 0,80 m, essa distância corresponde a 0,48 m. No MATHCAD essa distância foi denominada como “w”. Logo, w = 0,48 m.

É necessário obter o valor do momento M_2 para esta distância “w”:

$$M_2 = \frac{qw^2}{2} - \frac{q \times L \times w}{2} + M_u \quad (4.7)$$

A partir das funções criadas para interpolar as curvas momento x curvatura, encontra-se a curvatura desejada. Se a curvatura procurada for correspondente a um momento menor que o momento divisor, entra-se na primeira curva e se for maior, entra-se na segunda curva.

Assim, deseja-se encontrar as curvaturas de pontos importantes da curva, correspondentes aos momentos M_2 , M_{div} e M_u . Então segue-se para o cálculo dos coeficientes das retas interpoladas no gráfico momento x curvatura (Figura 4-14).

O coeficiente angular “ a_1 ” corresponde à primeira curva, do ponto inicial até o momento divisor M_{div} :

$$a_1 = \frac{M_{div}}{Curv(M_{div})} \quad (4.8)$$

O coeficiente angular “ a_2 ” corresponde à segunda curva, do ponto do momento divisor M_{div} até o momento último M_u :

$$a_2 = \frac{M_u - M_{div}}{Curv(M_u) - Curv(M_{div})} \quad (4.9)$$

O coeficiente linear “ a_3 ” corresponde ao momento obtido estendendo-se a segunda curva até o eixo “y”:

$$a_3 = M_{div} - a_2 \times Curv(M_{div}) \quad (4.10)$$

O coeficiente angular “a₄” corresponde à reta fictícia que liga o ponto do momento M₂ ao momento último, M_u.

$$a_4 = \frac{M_u - M_2}{Curv(M_u) - Curv(M_2)} \quad (4.11)$$

O coeficiente linear “a₅” corresponde ao momento obtido estendendo essa reta fictícia, que liga M₂ a M_u, até o eixo “y”.

$$a_5 = M_2 - a_4 \times Curv(M_2) \quad (4.12)$$

Escrevendo-se a equação de momentos para uma posição “x” qualquer:

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{qLex}{2} + M_u \quad (4.13)$$

Assim, avaliam-se duas integrais das curvas, uma do ponto inicial até o ponto “w” e outra do ponto “w” até o meio do vão, somando-se os resultados. Busca-se sempre um resultado o mais próximo possível de zero.

$$INT1 = \int_w^{Le/2} (M(x) \div a_1) dx \quad (4.14)$$

$$INT2 = \int_0^w ((M(x) - a_5) \div a_4) dx \quad (4.15)$$

Nesse método o “q” original é obtido a partir do M_u do MK-UFRJ.

$$q_{original} = M_u \times 12 \div 100 \quad (4.16)$$

Os valores de δ correspondem ao “q” original dividido pelo “q” alcançado.

Pela NBR 6118:2014, para valores de K_x menores que 0,25, o δ vale 0,75, e para valores maiores ou iguais a 0,25, o δ é calculado por:

$$\delta = 1,25 \times K_x + 0,44 \quad (4.17)$$

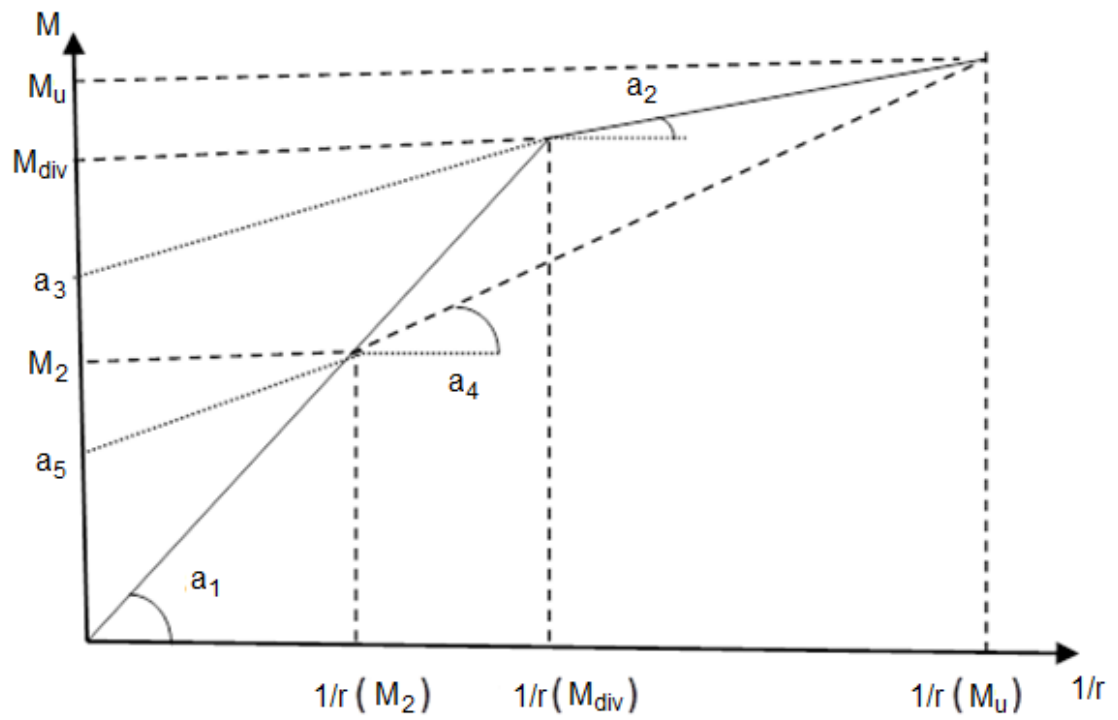


Figura 4-14 – Esquema do Método 2.

As Figuras 4-15 a 4-23 mostram as páginas da planilha MATHCAD para $K_x = 0,25$.



Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Escola Politécnica
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas
Mestrado Profissional
Programa de Pós Graduação em Projeto de Estruturas

MÉTODO 2

Aluna: Rejane Azevedo de Almeida Fonseca
Orientador: Professor Sérgio Hampshire

1. Dados iniciais:

alt := 0.80 b := 0.20 As := 10.06
d := 0.72
fy := 50 fck := 25000
fyd := $\frac{fy}{1.15}$ fcd := $\frac{fck}{1.4}$

ORIGIN := 0

2. O arquivo de entrada para a planilha é um arquivo com extensão .txt obtido pelo programa MK-UFRJ:



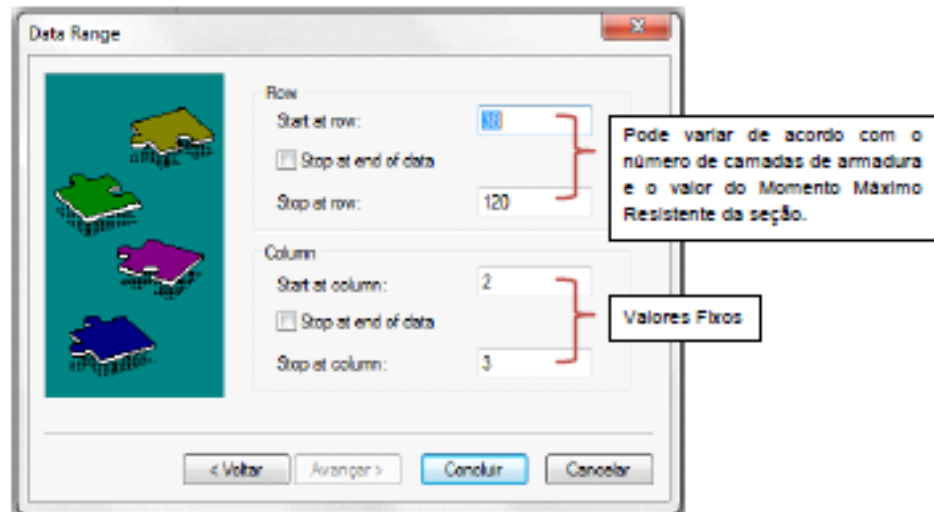
Figura 4-15 – Página inicial, programa MATHCAD método 2 – $K_x = 0,25$.

3. Importando o arquivo:

Após obter o arquivo .txt no programa MK-UFRJ, clicar com o botão direito do mouse sobre a Matrix **A** abaixo - **Import**;

No botão Browse indicar onde está salvo o arquivo .txt gerado pelo MK-UFRJ;

Clicar em **Avançar...** Aparecerá a seguinte janela:



Após clicar em **Concluir** os dados serão importados para o Mathcad.

2ª análise

$$kx := 0.25$$

$A :=$

	0	1
0	6.71	0.108
1	13.41	0.215
2	20.1	0.323
3	26.79	0.431
4	33.48	0.54
5	40.16	0.648
6	46.83	0.757
7	53.5	0.866
8	60.16	0.976
9	66.81	...

$$x := A^{(0)}$$

$$y := A^{(1)} \div 1000$$

$$h := -A^{(0)}$$

$$g := -(A^{(1)} \div 1000)$$

Figura 4-16 – Página dois, importando arquivos do MK-UFRJ.

	0
0	$1.0752 \cdot 10^{-4}$
1	$2.1526 \cdot 10^{-4}$
2	$3.2322 \cdot 10^{-4}$
3	$4.314 \cdot 10^{-4}$
4	$5.3981 \cdot 10^{-4}$
5	$6.4845 \cdot 10^{-4}$
6	$7.5733 \cdot 10^{-4}$
7	$8.6646 \cdot 10^{-4}$
8	$9.7583 \cdot 10^{-4}$
9	$1.08546 \cdot 10^{-3}$
10	$1.19534 \cdot 10^{-3}$
11	$1.3055 \cdot 10^{-3}$
12	$1.41592 \cdot 10^{-3}$
13	$1.52663 \cdot 10^{-3}$
14	$1.63762 \cdot 10^{-3}$
15	...

