



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica
Programa de Projeto de Estruturas

Luiza Fernandes dos Santos

**UM MODELO DE DISSIPAÇÃO DE ENERGIA PARA O MODO DE RUPTURA
DE FUNDAÇÕES RASAS EM SOLOS ARENOSOS**



UFRJ

Luiza Fernandes dos Santos

**UM MODELO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA PARA O MODO DE RUPTURA DE
FUNDAÇÕES RASAS EM SOLOS ARENOSOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Orientadores:

Alessandra Conde de Freitas

André Luiz Saraiva de Oliveira

Rio de Janeiro

2017

Santos, Luiza Fernandes dos

Um Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos / Luiza Fernandes dos Santos – 2017.

97.: 30 cm.

Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Programa de Projeto de Estruturas, Rio de Janeiro, 2017.

Orientadores: Alessandra Conde de Freitas e André Luiz Saraiva de Oliveira.

1. Solos arenosos, 2. Fundações superficiais, 3. Capacidade de carga. I. Freitas, Alessandra Conde de e Oliveira, André Luiz Saraiva de. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola Politécnica. III. Título.



UFRJ

UM MODELO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA PARA O MODO DE RUPTURA DE FUNDAÇÕES RASAS EM SOLOS ARENOSOS

Luiza Fernandes dos Santos

Orientadores:

Alessandra Conde de Freitas

André Luiz Saraiva de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Projeto de Estruturas.

Aprovada pela Banca:

Prof. Alessandra Conde de Freitas, D. Sc., UFRJ

Prof. André Luiz Saraiva de Oliveira, D. Sc., UFRJ

Prof. Bernadete Ragoni Danziger, D. Sc., UERJ

Prof. Sergio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc., UFRJ

Rio de Janeiro
2017

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais, Mariza e Paulo José, que sempre me incentivaram e deram suporte aos meus estudos.

Ao meu noivo Luiz Paulo, o qual sempre me apoiou com sua paciência e muito companheirismo ao longa desta jornada.

Agradeço ao meu orientador André Saraiva, o qual aceitou o desafio de me orientar, apesar de termos diferentes profissões, soube fazer a interdisciplinaridade brilhantemente, estando presente em todas as etapas deste trabalho.

Faço um agradecimento especial, também, para a minha orientadora Alessandra Conde pelo apoio, atenção e por dividir seus conhecimentos geotécnicos comigo.

Agradeço ainda a todos professores do Mestrado Profissional do Programa de Projeto de Estruturas, com quem pude aprender bastante ao longo das aulas, contribuindo sobremaneira para a minha solidificação acadêmica e profissional.

RESUMO

SANTOS, Luiza Fernandes dos. **Um Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos**. Rio de Janeiro. 2017. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2017.

O estudo da capacidade de carga de fundações superficiais assentes em solos arenosos é tornado desafiador pelos múltiplos fatores que influenciam a tensão limite. A compressibilidade do solo é um fator de particular relevância pois torna o problema da ruptura do solo um processo elasto-plástico de difícil descrição teórica. Um sistema sapata-solo compressível pode romper de três modos: ruptura generalizada (incompressível), localizada ou por puncionamento (compressível). Uma correção devida à compressibilidade na estimativa da carga de ruptura deve ser feita quando necessária, para que a carga limite não seja superdimensionada. O critério mais amplamente utilizado para determinação do regime de compressibilidade relativa foi elaborado por VESIC (1975). Embora bastante difundido, esse critério pode apresentar problemas graves, conforme ilustrado na presente dissertação, para ensaios específicos em modelos de fundações superficiais assentes em areia. Com base no entendimento físico do fenômeno, foi possível fazer analogia entre a formação de uma superfície de ruptura na areia e o balanço energético na formação de fissuras em sólidos. Isso permitiu determinar um critério mais abrangente e acurado, cujo alicerce teórico será referido como Um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos. Dados experimentais obtidos em modelos de escala reduzida por VESIC (1963) foram comparados com os resultados apresentados aqui e aqueles de VESIC (1975), demonstrando, para os referidos ensaios, a maior robustez da abordagem dessa dissertação. A condição de estado plano de deformação será também discutida, criticando o critério proposto por Vesic. Finalmente, uma análise dimensional permitiu a previsão dos modos de ruptura para fundações em escalas reais, o que não é possível de ser feito com a teoria original de Vesic.