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

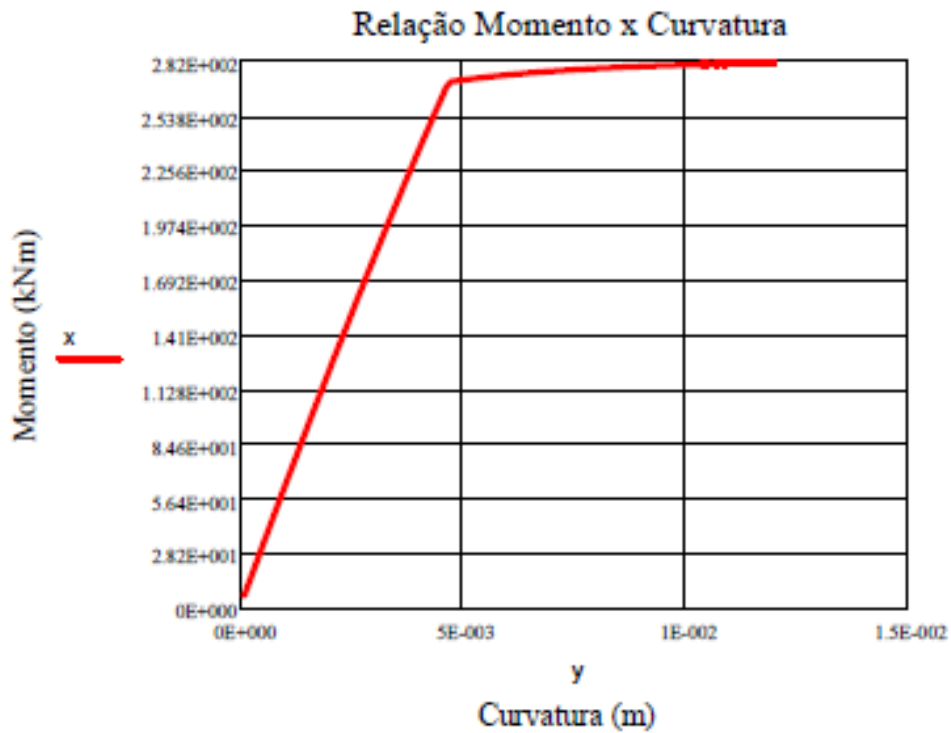


Figura 4-17 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.

Momento Parte 1

Curvatura Parte 1

$$D1M(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ x1_i \leftarrow x_i \\ x1 \end{cases}$$

$$D1c(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ y1_i \leftarrow y_i \\ y1 \end{cases}$$

a := D1M(41)

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

b := D1c(41)

	0
0	1.075·10 ⁻⁴
1	2.153·10 ⁻⁴
2	3.232·10 ⁻⁴
3	4.314·10 ⁻⁴
4	5.398·10 ⁻⁴
5	6.484·10 ⁻⁴
6	7.573·10 ⁻⁴
7	8.665·10 ⁻⁴
8	9.758·10 ⁻⁴
9	1.085·10 ⁻³
10	1.195·10 ⁻³
11	1.305·10 ⁻³
12	1.416·10 ⁻³
13	1.527·10 ⁻³
14	1.638·10 ⁻³
15	...

Figura 4-18 – Página quatro, curva 1.

Momento Parte 2

Curvatura Parte 2

D2M(p) :- $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 42..p \\ x2_i \leftarrow x_i \\ x2 \end{array} \right.$

D2c(p) :- $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 42..p \\ y2_i \leftarrow y_i \\ y2 \end{array} \right.$

c := D2M(124)

c -

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

d := D2c(124)

d -

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

Figura 4-19 – Página cinco, curva 2.

Primeira Reta

Interpolação Positiva

$$\text{line}(a, b) = \begin{pmatrix} -7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$p(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + -7.4874 \times 10^{-5}$$

$$p(60) = 9.674 \times 10^{-4}$$

Interpolação Negativa

$$\text{line}(-a, -b) = \begin{pmatrix} 7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$t(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + 7.4874 \times 10^{-5}$$

$$t(-60) = -9.674 \times 10^{-4}$$

Segunda Reta

Interpolação Positiva

$$\text{line}(c, d) = \begin{pmatrix} -3.627731 \times 10^{-5} \\ 3.05676 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$q(a) := (3.05676 \times 10^{-5} \cdot a) + -3.627731 \times 10^{-5}$$

$$q(104) = 3.143 \times 10^{-3}$$

Interpolação Negativa

$$\text{line}(-c, -d) = \begin{pmatrix} 3.627731 \times 10^{-5} \\ 3.05676 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$u(a) := (3.05676 \times 10^{-5} \cdot a) + 3.627731 \times 10^{-5}$$

$$u(-104) = -3.143 \times 10^{-3}$$

Figura 4-20 – Página seis, interpolações das retas.

$$\text{linc}(r) := \begin{cases} (p(r)) & \text{if } r \geq 0 \\ (t(r)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linca}(a) := \begin{cases} q(a) & \text{if } a \geq 0 \\ u(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linc}(60) = 9.674 \times 10^{-4}$$

$$\text{linca}(104) = 3.143 \times 10^{-3}$$

Cálculo do Momento:

$$Le := 10 \quad Mu := 281.2$$

$$q := 44 \quad \text{adotar valores para } q$$

$$\text{delta} := \frac{Le}{20} \quad \text{delta} = 0.5$$

$$\text{MontaP}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M := q \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(Le \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (Mu)$$

Cálculo do momento na distância de $w = 0,6h$

$$w := 0.6 \cdot \text{alt}$$

$$w = 0.48$$

$$M2 := q \cdot \frac{w^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(Le \cdot w)}{2} \right] + (Mu)$$

$$M2 = 180.669$$

Figura 4-21 – Página sete, cálculo dos momentos.

Cálculo das Curvaturas

$$M_{div} := 271.51$$

$$Curv(M) := \begin{cases} \text{linc}(M) & \text{if } |M| \leq |M_{div}| \\ \text{linca}(M) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Curv(M2) = 3.063 \times 10^{-3}$$

$$Curv(Mu) = 8.559 \times 10^{-3}$$

$$Curv(M_{div}) = 4.641 \times 10^{-3}$$

Cálculo dos Coeficientes das Retas (Inverso do EI)

$$a1 := \frac{(M_{div})}{Curv(M_{div})} = 58497.556418 \quad a2 := \frac{[(Mu) - (M_{div})]}{(Curv(Mu) - Curv(M_{div}))} = 2.4732 \times 10^3$$

$$a3 := M_{div} - a2 \cdot Curv(M_{div}) = 260.031$$

$$a4 := \frac{[(Mu) - (M2)]}{(Curv(Mu) - Curv(M2))} = 1.8292 \times 10^4$$

$$a5 := M2 - a4 \cdot Curv(M2) = 124.6324$$

Figura 4-22 – Página oito, cálculo das curvaturas e dos coeficientes.

$$M(x) := q \cdot \frac{x^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(Le-x)}{2} \right] + (Mu)$$

$$INT1 := \int_w^{Le-2} M(x) \div a1 \, dx$$

$$INT1 = -9.193 \times 10^{-3}$$

$$INT2 := \int_0^w [(M(x) - a5) \div a4] \, dx = 2.767 \times 10^{-3}$$

$$INT2 = 0.003$$

$$INT1 + INT2 = -6.426 \times 10^{-3}$$

$$\text{delta} := (Mu - 12 \div 100) \div q$$

$$\text{delta} = 0.767$$

$$kx := \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot Mu \div [0.2 - (0.72)^2 \cdot fcd]}{0.85}}}{0.8}$$

$$kx = 0.248$$

$$\text{deltaN}(kx) := \begin{cases} 0.75 & \text{if } kx < 0.25 \\ 1.25 \cdot kx + 0.44 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{deltaN}(kx) = 0.75$$

Figura 4-23 – Página nove, cálculo das integrais e do delta.

A planilha do Método 2 foi executada para todos os K_x estudados, e os resultados estão dispostos nas Tabelas 4-11 a 4-15.

Tabela 4-11 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,10$.

q original (kN/m)	14,2872
q alcançado (kN/m)	21,00

Tabela 4-12 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,25$.

q original (kN/m)	33,744
q alcançado (kN/m)	44,00

Tabela 4-13 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,35$.

q original (kN/m)	45,144
q alcançado (kN/m)	54,00

Tabela 4-14 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,45$.

q original (kN/m)	55,2696
q alcançado (kN/m)	63,00

Tabela 4-15 – Resultados do Método 2 para $K_x = 0,50$.

q original (kN/m)	59,904
q alcançado (kN/m)	68,00

Assim, têm-se os valores de δ para cada K_x estudado (Tabela 4-16).

Tabela 4-16 – Resultados de δ para o Método 2.

K_x	δ
0,10	0,68
0,25	0,77
0,35	0,84
0,45	0,88
0,50	0,88

Na Figura 4-24, tem-se o diagrama esquemático de momentos de flexão, utilizando-se o carregamento $q_{\text{alcançado}}$ e destacando-se os pontos e distâncias principais do método.

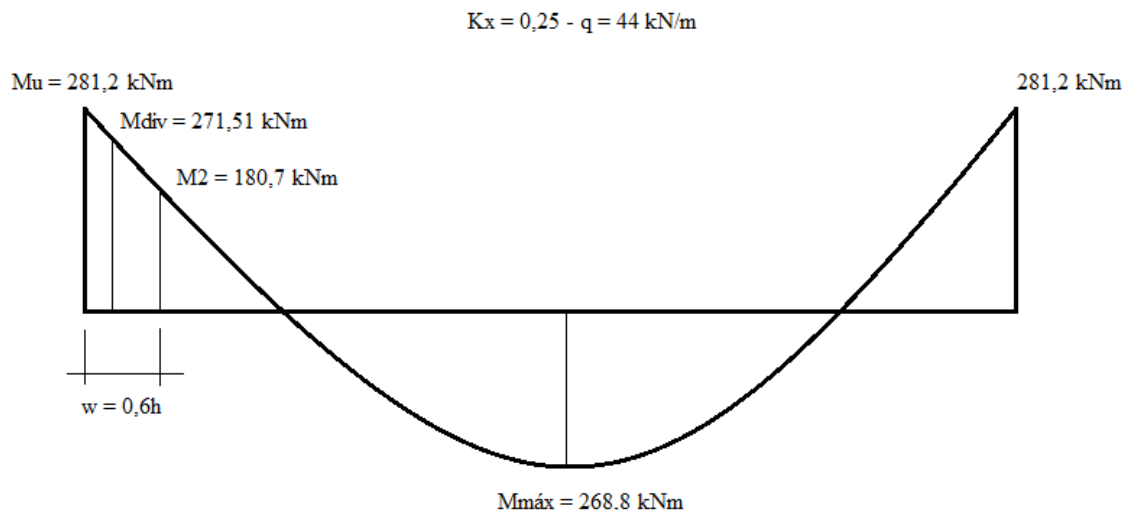


Figura 4-24 – Diagrama de momentos de flexão, Método 2.

4.3. Planilha para cálculo pelo Método 3

Assim como nos outros métodos foi desenvolvida uma planilha no MATHCAD com a sequência de cálculo.

Os dados principais de entrada para a planilha são pontos da curva momento-curvatura, obtidos com o programa MK-UFRJ. Esses pontos são salvos em um arquivo do tipo *txt* e importados para o MATHCAD.

Os dados são salvos em dois vetores “x” e “y” e gráficos (xy) das relações momento-curvatura são gerados.

Pode-se perceber que o gráfico é dividido em duas curvas. Somente são utilizados os dados do MK-UFRJ para a primeira curva, até o momento divisor.

A segunda curva é obtida do ponto seguinte ao momento divisor até um momento último diferente do encontrado no MK-UFRJ. Esse momento, M_R , é calculado considerando-se uma tensão de ruptura $f_{std} = 1,1 f_{yd}$, e que o rompimento ocorra a 8%, que é o limite de ruptura do aço CA-50, conforme a NBR 7480:2007.

Considerando F_s a resultante no aço e f_c a resultante no concreto, tem-se:

$$F_s = 1,1 \times f_{yd} \times A_s \quad (4.18)$$

$$f_c = 0,8 \times x \times 0,85 \times f_{cd} \times b \quad (4.19)$$

Igualando as duas expressões tem-se a profundidade “x” da linha neutra:

$$x_{LN} = \frac{1,1 \times f_{yd} \times A_s}{f_{cd} \times b \times 0,85 \times 0,8} \quad (4.20)$$

O momento MR é encontrado da seguinte forma:

$$MR = F_s \times (d - 0,4 \times x_{LN}) \quad (4.21)$$

A curvatura devido ao momento MR é encontrada dividindo 8‰ por “d-x_{LN}”:

$$curvatura = \frac{\frac{80}{1000}}{d - x_{LN}} \quad (4.22)$$

As duas curvas são tratadas como retas. Assim, aproximam-se as duas curvas por equações lineares. Interpola-se duas vezes, a primeira para momentos positivos e a segunda para momentos negativos.

Segue-se para o cálculo das cargas máximas admissíveis. Inicia-se utilizando-se como carregamento inicial:

q para $K_x = 0,10 = 14,40$ kN/m;

q para $K_x = 0,25 = 34,00$ kN/m;

q para $K_x = 0,35 = 45,53$ kN/m;

q para $K_x = 0,45 = 55,80$ kN/m;

q para $K_x = 0,50 = 60,40$ kN/m.

Os cálculos do Método 3 são os mesmos do Método 1, considerando-se somente que os momentos últimos agora são os momentos MR.

Os cálculos posteriores são os mesmos do Método 1, calculando-se até o meio do vão, dividindo-se essa extensão em 100 partes, encontrando-se as curvaturas

relacionadas aos momentos e depois calculando-se as rotações por meio da integral das curvaturas.

Com esse valor obtido tem-se a rotação para a carga original e incrementa-se essa carga até se atingir a rotação igual à zero no engaste.

As Figuras 4-25 a 4-35 mostram as páginas da planilha MATHCAD para $K_x = 0,25$, para exemplificar os procedimentos em cada etapa da aplicação do Método 3.



Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Escola Politécnica
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas
Mestrado Profissional
Programa de Pós Graduação em Projeto de Estruturas

MÉTODO 3

Aluna: Rejane Azevedo de Almeida Fonseca
Orientador: Professor Sérgio Hampshire

1. Dados iniciais:

alt := 0.80 b := 0.20 As := 10.06
d := 0.72
fy := 50 fck := 25000
fyd := $\frac{fy}{1.15}$ fcd := $\frac{fck}{1.4}$

ORIGIN := 0

2. O arquivo de entrada para a planilha é um arquivo com extensão .txt obtido pelo programa MK-UFRJ:



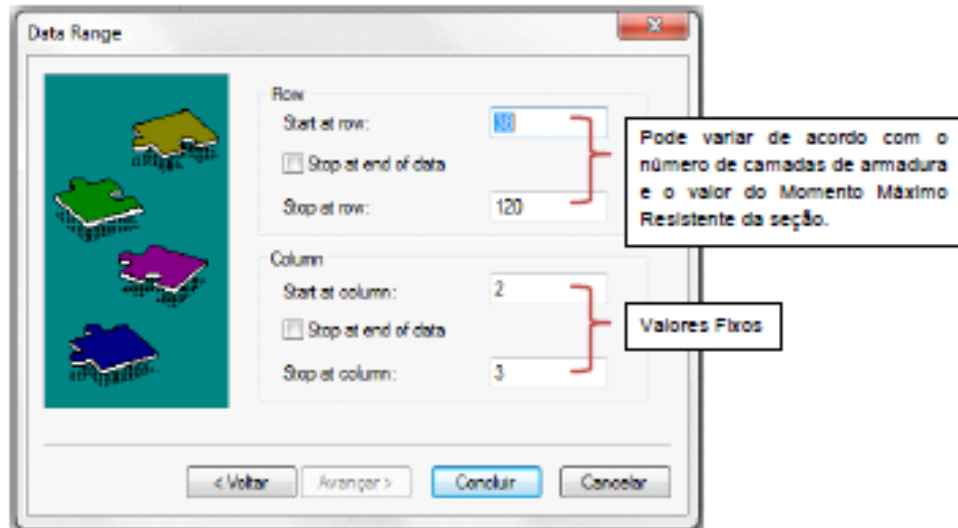
Figura 4-25 – Página inicial, programa MATHCAD, Método 3 – $K_x = 0,25$.

3. Importando o arquivo:

Após obter o arquivo .txt no programa MK-UFRJ, clicar com o botão direito do mouse sobre a Matrix **A** abaixo - **Import**;

No botão Browse indicar onde está salvo o arquivo .txt gerado pelo MK-UFRJ;

Clicar em **Avançar...** Aparecerá a seguinte janela:



Após clicar em **Concluir** os dados serão importados para o Mathcad.

2ª análise

$l_{ox} := 0.25$

$A_{ww} :=$

	0	1
0	6.71	0.108
1	13.41	0.215
2	20.1	0.323
3	26.79	0.431
4	33.48	0.54
5	40.16	0.648
6	46.83	0.757
7	53.5	0.866
8	60.16	0.976
9	66.81	...

$$x := A^{(0)}$$

$$y := A^{(1)} \div 1000$$

$$h := -A^{(0)}$$

$$g_k := -(A^{(1)} \div 1000)$$

Figura 4-26 – Página dois, importação dos arquivos do MK-UFRJ.

	0		0
0	$1.0752 \cdot 10^{-4}$	0	6.71
1	$2.1526 \cdot 10^{-4}$	1	13.41
2	$3.2322 \cdot 10^{-4}$	2	20.1
3	$4.314 \cdot 10^{-4}$	3	26.79
4	$5.3981 \cdot 10^{-4}$	4	33.48
5	$6.4845 \cdot 10^{-4}$	5	40.16
6	$7.5733 \cdot 10^{-4}$	6	46.83
7	$8.6646 \cdot 10^{-4}$	7	53.5
8	$9.7583 \cdot 10^{-4}$	8	60.16
9	$1.08546 \cdot 10^{-3}$	9	66.81
10	$1.19534 \cdot 10^{-3}$	10	73.46
11	$1.3055 \cdot 10^{-3}$	11	80.1
12	$1.41592 \cdot 10^{-3}$	12	86.73
13	$1.52663 \cdot 10^{-3}$	13	93.36
14	$1.63762 \cdot 10^{-3}$	14	99.98
15	...	15	...