Palavras-chave: solos arenoso; fundações superficiais; capacidade de carga.

ABSTRACT

SANTOS, Luiza Fernandes dos. **A Model of Energy Dissipation for the Mode of Rupture of Shallow Foundations in Sandy Soils**. Rio de Janeiro. 2017. Dissertação (Mestrado) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2017.

The study of bearing capacity of shallow foundations on sandy soils is made difficult by the multiple factors that impact on the ultimate stress. The soil compressibility is a factor of particular relevance because it renders the problem of soil failure into an elasto-plastic process of difficult theoretical description. A compressible foundation-soil system may fail in three different modes: general shear failure (compressible), local shear failure or punching (incompressible) shear failure. A correction due to compressibility to the estimate of the ultimate load must be made when necessary, so that the limit stress is not overestimated. The most widely adopted criterion of relative compressibility is due to VESIC (1975). Even though it is well known, this criterion may present serious problems, as illustrated in this dissertation, for specific assays in model shallow foundations on sandy soils. Based on the physical understanding of the phenomenon it was possible to draw an analogy between the formation of the failure surface in sand and the energy balance in the formation of cracks in solids. This allowed to determine a more thorough and accurate criterion based on a theoretical background which will be referred to as A Model of Energy Dissipation for the Mode of Rupture of Shallow Foundations in Sandy Soils. Experimental data obtained with reduced scale models by VESIC (1963) were compared to the results presented here and those by VESIC (1975), showing, for the mentioned essays, a better robustness for the results of this dissertation. The condition for a plane state of deformation will also be discussed, criticizing the criterion proposed by Vesic. Finally, a dimensional analysis permitted us to predict the failure mode for foundations in realistic scales, which cannot be done with the original theory by Vesic.

Keywords: sandy soil, shallow foundations, bearing capacity.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1. Tipos de ruptura de fundações superficiais	5
2.1.1. Abordagem de TERZAGHI (1943).....	5
2.1.1.1. Ruptura verdadeira	6
2.1.1.2. Ruptura convencional.....	6
2.1.2. Abordagem de VESIC (1975)	6
2.1.2.1. Ruptura generalizada.....	7
2.1.2.2. Ruptura localizada.....	7
2.1.2.3. Ruptura por punção.....	8
2.2. Estimativa da tensão de ruptura.....	10
2.2.1. Considerações iniciais	13
2.2.2. Efeito de forma da fundação.....	13
2.2.3. Influência da compressibilidade do solo e do efeito de escala.....	14
2.3. Teoria de Griffith para propagação de fissuras	16
3. MODELO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA PARA O MODO DE RUPTURA DE FUNDAÇÕES RASAS EM SOLOS ARENOSOS	20
3.1. Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos para distinção entre ruptura generalizada e ruptura não generalizada.....	22
3.1.1. Para $P \gg B$	22
3.1.2. Para $P = B$ e Sapatas Retangulares	24
3.2. Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos para Resultado de Ruptura Não Generalizada.....	29
4. CÁLCULO DO COMPRIMENTO DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA GENERALIZADA DO SOLO	30
5. DENSIDADE SUPERFICIAL DE ENERGIA (η) DEMONSTRAÇÃO.....	42
5.1. Densidade superficial de energia para zona I (zona ativa de Rankine).....	43
5.2. Densidade superficial de energia para zona II (zona radial de Prandtl).....	45
5.3. Densidade superficial de energia para zona III (zona passiva de Rankine)	50
6. COMPARAÇÃO DOS MODELOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS	52
6.1. Módulo de Elasticidade do solo (E)	54
6.2. Comparação entre os resultados obtidos	55