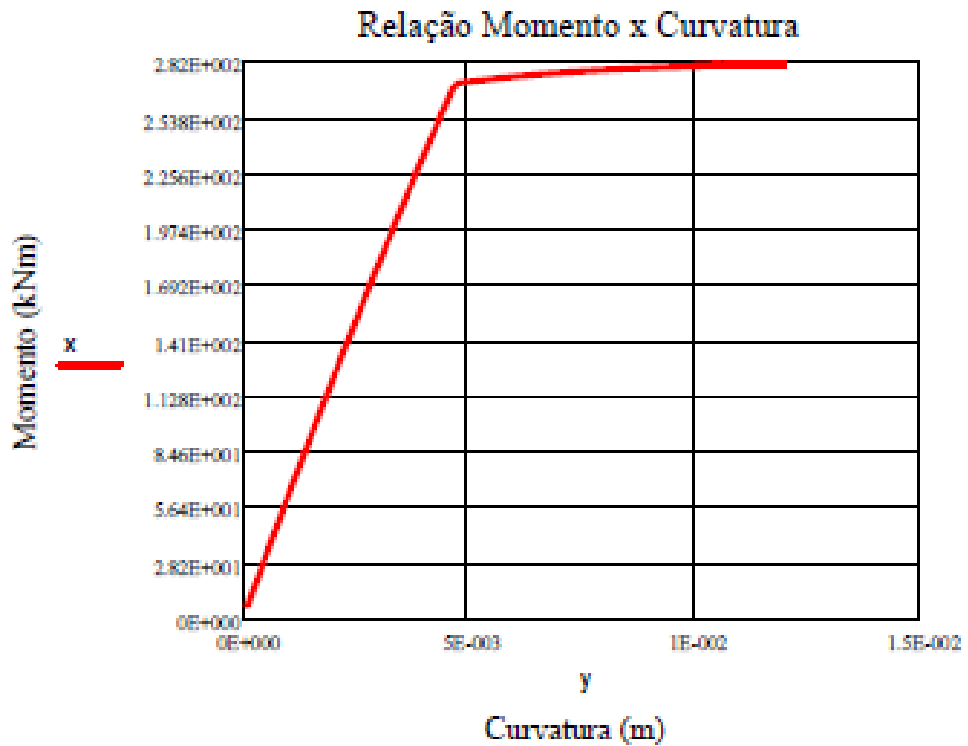


Figura 4-27 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.

Momento Parte 1

Curvatura Parte 1

$$D1M(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ x1_i \leftarrow x_i \\ x1 \end{cases}$$

$$D1c(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ y1_i \leftarrow y_i \\ y1 \end{cases}$$

a := D1M(41) a =

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

b := D1c(41) b =

	0
0	1.075·10 ⁻⁴
1	2.153·10 ⁻⁴
2	3.232·10 ⁻⁴
3	4.314·10 ⁻⁴
4	5.398·10 ⁻⁴
5	6.484·10 ⁻⁴
6	7.573·10 ⁻⁴
7	8.665·10 ⁻⁴
8	9.758·10 ⁻⁴
9	1.085·10 ⁻³
10	1.195·10 ⁻³
11	1.305·10 ⁻³
12	1.416·10 ⁻³
13	1.527·10 ⁻³
14	1.638·10 ⁻³
15	...

Figura 4-28 – Página quatro, curva 1.

Interpolação Positiva

Interpolação Negativa

Primeira Reta

Primeira Reta

$$\text{line}(a, b) = \begin{pmatrix} -7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$\text{line}(-a, -b) = \begin{pmatrix} 7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$p(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + -7.4874 \times 10^{-5}$$

$$t(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + 7.4874 \times 10^{-5}$$

$$p(114.53) = 1.915 \times 10^{-3}$$

$$t(-114.53) = -1.915 \times 10^{-3}$$

Figura 4-29 – Página cinco, interpolação da Curva 1.

Cálculo do Ponto de Momento Último

$$F_s := 1.1 \cdot f_{yd} \cdot A_s$$

$$x_{LN} := \frac{(1.1 \cdot f_{yd} \cdot A_s)}{(f_{cd} \cdot b \cdot 0.85 \cdot 0.8)}$$

$$x_{LN} = 0.198$$

$$\text{curvatura} := \left(\frac{\frac{80}{1000}}{d - x_{LN}} \right)$$

$$\text{curvatura} = 0.153$$

$$MR := [F_s \cdot (d - 0.4 \cdot x_{LN})]$$

$$MR = 308.287$$

CURVA 2

$$\underset{\text{MM}}{c} := \begin{pmatrix} x_{42} \\ MR \end{pmatrix} \quad \underset{\text{MM}}{d} := \begin{pmatrix} y_{42} \\ \text{curvatura} \end{pmatrix}$$

Figura 4-30 – Página seis, curva 2.

Interpolação Positiva

Segunda Reta

$$\text{line}(c, d) = \begin{pmatrix} -1.101262 \\ 4.069433 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$q(a) := (4.069433 \times 10^{-3} \cdot a) + -1.101262$$

$$q(308.287) = 0.153$$

Interpolação Negativa

Segunda Reta

$$\text{line}(-c, -d) = \begin{pmatrix} 1.101262 \\ 4.069433 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$u(a) := (4.069433 \times 10^{-3} \cdot a) + 1.101262$$

$$u(-308.287) = -0.153$$

Figura 4-31 – Página sete, interpolação da curva 2.

$$\text{linc}(r) := \begin{cases} (p(r)) & \text{if } r \geq 0 \\ (t(r)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linc}(a) := \begin{cases} q(a) & \text{if } a \geq 0 \\ u(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linc}(114.53) = 1.915 \times 10^{-3}$$

$$\text{linc}(-308.287) = -0.153$$

Cálculo do Momento:

$$g := 34 \quad \text{Mu} := MR$$

$$Le := 10 \quad \text{Mu} = 308.287$$

$$\text{delta} := \frac{Le}{20} \quad \text{delta} = 0.5$$

$$\text{MontaP}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M := q \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(Le \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (Mu)$$

Figura 4-32 – Página oito, cálculo dos momentos.

Cálculo das Curvaturas

$$Mdiv := 271.51$$

$$Curv(M) := \begin{cases} \text{linc}(M) & \text{if } |M| \leq |Mdiv| \\ \text{linca}(M) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Curv(308.287) = 0.153$$

$$\text{MontaCurv}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ \quad (\text{Curvaturas})_i \leftarrow \text{Curv}(M_i) \\ \text{Curvaturas} \end{cases}$$

	0
0	0.153
1	0.119
2	0.085
3	0.051
4	0.018
5	$4.56 \cdot 10^{-3}$
6	$4.421 \cdot 10^{-3}$
7	$4.283 \cdot 10^{-3}$
8	$4.146 \cdot 10^{-3}$
9	$4.011 \cdot 10^{-3}$
10	$3.878 \cdot 10^{-3}$
11	$3.745 \cdot 10^{-3}$
12	$3.615 \cdot 10^{-3}$
13	$3.486 \cdot 10^{-3}$
14	$3.358 \cdot 10^{-3}$
15	...

Cálculo das Rotações

$$\sum_{i=0}^{99} [(\text{MontaCurv}(100)_i + \text{MontaCurv}(100)_{i+1}) \cdot \text{delta} \div 20] = 0.019$$

Figura 4-33 – Página nove, curvaturas e rotações.

Cálculo do Momento 2:

$$q2 := 46.74 \quad \underline{Mu} := MR$$

$$\underline{Le} := 10 \quad \underline{Mu} = 308.287$$

$$\underline{\text{delta}} := \frac{Le}{20} \quad \text{delta} = 0.5$$

$$\underline{\text{MontaP}}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M2 := q2 \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q2 \cdot \frac{(Le \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (Mu)$$

Cálculo das Curvaturas 2

$$\underline{Mdiv} := 271.51$$

$$\underline{\text{Curv}}(M2) := \begin{cases} \text{linc}(M2) & \text{if } |M2| \leq |Mdiv| \\ \text{linca}(M2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Curv}(-119.06) = -1.993 \times 10^{-3}$$

$$\underline{\text{MontaCurv2}}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (\text{Curvaturas})_i \leftarrow \text{Curv}(M2_i) \\ \text{Curvaturas} \end{cases}$$

Figura 4-34 – Página dez, começo das iterações.

	0
0	0.153
1	0.106
2	0.059
3	0.013
4	$4.485 \cdot 10^{-3}$
5	$4.291 \cdot 10^{-3}$
6	$4.099 \cdot 10^{-3}$
MontaCurv2(100) -	7
	$3.909 \cdot 10^{-3}$
	8
	$3.721 \cdot 10^{-3}$
	9
	$3.536 \cdot 10^{-3}$
	10
	$3.352 \cdot 10^{-3}$
	11
	$3.17 \cdot 10^{-3}$
	12
	$2.991 \cdot 10^{-3}$
	13
	$2.813 \cdot 10^{-3}$
	14
	$2.637 \cdot 10^{-3}$
	15
	...

Cálculo das Rotações 2

$$\sum_{i=0}^{99} \left[\left(\text{MontaCurv2}(100)_i + \text{MontaCurv2}(100)_{i+1} \right) \cdot \text{delta} \div 20 \right] = 1.244 \times 10^{-4}$$

Figura 4-35 – Página onze, vetor curvatura e rotação próxima à zero.

A planilha do MATHCAD para o Método 3 foi aplicada para todos os K_x estudados, e os resultados estão apresentados nas Tabelas 4-17 a 4-21. Os valores dos δ estão nas Tabelas 4-22 a 4-26.

Tabela 4-17 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,10$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
14,4	0,017
15,1	0,015
16	0,013
17	0,011
19	0,00666
19,5	0,00569
19,6	0,005499
19,7	0,005314
19,8	0,003176
19,85	0,001353
19,87	0,0005486
19,88	0,0001131
19,89	-0,0003223
19,9	-0,0007431
20	-0,005802

Tabela 4-18 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,25$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
34	0,019
46,5	0,004501
46,7	0,001024
46,73	0,0003493
46,74	0,0001244
46,75	-0,0001006
46,8	-0,001269

Tabela 4-19 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,35$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
45,53	0,019
46,5	0,018
48	0,017
50	0,015
53	0,012
55	0,011
60	0,006497
62	0,005009
62,5	0,002883
62,6	0,001287
62,65	0,0002812
62,66	0,0000802
62,67	-0,0001209
62,7	-0,0006835
63	-0,008069
64	-0,044
65	-0,091

Tabela 4-20 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,45$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
55,8	0,02
60	0,016
65	0,013
70	0,008996
73	0,006876
75	0,005455
76	0,004731
76,5	0,004253
76,7	0,001616
76,75	0,0007198
76,77	0,0003099
76,78	0,0001049
76,79	-0,0001
76,8	-0,000305
77	-0,005006
80	-0,149

Tabela 4-21 – Resultados do Método 3 para $K_x = 0,50$.

q (kN/m)	Rotação (rad)
60,4	0,02
65	0,017
70	0,013
75	0,009949
78	0,00779
80	0,006361
83	0,002973
83,1	0,001266
83,15	0,0002937
83,16	0,0001052
83,17	-0,0001232
83,2	-0,0008084
83,3	-0,003193
83,5	-0,00879
84	-0,027
85	-0,074

Tabela 4-22 – Resultados de δ para $K_x = 0,10$.

$\delta = 0,724346$	
q original (kN/m)	14,4
q alcançado (kN/m)	19,88

Tabela 4-23 – Resultados de δ para $K_x = 0,25$.

$\delta = 0,727428$	
q original (kN/m)	34
q alcançado (kN/m)	46,74

Tabela 4-24 – Resultados de δ para $K_x = 0,35$.

$\delta = 0,72662$	
q original (kN/m)	45,53
q alcançado (kN/m)	62,66

Tabela 4-25 – Resultados de δ para $K_x = 0,45$.

$\delta = 0,726752$	
q original (kN/m)	55,8
q alcançado (kN/m)	76,78

Tabela 4-26 – Resultados de δ para $K_x = 0,50$.

$\delta = 0,726311$	
q original (kN/m)	60,4
q alcançado (kN/m)	83,16

Na Figura 4-36, tem-se o diagrama esquemático de momentos de flexão, utilizando-se o carregamento $q_{\text{alcançado}}$ e destacando-se os pontos principais do método.

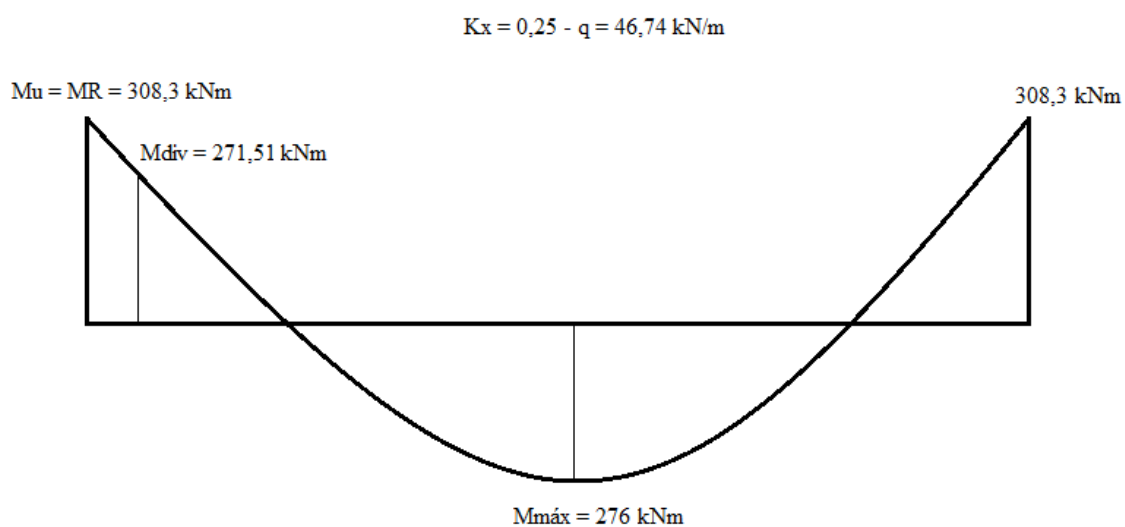


Figura 4-36 – Diagrama de momentos de flexão, Método 3.

4.4. Planilha para cálculo pelo Método 4

Assim como nos demais métodos foram desenvolvidas planilhas no programa MATHCAD, para o Método 4, que segue as simplificações propostas por LEONHARDT (1978).

Conforme nos outros métodos, os dados de entrada são os pontos da curva momento-curvatura obtidos no programa MK-UFRJ, que são importados e dispostos em vetores “x” e “y”, gerando gráficos da relação momento x curvatura.

Neste método, assim como no segundo método, as duas curvas são aproximadas por equações lineares. Interpola-se uma reta entre o valor inicial e o momento divisor e outra reta começando da ordenada posterior ao momento divisor até o momento máximo. Para as duas retas foram efetuadas duas interpolações, a primeira para momentos positivos e a segunda para momentos negativos.

Segue-se para o cálculo dos momentos. O momento último adotado é o mesmo encontrado no programa MK-UFRJ.

Como nos demais métodos a viga de 10 m de vão é analisada somente até o meio do vão. Utiliza-se a equação de momentos, já definida para os outros métodos.

$$M = \frac{qP^2}{2} - \frac{q \times Le \times P}{2} + M_u, \text{ conforme a equação (4.3).}$$

Neste método, os valores de “q” são obtidos iterativamente, de forma a se ter rotação próxima à zero no engaste.

Assim, é necessário encontrar os pontos do diagrama de momentos onde o momento é igual ao momento divisor M_{div} . Encontrando-se os pontos, calculam-se as distâncias desses pontos até o engaste e até o meio do vão. Estas distâncias são necessárias para se identificar onde a viga apresenta comportamento plástico.

A primeira distância, “m”, do engaste até o momento divisor, é encontrada igualando-se a equação de momento ao valor do momento divisor. Colocando-se a equação em função de “m”, tem-se:

$$m = \frac{q \times \frac{Le}{2} - \sqrt{\left[\left(-q \times \frac{Le}{2} \right)^2 - \left(4 \times \frac{q}{2} \right) \times (M_u - M_{div}) \right]}}{q} \quad (4.23)$$

A segunda distância a ser encontrada, “dist”, do meio do vão até o momento divisor com sinal contrário, fica definida da mesma maneira que a distância “m”, somente alterando-se o sinal do momento divisor. Assim, tem-se a distância “r”, do engaste até o momento divisor, e para se encontrar o parâmetro “dist” diminui-se o valor da metade do vão do valor de “r”:

$$r = \frac{q \times \frac{Le}{2} - \sqrt{\left[\left(-q \times \frac{Le}{2} \right)^2 - \left(4 \times \frac{q}{2} \right) \times (M_u + M_{div}) \right]}}{q} \quad (4.24)$$

$$dist = \frac{Le}{2} - r \quad (4.25)$$

Essas distâncias adotadas no método podem ser observadas e esclarecidas na Figura 4-47.

Para se obter as curvaturas basta utilizar as funções criadas para se interpolar as curvas momento x curvatura e encontrar a curvatura desejada. Se a curvatura procurada for correspondente a um momento menor que o momento divisor, entra-se na primeira curva, e se for maior entra-se na segunda curva.

Assim, deseja-se encontrar as curvaturas em pontos importantes da curva, correspondentes aos momentos M_{div} e M_u .

Segue-se para o cálculo do coeficiente angular da primeira reta interpolada no gráfico momento x curvatura, do ponto inicial até o momento divisor M_{div} .

Com o coeficiente da reta obtém-se a curvatura correspondente ao momento último, se esse fosse pertencente à primeira curva, ou seja, se a primeira curva for “esticada” até a linha do momento último, qual seria a curvatura correspondente CM_y (ver Figura 4-1):

$$CM_y = \frac{Curv(M_{div}) \times M_u}{M_{div}} \quad (4.26)$$

Essa curvatura é utilizada para o cálculo da rotação plástica.

O cálculo da rotação plástica é baseado nas aproximações propostas por LEONHARDT (1978). Calcula-se uma curvatura para a parte plástica e em seguida uma rotação média plástica, considerando-se um retângulo com uma distância média. As distâncias utilizadas são as distâncias calculadas “m” e “dist”, que correspondem à distância do engaste até o momento divisor e à distância do segundo momento divisor (com sinal inverso) até o meio do vão. Essas distâncias representam as partes da viga que tem comportamento plástico. A parcela plástica no meio do vão só ocorre caso o carregamento utilizado “q” seja grande o bastante para ultrapassar o valor do momento divisor M_{div} .

A curvatura plástica é encontrada diminuindo-se o valor da curvatura relativa ao momento último $Curv(M_u)$ da curvatura calculada CM_y :

$$curv_{plas} = Curv(M_u) - CM_y \quad (4.27)$$

$$\theta_{plast} = \left(\frac{m}{2}\right) \times curv_{plas} \quad (4.28)$$

$$\theta_{plast2} = \left(\frac{dist}{2}\right) \times curv_{plas} \quad (4.29)$$

Em seguida calcula-se a parcela elástica da rotação pela Resistência dos Materiais.

Para isto, calcula-se inicialmente o valor equivalente de EI , por meio da curva momento X curvatura.

$$EI = \frac{M_{div}}{Curv(M_{div})} \quad (4.30)$$

Então a rotação da parte elástica segue a seguinte equação, de uma viga biapoada submetida a um carregamento uniformemente distribuído:

$$\theta = \left(\frac{-M_u \times Le}{2 \times EI}\right) + \left(\frac{q \times Le^3}{24 \times EI}\right) \quad (4.31)$$

A rotação total totaliza as rotações plásticas e a rotação elástica:

$$\theta_{total} = \theta - \theta_{plast} - \theta_{plast2} \quad (4.32)$$

Neste método, o “q” original utilizado é o obtido a partir do M_u do MK-UFRJ.

$$q_{original} = M_u \times 12 \div 100 \quad (4.33)$$

Para uma comparação com os valores da NBR 6118:2014, calcula-se o valor de δ , como o “q” original dividido pelo “q” alcançado.