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	63
8. APÊNDICE.....	67
8.1. Análise Direcional:.....	67
8.1.1. Análise Direcional Geral:	67
8.1.2. Análise Direcional de ângulos.....	70
8.1.3. Análise Direcional de Resistência dos Materiais	72
8.1.4. Análise Direcional da equação de Terzaghi-Buisman.....	74
8.1.5. Análise Direcional da equação de Vesic para determinação de ruptura generalizada e não generalizada	79
8.1.6. Crítica ao Critério de Vesic	82
8.2. Análise Dimensional	83
8.2.1. Análise Dimensional da Densidade Superficial De Energia (η)	87
8.2.2. Análise Dimensional da um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos.....	89
8.3. Memória de Cálculo do Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos	91
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Pressão transmitida pela base de uma sapata ao terreno.....	1
Figura 2 - Ruptura generalizada em conjunto de silos - TSCHEBOTARIOFF (1951). ..	2
Figura 3 – Curvas carga versus recalque para distintos modos de ruptura.	5
Figura 4 – Ruptura generalizada - VESIC (1975).....	7
Figura 5 – Ruptura localizada - VESIC (1975).....	8
Figura 6 – Ruptura por puncionamento – VESIC (1975).....	8
Figura 7 - Gráfico de densidade relativa da areia versus profundidade relativa da fundação - VESIC (1975).....	9
Figura 8 – Problema de capacidade de carga em fundações superficiais.....	11
Figura 9 - Tensões principais do solo a B/2 abaixo da fundação	15
Figura 10 – Placa delgada homogeneamente tensionada e sua fissura.....	17
Figura 11 - Rompimento e alívio de tensão na placa delgada.....	17
Figura 12 - Fissura em perspectiva.....	18
Figura 13 - Fissura em perspectiva na região circular conforme o modelo de Griffith .	19
Figura 14 - Respectivas Zonas para cada superfície de ruptura.	21
Figura 15 - Variação da largura da superfície de ruptura do solo de modo generalizado	25
Figura 16 - Vista em planta da Figura 15.	25
Figura 17 - Análise do estado de tensões no plano de ruptura (PINTO, 2006).....	26
Figura 18 - Esquema simplificado da ruptura generalizada com as respectivas zonas. .	30
Figura 19 – Ângulos na ruptura.....	31
Figura 20 – Ângulo formado pelo vetor radial com o vetor tangencial – constante em toda superfície da espiral logarítmica.....	32
Figura 21 - Todos os ângulos das três zonas.	33
Figura 22 – Decomposição do elemento de arco dl	34
Figura 23 - Triângulo retângulo.....	35
Figura 24 - Zona I e θ_f	36
Figura 25 - Comprimento das três zonas.	37
Figura 26 - Esquema da superfície de ruptura para $\phi = 30^\circ$ e $B = 10$ cm.....	41
Figura 27 – Diagrama de forças para o cálculo da densidade superficial de energia.....	42
Figura 28 - Zona I ampliada	44
Figura 29 - Zona Radial ampliada	45

Figura 30 - Zona III ampliada.....	50
Figura 31 – Diagrama mostrando o modo de ruptura como função dos adimensionais ϕ e $\gamma.B/\psi_0$ para fundação superficial assente em solo arenoso.....	61
Figura 32 - Valores típicos do adimensional $\gamma B/\Psi_0$	62
Figura 33 – Tabela de multiplicação direcional geral.	68
Figura 34 - Esquema de um bloco em plano inclinado	71
Figura 35 - Componentes de tensão no sistema cartesiano de coordenadas.	72
Figura 36 – tensor de tensões e sua respectiva matriz direcional.....	74
Figura 37 - Coordenadas usadas.....	78
Figura 38 - Fundação superficial assente em solo (BxP)	79
Figura 39 - Matriz de deformação e matriz direcional da deformação	80
Figura 40 - Matriz dimensional	85
Figura 41 - Matriz dimensional	87
Figura 42 - Matriz dimensional	90

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Fatores de forma de VESIC (1975).....	14
Tabela 2 - ϕ e $g(\phi)$	40
Tabela 3 - ϕ e $w(\phi)$	41
Tabela 4 - Peso específico seco, índice de vazios e ângulo de atrito dos diferentes ensaios.	53
Tabela 5 - Módulos de elasticidade.	54
Tabela 6 - Placa Circular.	55
Tabela 7 - Placa Retangular.	55
Tabela 8 - Resultados do modo de ruptura para placa circular	56
Tabela 9 - Resultados do modo de ruptura para placa retangular.	56
Tabela 10 – Resultado usando o Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos – Placa Circular e Retangular.	57
Tabela 11 - Resultados do modo de ruptura para placa circular	58
Tabela 12 - Resultados do modo de ruptura para placa retangular	58
Tabela 13 - Densidade relativa correspondente ao solo arenoso utilizado em cada ensaio	59
Tabela 14 - Classificação das areias segundo a compactidade (PINTO, 2006)	59
Tabela 15 - Dados completos de cada ensaio com seus resultados	60
Tabela 16 – Resumo de equações - 1ª análise	63
Tabela 17 – Resumo de equações - 2ª análise	64

1. INTRODUÇÃO

No projeto de uma fundação superficial deve-se garantir condições básicas de segurança, durabilidade e funcionalidade. Além desses aspectos, sua execução deve ser técnica e economicamente viável.

A fundação é o elemento responsável por transmitir a carga da estrutura para o terreno, conforme ilustrado na Figura 1. Essa transferência de carga, no caso de fundação superficial, ocorre unicamente através de sua base, que recebe as ações da estrutura através do pilar e as transmite ao solo por tensões verticais na profundidade de assentamento da sapata (ação e reação). Desta forma, o elemento isolado de fundação superficial pode ser avaliado por um sistema sapata-solo, formado pelo elemento infra estrutural (fundação superficial) e pelo elemento geotécnico (o maciço de solo).

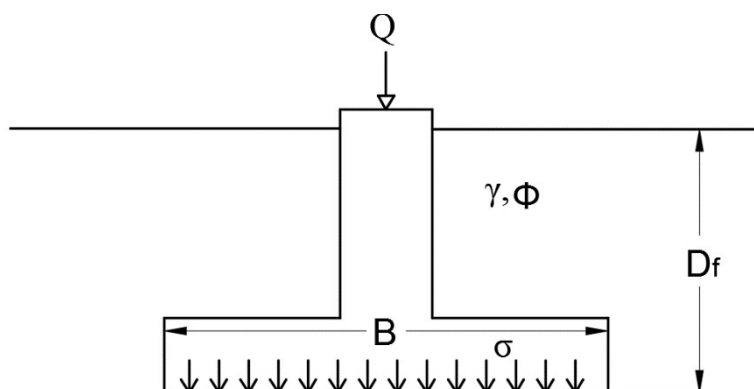


Figura 1 - Pressão transmitida pela base de uma sapata ao terreno

Na Figura 1 a menor dimensão da fundação é representada por B ; D_f é a profundidade de assentamento da mesma; γ e ϕ são, respectivamente, o peso específico e o ângulo de atrito do solo; Q é a carga oriunda da estrutura; e σ é a tensão transmitida para o terreno.

No projeto de fundações superficiais deve-se atentar tanto para possíveis falhas estruturais, quanto para falhas geotécnicas. Em relação aos aspectos geotécnicos do projeto deve-se garantir segurança em relação à ruptura, bem como recalques compatíveis com a estrutura. O presente trabalho tratará de aspectos relativos à ruptura do solo sob fundação superficial.

Em relação ao primeiro requisito geotécnico pode-se entender que o solo sob a fundação não pode romper. Já o segundo revela que mesmo havendo segurança em

relação à ruptura do solo, há que se considerar se os recalques associados às cargas atuantes são compatíveis com aqueles tolerados pela estrutura.