Pela NBR 6118:2014, para valores de K_x menores que 0,25, tem-se $\delta = 0,75$, e para valores maiores ou iguais a 0,25, o δ é calculado por:

$$\delta = 1,25 \times K_x + 0,44 \quad (4.34)$$

As Figuras 4-37 a 4-46 mostram as páginas da planilha MATHCAD para $K_x = 0,25$, para exemplificar as sequências de cálculo para cada etapa da aplicação do Método 4.



Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Escola Politécnica
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas
Mestrado Profissional
Programa de Pós Graduação em Projeto de Estruturas

MÉTODO 4

Aluna: Rejane Azevedo de Almeida Fonseca
Orientador: Professor Sérgio Hampshire

1. Dados iniciais:

ORIGIN := 0

alt := 0.80 base := 0.20 As := 10.06
d := 0.72
fy := 50 fck := 25000
fyd := $\frac{fy}{1.15}$ fcd := $\frac{fck}{1.4}$

2. O arquivo de entrada para a planilha é um arquivo com extensão .txt obtido pelo programa MK-UFRJ:



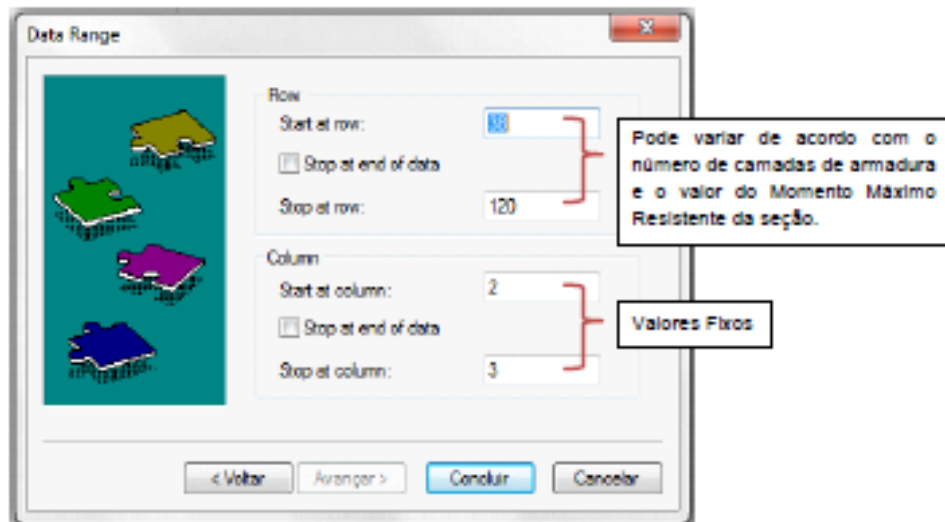
Figura 4-37 – Página inicial, programa MATHCAD método 4 – $K_x = 0,25$.

3. Importando o arquivo:

Após obter o arquivo .txt no programa MK-UFRJ, clicar com o botão direito do mouse sobre a Matrix **A** abaixo - **Import**;

No botão Browse indicar onde está salvo o arquivo .txt gerado pelo MK-UFRJ;

Clicar em **Avançar...** Aparecerá a seguinte janela:



Após clicar em **Concluir** os dados serão importados para o Mathcad.

2ª análise

$kx := 0.25$

$A :=$

	0	1
0	6.71	0.108
1	13.41	0.215
2	20.1	0.323
3	26.79	0.431
4	33.48	0.54
5	40.16	0.648
6	46.83	0.757
7	53.5	0.866
8	60.16	0.976
9	66.81	...

$$x := A^{(0)}$$

$$y := A^{(1)} \div 1000$$

$$h := -A^{(0)}$$

$$g := -(A^{(1)} \div 1000)$$

Figura 4-38 – Página dois, importando arquivos do MK-UFRJ.

	0
0	$1.0752 \cdot 10^{-4}$
1	$2.1526 \cdot 10^{-4}$
2	$3.2322 \cdot 10^{-4}$
3	$4.314 \cdot 10^{-4}$
4	$5.3981 \cdot 10^{-4}$
5	$6.4845 \cdot 10^{-4}$
6	$7.5733 \cdot 10^{-4}$
7	$8.6646 \cdot 10^{-4}$
8	$9.7583 \cdot 10^{-4}$
9	$1.08546 \cdot 10^{-3}$
10	$1.19534 \cdot 10^{-3}$
11	$1.3055 \cdot 10^{-3}$
12	$1.41592 \cdot 10^{-3}$
13	$1.52663 \cdot 10^{-3}$
14	$1.63762 \cdot 10^{-3}$
15	...

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

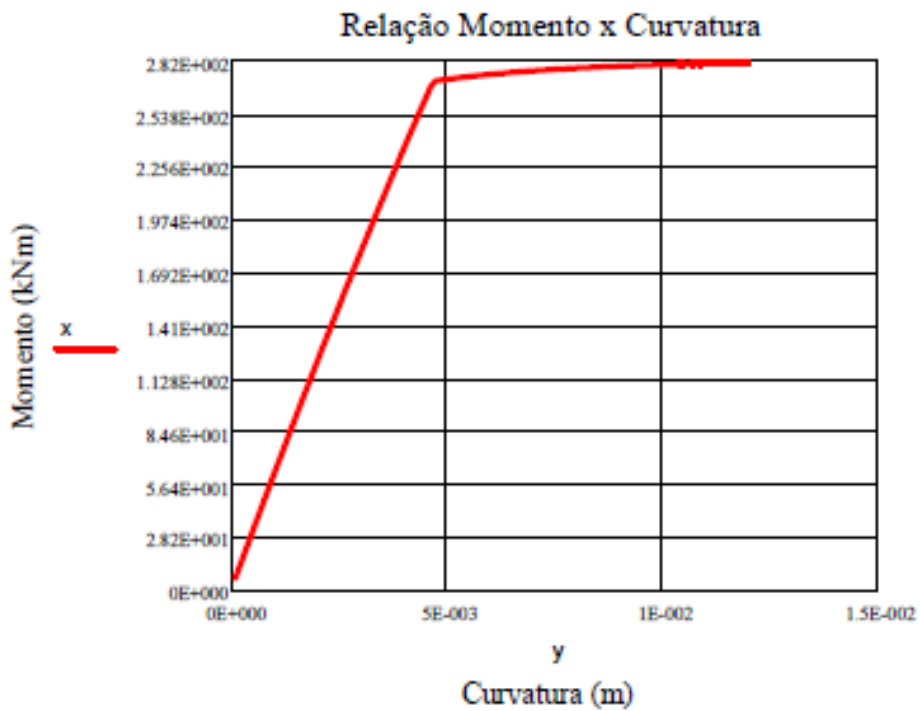


Figura 4-39 – Página três, visualização da curva momento-curvatura.

Momento Parte 1

Curvatura Parte 1

$$D1M(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ x1_i \leftarrow x_i \\ x1 \end{cases}$$

$$D1c(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ y1_i \leftarrow y_i \\ y1 \end{cases}$$

a := D1M(41)

	0
0	6.71
1	13.41
2	20.1
3	26.79
4	33.48
5	40.16
6	46.83
7	53.5
8	60.16
9	66.81
10	73.46
11	80.1
12	86.73
13	93.36
14	99.98
15	...

b := D1c(41)

	0
0	1.075·10 ⁻⁴
1	2.153·10 ⁻⁴
2	3.232·10 ⁻⁴
3	4.314·10 ⁻⁴
4	5.398·10 ⁻⁴
5	6.484·10 ⁻⁴
6	7.573·10 ⁻⁴
7	8.665·10 ⁻⁴
8	9.758·10 ⁻⁴
9	1.085·10 ⁻³
10	1.195·10 ⁻³
11	1.305·10 ⁻³
12	1.416·10 ⁻³
13	1.527·10 ⁻³
14	1.638·10 ⁻³
15	...

Figura 4-40 – Página quatro, Curva 1.

Momento Parte 2

Curvatura Parte 2

D2M(p) :- $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 42..p \\ x2_i \leftarrow x_i \\ x2 \end{array} \right.$

D2c(p) :- $\left\{ \begin{array}{l} \text{for } i \in 42..p \\ y2_i \leftarrow y_i \\ y2 \end{array} \right.$

c := D2M(124)

c -

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

d := D2c(124)

d -

	0
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	...

Figura 4-41 – Página cinco, curva 2.

Primeira Reta

Interpolação Positiva

$$\text{line}(a, b) = \begin{pmatrix} -7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$p(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + -7.4874 \times 10^{-5}$$

$$p(60) = 9.674 \times 10^{-4}$$

Interpolação Negativa

$$\text{line}(-a, -b) = \begin{pmatrix} 7.4874 \times 10^{-5} \\ 1.73705 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$t(r) := (1.73705 \times 10^{-5} \cdot r) + 7.4874 \times 10^{-5}$$

$$t(-60) = -9.674 \times 10^{-4}$$

Segunda Reta

Interpolação Positiva

$$\text{line}(c, d) = \begin{pmatrix} -3.627731 \times 10^{-5} \\ 3.05676 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$q(a) := (3.05676 \times 10^{-5} \cdot a) + -3.627731 \times 10^{-5}$$

$$q(104) = 3.143 \times 10^{-3}$$

Interpolação Negativa

$$\text{line}(-c, -d) = \begin{pmatrix} 3.627731 \times 10^{-5} \\ 3.05676 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$u(a) := (3.05676 \times 10^{-5} \cdot a) + 3.627731 \times 10^{-5}$$

$$u(-104) = -3.143 \times 10^{-3}$$

Figura 4-42 – Página seis, interpolações das retas.

$$\text{linc}(r) := \begin{cases} (p(r)) & \text{if } r \geq 0 \\ (t(r)) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad \text{linc}(a) := \begin{cases} q(a) & \text{if } a \geq 0 \\ u(a) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{linc}(60) = 9.674 \times 10^{-4}$$

$$\text{linc}(104) = 3.143 \times 10^{-3}$$

Cálculo do Momento:

$$\text{Le} := 10 \qquad \text{Mu} := 281.2$$

$$\text{qorig} := \text{Mu} \cdot 12 \div 100$$

$$\text{qorig} = 33.744$$

$$\underset{\text{q}}{\text{q}} := 46 \qquad \text{adotar valores para q}$$

$$\text{delta} := \frac{\text{Le}}{20} \qquad \text{delta} = 0.5$$

$$\text{MontaP}(n) := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n \\ (P)_i \leftarrow i \cdot \text{delta} \div 10 \\ P \end{cases}$$

$$M := q \cdot \frac{\text{MontaP}(100)^2}{2} - \left[q \cdot \frac{(\text{Le} \cdot \text{MontaP}(100))}{2} \right] + (\text{Mu})$$

Figura 4-43 – Página sete, cálculo dos momentos.