A Figura 2, apresentada por TSCHEBOTARIOFF (1951), ilustra a ruptura em conjunto de silos.

A definição de recalque se encontra na norma de Projeto e Execução de Fundações, a NBR 6122 de 1996, que define recalque como sendo o movimento vertical descendente de um elemento estrutural em relação a uma referência física (Benchmark). Quando o movimento for ascendente, denomina-se levantamento. Convenciona-se representar o recalque com o sinal positivo.

Segundo a NBR 6122 de 2010, fundação superficial, também chamada de fundação rasa ou direta, tem como característica a profundidade de assentamento (D_f) ser inferior a duas vezes a menor dimensão da fundação (B). A Norma sugere, também, que B seja maior ou igual a 60 centímetros.

A incompressibilidade do solo é uma hipótese comum nos cálculos analíticos da capacidade de carga de fundações superficiais, quando de uma ruptura do tipo generalizada

A consideração de ruptura generalizada pode, em algumas situações, levar a erros significativos contra a segurança, superestimando a carga máxima permitida. Para contemplar esse aspecto VESIC (1975) sugere a adoção de fatores de compressibilidade relativa e escala, que possibilitam a correção da tensão de ruptura estimada para fundações superficiais. A proposta do referido autor será apresentada no capítulo 2.1.2.

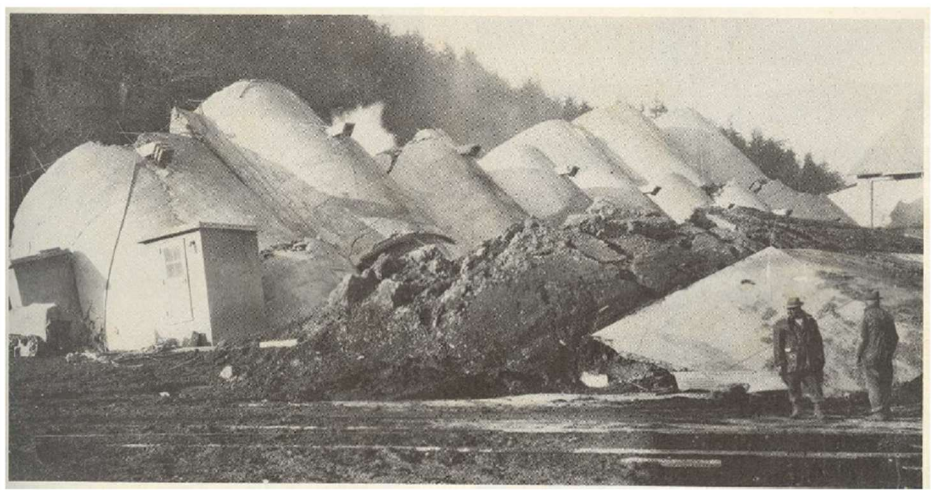


Figura 2 - Ruptura generalizada em conjunto de silos - TSCHEBOTARIOFF (1951).

Esta dissertação tem como objetivos: (i) o desenvolvimento de uma nova abordagem, (ii) comparação da abordagem proposta com os resultados obtidos experimentalmente em uma série de provas de carga em fundações superficiais assentes em areia realizadas por VESIC (1963) e (iii) avaliação da proposta de VESIC (1975) de acordo com as análises direcional e dimensional.

O modelo proposto tem como base principal as leis da mecânica clássica, que analisa se a tensão de ruptura do solo é suficiente para gerar uma superfície de ruptura de forma generalizada, localizada ou por puncionamento.

Na avaliação do modo de ruptura da fundação superficial, é inferida a situação de incompressibilidade do solo, que é uma das hipóteses iniciais considerada na previsão da tensão de ruptura (σ_{rup}) pela maioria dos autores que tratam do tema (PRANDTL (1920), REISSNER (1924), TERZAGHI (1943), MEYERHOF (1963), HANSEN (1970) e VESIC (1973)). Cumpre salientar que a previsão da capacidade de carga de fundações superficiais pode ser feita com base em diversas outras propostas como comentam VELOSO; LOPES (2010).

Segundo VESIC (1975) uma fundação superficial, do ponto de vista geotécnico, pode romper de 3 formas distintas: ruptura generalizada, localizada ou por puncionamento. Quando a ruptura for generalizada (solo incompressível) a capacidade de carga da fundação será superior a que seria obtida se o modo de ruptura fosse localizado ou por puncionamento (solo compressível).

Ao se considerar a incompressibilidade do solo quando essa característica não existir, a análise estará contra a segurança, já que quando o solo rompe de forma não generalizada há uma redução de todas as parcelas da tensão de ruptura de solo (σ_{rup}).

Na literatura já há uma contribuição proposta por VESIC (1975) para contemplar essa correção, quando necessária, que considera tanto a hipótese de solo incompressível, quanto o efeito de escala da fundação. No entanto, no presente trabalho observou-se que, para um banco de dados específico, a abordagem proposta por VESIC (1975) apresenta uma possível inconsistência, já que ao serem comparados os resultados analíticos baseados em VESIC (1975) com os resultados experimentais de ensaios em fundações superficiais assentes em solos arenosos, observou-se uma falta de concordância na maior parte dos dados como será mostrado no capítulo 6.

Quanto à organização do presente texto, apresentou-se, inicialmente, uma revisão bibliográfica sobre tipos de ruptura de fundações superficiais, tendo sido citadas duas abordagens, TERZAGHI (1943) e VESIC (1975), as quais contemplam critérios de

estimativa da carga última e os fatores de correção utilizados para diferentes casos na prática da engenharia de fundações. Essa revisão bibliográfica também contempla uma demonstração simplificada da Teoria de Griffith (NEAL-STURGESS, 2008).

Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada o novo modelo desenvolvido no mestrado, o qual contempla tanto para fundações superficiais longas (comprimento muito maior que a largura), quanto para fundações superficiais com outros formatos: retangulares, quadradas e circulares. Esse modelo permite prever se o modo de ruptura é generalizado, localizado ou por puncionamento.

Os Capítulos 4 e 5 apresentam as demonstrações dos processos de obtenção analítica do comprimento da superfície de ruptura e a densidade superficial de energia, parâmetros necessários na utilização do novo modelo.

No Capítulo 6, em face da importância de se avaliar melhor o modo de ruptura previsto, são comparados os resultados obtidos com base no modelo desenvolvido no mestrado e VESIC (1975), com os obtidos experimentalmente para uma série de ensaios em fundações superficiais circulares e retangulares assentes em areia. Esses ensaios experimentais são relatados no artigo do VESIC, 1963. Os resultados obtidos com base no modelo proposto no presente trabalho foram mais acurados que os obtidos com base em VESIC (1975), quando comparados aos valores experimentais.

No Capítulo 7 são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho, bem como sugestões para futuras pesquisas.

Já, no Capítulo 8, são apresentadas as verificações realizadas para avaliação da proposta de VESIC (1975) de acordo com as Análises Direcional e Dimensional. Será mostrado que a referida proposta está em equilíbrio dimensional, no entanto não possui equilíbrio direcional. Ainda neste capítulo é apresentada a demonstração, usando a análise dimensional, do processo de elaboração da Figura 31. Também são apresentadas as etapas necessárias de cálculo, usando como referência o resultado de um dos ensaios analisados com base no Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos.

Por fim, o Capítulo 9 apresenta as referências bibliográficas.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Tipos de ruptura de fundações superficiais

O tipo de ruptura, no caso de fundações superficiais, depende de diversos fatores, como por exemplo as características do solo, a geometria, a escala, o embutimento da fundação, o tipo de solicitação, entre outros.

A importância de se saber, de antemão, o mecanismo de ruptura que o solo apresentará, no caso de fundações superficiais, é essencial para o engenheiro geotécnico, já que a tensão de ruptura estimada pode reduzir, significativamente, a depender do tipo de ruptura.