Cálculo da distância do engaste até o momento divisor (m)

$$Mdiv := 271.51$$

$$m := \frac{q \cdot \frac{Le}{2} - \sqrt{\left[\left(-q \cdot \frac{Le}{2} \right)^2 - \left(4 \cdot \frac{q}{2} \right) \cdot (Mu - Mdiv) \right]}}{q}$$

$$m = 0.042$$

Cálculo da distância do meio do vão até o momento divisor

$$r := \frac{q \cdot \frac{Le}{2} - \sqrt{\left[\left(-q \cdot \frac{Le}{2} \right)^2 - \left(4 \cdot \frac{q}{2} \right) \cdot (Mu + Mdiv) \right]}}{q}$$

$$r = 4.016$$

$$dist := \frac{Le}{2} - r$$

$$dist = 0.984$$

Cálculo das Curvaturas

$$Curv(M) := \begin{cases} \text{linc}(M) & \text{if } |M| \leq |Mdiv| \\ \text{linca}(M) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Curv(Mu) = 8.559 \times 10^{-3}$$

$$Curv(Mdiv) = 4.641 \times 10^{-3}$$

$$CM_y := \frac{Curv(Mdiv) \cdot Mu}{Mdiv}$$

$$CM_y = 4.807 \times 10^{-3}$$

Figura 4-44 – Página oito, cálculo das distâncias e das curvaturas.

Cálculo da Rotação Plástica

$$\text{curvplas} := \text{Curv}(\text{Mu}) - \text{CMy}$$

$$\text{curvplas} = 3.752 \times 10^{-3}$$

$$\theta_{\text{plast}} := \left[\frac{(\text{m})}{2} \right] \cdot \text{curvplas}$$

$$\theta_{\text{plast}} = 7.938 \times 10^{-5}$$

$$\theta_{\text{plast2}} := \left(\frac{\text{dist}}{2} \right) \cdot \text{curvplas}$$

$$\theta_{\text{plast2}} = 1.847 \times 10^{-3}$$

Cálculo da Rotação da viga por Resistência dos Materiais

$$EI := \frac{\text{Mdiv}}{\text{Curv}(\text{Mdiv})}$$

$$EI = 5.85 \times 10^4$$

$$\theta := \left(\frac{-\text{Mu} \cdot \text{Le}}{2 \cdot EI} \right) + \left(\frac{q \cdot \text{Le}^3}{24 \cdot EI} \right)$$

$$\theta = 8.73 \times 10^{-3}$$

Cálculo da Rotação total

buscando o valor mais próximo de zero

$$\theta_{\text{total}} := \theta - \theta_{\text{plast}} - \theta_{\text{plast2}}$$

$$\theta_{\text{total}} = 6.803 \times 10^{-3}$$

Figura 4-45 – Página nove, cálculo da rotação.

$$\underline{\text{delta}} := (\text{Mu} \cdot 12 \div 100) \div q$$

$$\text{delta} = 0.734$$

$$\underline{\text{kx}} := \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot \text{Mu} \div [0.2 \cdot (0.72)^2 \cdot \text{fcd}]}{0.85}}}{0.8}$$

$$\text{kx} = 0.248$$

$$\text{deltaN}(\text{kx}) := \begin{cases} 0.75 & \text{if } \text{kx} < 0.25 \\ 1.25 \cdot \text{kx} + 0.44 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{deltaN}(\text{kx}) = 0.75$$

Figura 4-46 – Página dez, cálculo do delta.

A planilha do Método 4 foi processada para todos os K_x estudados, e os resultados estão apresentados nas Tabelas 4-27 a 4-31.

Tabela 4-27 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,10$.

q original (kN/m)	14,2872
q alcançado (kN/m)	20,00

Tabela 4-28 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,25$.

q original (kN/m)	33,744
q alcançado (kN/m)	46,00

Tabela 4-29 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,35$.

q original (kN/m)	45,144
q alcançado (kN/m)	60,00

Tabela 4-30 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,45$.

q original (kN/m)	55,2696
q alcançado (kN/m)	74,00

Tabela 4-31 – Resultados do Método 4 para $K_x = 0,50$.

q original (kN/m)	59,904
q alcançado (kN/m)	82,00

Assim têm-se os valores de δ para cada K_x estudado mostrados na Tabela 4-32.

Tabela 4-32 – Resultados de δ para o Método 4.

K_x	δ
0,10	0,71
0,25	0,73
0,35	0,75
0,45	0,75
0,50	0,73

Observa-se que os valores de δ tendem para 0,75, expressando uma situação ideal em que, havendo armaduras positiva e negativa iguais, os momentos positivos e negativos tendem para o mesmo valor, atestando a capacidade de rotação plástica das seções de concreto para se adaptar a essa situação.

Na Figura 4-47, tem-se o diagrama esquemático de momentos de flexão, utilizando-se o carregamento $q_{\text{alcançado}}$ e destacando-se os pontos e distâncias principais do método.

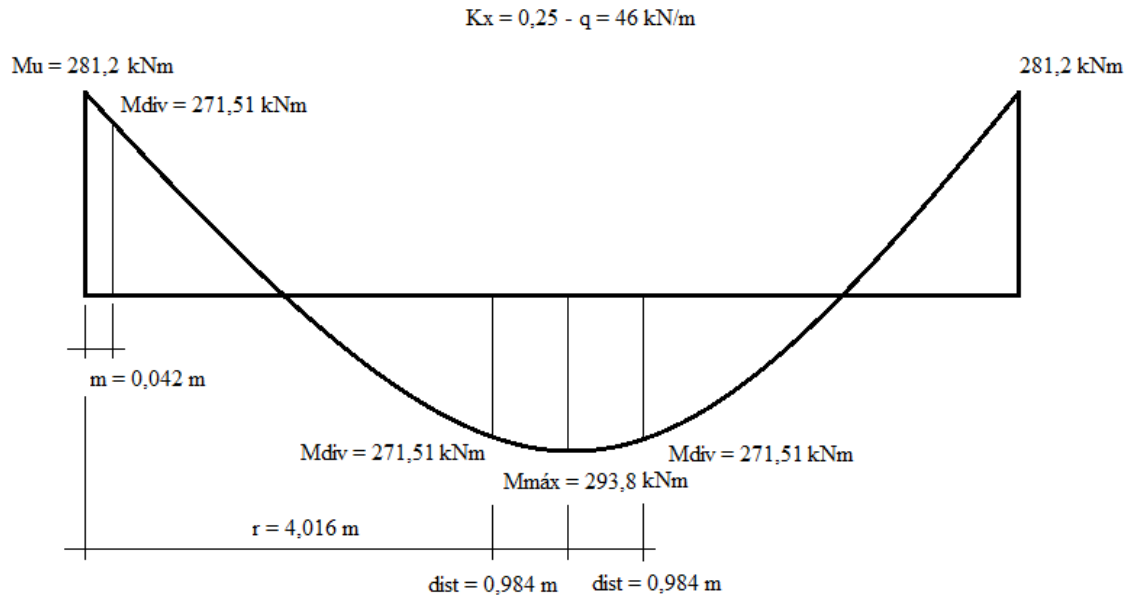


Figura 4-47 – Diagrama de momentos de flexão, Método 4.

5. RESULTADOS

De forma a possibilitar uma comparação direta entre as recomendações da NBR 6118:2014 e os métodos de análises aqui aplicados, são apresentados os valores de δ para cada K_x estudado. Esses valores foram obtidos após várias iterações nas planilhas de cálculo do MATHCAD, até se encontrar uma rotação próxima de zero, o que corresponde à condição de contorno de engastamento. Assim, tem-se o valor do carregamento máximo suportado pela viga e a razão δ entre o carregamento original e essa carga máxima.

5.1. Resultados de acordo com a NBR 6118:2014

Os resultados de acordo com a NBR 6118:2014 são obtidos com a expressão (4.17).

Tabela 5-1 – Resultados de acordo com a NBR 6118:2014.

NBR	
K_x	δ
0,10	0,750
0,25	0,753
0,35	0,878
0,45	1,000
0,50	1,000

5.2. Resultados de acordo com Método 1

Tabela 5-2 – Resultados de acordo com o Método 1.

MÉTODO 1	
K_x	δ
0,10	0,9897
0,25	0,9968
0,35	0,99998
0,45	0,9998
0,50	0,9975

5.3. Resultados de acordo com Método 2

Tabela 5-3 – Resultados de acordo com o Método 2.

MÉTODO 2	
K_x	δ
0,10	0,68
0,25	0,77
0,35	0,84
0,45	0,88
0,50	0,88

5.4. Resultados de acordo com Método 3

Tabela 5-4 – Resultados de acordo com o Método 3.

MÉTODO 3	
K_x	δ
0,10	0,724
0,25	0,727
0,35	0,727
0,45	0,727
0,50	0,726

5.5. Resultados de acordo com Método 4

Tabela 5-5 – Resultados de acordo com o Método 4

MÉTODO 4	
K_x	δ
0,10	0,71
0,25	0,73
0,35	0,75
0,45	0,75
0,50	0,73

5.6. Comparação entre os métodos

Para comparar os métodos e analisar suas diferenças, foi elaborado um gráfico, apresentado na Figura 5-1, onde os valores obtidos com os quatro métodos, assim como com as prescrições da NBR 6118:2014, estão apresentados.

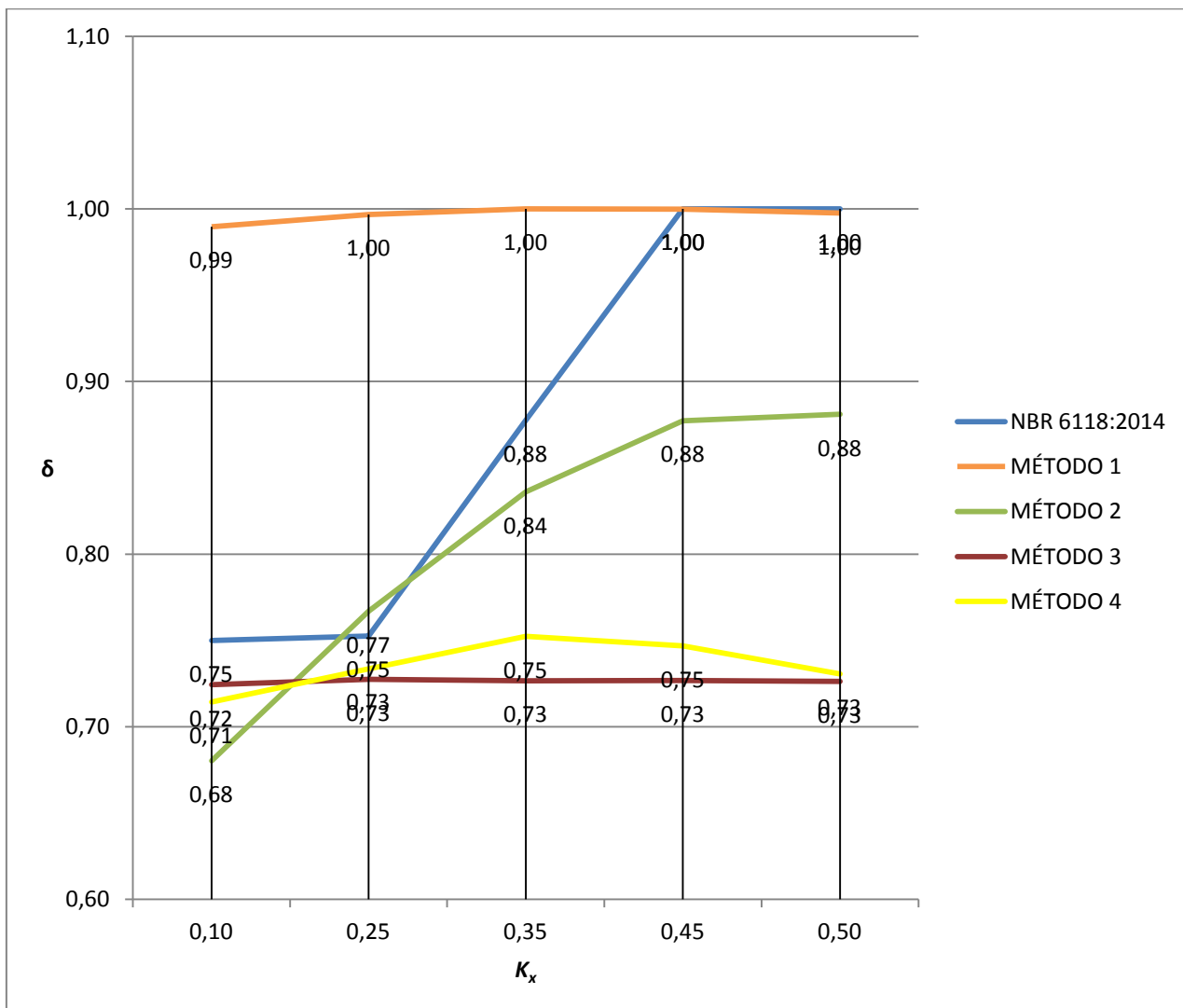


Figura 5-1 – Valores obtidos com os quatro métodos e com a NBR 6118:2014.

6. CONCLUSÕES

Com base nos resultados apresentados no Capítulo 5 podem-se tecer alguns comentários finais.

Analisando-se os resultados do primeiro método pode-se perceber que ao se utilizar os parâmetros de dimensionamento à flexão não se obtém resultados coerentes. Esse método forneceu, para todos os K_x estudados, resultados próximos à unidade. Isto significaria que as vigas não têm nenhuma reserva plástica. Conclui-se que as hipóteses consideradas não representam a realidade para o cálculo de deformações não lineares. As hipóteses para dimensionamento de solicitações normais da NBR 6118:2014 são adequadas para este dimensionamento, mas não representam adequadamente o comportamento em regime não linear.

Os resultados obtidos aplicando-se o segundo método revelaram-se muito próximos aos obtidos com as recomendações da NBR 6118:2014. Isto é bastante compreensível, já que as recomendações dessa norma foram certamente definidas com base em estudos que consideraram hipóteses similares. Porém, como o método é baseado em uma estimativa arbitrária da posição das rótulas, não se pode, a princípio, validar os resultados obtidos. A partir do limite de profundidade relativa da linha neutra aceito pela NBR 6118:2014 (0,45), há uma estabilização dos resultados em torno de $\delta = 0,88$.

O terceiro método é o mais exato, considerando hipóteses mais reais. Ele considera as tensões de ruptura do aço, iguais a $1,1 f_{yd}$, e considera que o rompimento ocorre a 8%, que é o limite de ruptura do aço CA-50. Os resultados foram bem menos conservadores que os determinados com as recomendações da NBR 6118:2014. Observa-se que, conforme já exposto, os valores de δ , tendendo para 0,75, expressam uma situação ideal em que, havendo armaduras positiva e negativa iguais, os momentos positivos e negativos tendem para o mesmo valor, atestando uma adequada capacidade de rotação plástica das seções de concreto analisadas.

Neste terceiro método, o mais realístico, mostra que, ao menos para o exemplo analisado, as seções tem uma grande disponibilidade de rotação plástica, praticamente igual ao limite teórico (0,75), atestando o conservadorismo dos critérios da NBR 6118:2014.

O quarto e último método, baseado no modelo clássico do LEONHARDT (1978), foi testado com o intuito de validar os resultados obtidos no terceiro método. Os resultados obtidos foram satisfatórios, muito próximos aos do método anterior.

6.1. Conclusão Final

Como conclusão final do trabalho, com base nos resultados obtidos com os quatro métodos utilizados para análise plástica da viga em estudo, observou-se que as prescrições da NBR 6118:2014, nos levam a soluções muito conservadoras, no que se refere à segurança.

Portanto, considera-se que os valores descritos na NBR 6118:2014 poderiam ser revisados, para valores menos conservadores, mas não menos seguros, conforme mostram os resultados apresentados, para valores de δ mais próximos a 0,75.

6.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Apesar de todo o esforço dispendido no processamento dos diversos casos apresentados neste trabalho, têm-se a consciência que o assunto está muito longe de estar esgotado. Dessa forma, espera-se que novos trabalhos venham, no futuro, a dar continuidade aos estudos aqui apresentados, abordando, por exemplo, situações de vigas com armadura de compressão, estudos da colaboração na ductilidade devida ao confinamento do concreto conferido pelos estribos, outras situações estáticas além da viga biengastada, entre diversos outros estudos possíveis.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 6118**, *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 7480**, *Aço destinado a armaduras para concreto armado – Especificação*. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 8522**, *Concreto – Determinação do módulo de deformação estática e diagrama tensão-deformação – Método de ensaio*. Rio de Janeiro, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), **NBR 8681**, *Ações e segurança nas estruturas - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.

BUCHAIM, R., VAZ, W. *Rigidez e rotação plástica de peças fletidas*. Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB-1. NBR 6118:2003. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. In PRÁTICA RECOMENDADA IBRACON. Ibracon, Março de 2006.

BUCHAIM, R. *Determinação da capacidade de rotação plástica para concretos C20 a C90 e aços CA-50 e CA-60*. Revista ABECE Informa – Ano 17, Número 99, São Paulo, Brasil, Setembro/ Outubro 2013.

CASTRO, F. M. O. *Análise Plástica de Pórticos de Concreto Armado Submetidos a Ações Sísmicas Segundo Critérios de Ductilidade*. Trabalho Final de Graduação, DME/POLI/UFRJ. Rio de Janeiro, 2008.

EUROCODE 2: *Projecto de estruturas de betão*. Pt. 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. Norma Portuguesa NP EM 1992-1-1. 2004.

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (*fib*). *Model Code for Concrete Structures 2010*. Ernst & Sohn, Berlin, 2013.

LEONHARDT, F. *Construções de concreto – Verificação da capacidade de utilização – Vol. 4*. Ed. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 1978.

MATHCAD, version 15.0.0.436, Parametric Technology Corporation, 140 Kendrick Street, Needham, MA 02494 USA.

SANTOS, S. H. C. *Concreto Armado I – Apostila*. Rio de Janeiro, 2015.

VENTORINI, L. A. *Influência da aderência na capacidade de rotação plástica de vigas de concreto armado*. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.