A seguir serão mostradas duas abordagens de diferentes pesquisadores que preconizaram modos de ruptura de fundações superficiais.

2.1.1. Abordagem de TERZAGHI (1943)

Segundo TERZAGHI (1943), a curva carga versus recalque de uma prova de carga em fundação superficial pode assumir uma forma situada entre as curvas C1 e C2, conforme Figura 3. Nessa figura, de acordo com o enunciado por Terzaghi, há indicação de uma relação entre o tipo de solo e o modo de ruptura esperado, como será explicado nos itens a seguir.

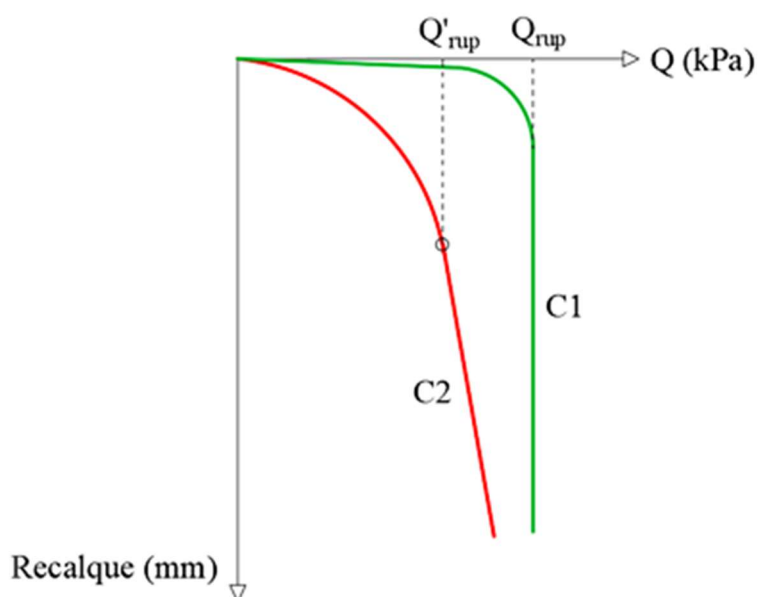


Figura 3 – Curvas carga versus recalque para distintos modos de ruptura.

2.1.1.1. Ruptura verdadeira

A ruptura verdadeira representada na Figura 3 pela curva C1 é também chamada ruptura franca. Nessa curva, a fundação apresenta bom comportamento, ou seja, inicialmente os deslocamentos, associados aos incrementos de carga, são pequenos. A partir de um determinado valor de carga, a tangente à curva muda abruptamente de inclinação para uma tangente vertical. Ou seja, a fundação passa a não suportar um acréscimo de carga e os recalques crescem indefinidamente. É a ruptura clássica ou física. Segundo TERZAGHI (1943), este tipo de comportamento é próprio de solos mais resistentes, como por exemplos argilas duras e rijas e areias compactas.

2.1.1.2. Ruptura convencional

A curva C2, representada na Figura 3, ilustra o comportamento de uma fundação em que desde o início do carregamento, são observados deslocamentos significativos. Neste caso, o critério para determinar a carga de ruptura é escolhido por convenção dado que a tangente à curva carga-recalque não chega a se tornar vertical. Este modo de ruptura é definido como ruptura convencional. Nessa situação há critérios disponíveis para se estimar a carga de ruptura. Segundo TERZAGHI (1943), este tipo de comportamento é próprio de solos menos resistentes, como por exemplos argilas médias e moles e areias fofas.

Ou seja, de acordo com TERZAGHI (1943), um dos pioneiros nos estudos sobre esse tema, o conjunto fundação superficial-solo, do ponto de vista geotécnico, pode romper entre os dois modos distintos. Quando a ruptura não for generalizada, deve ser considerada uma redução dos parâmetros de resistência adotados na análise da capacidade de carga da fundação que independe de quão afastado está o problema da situação considerada como hipótese teórica inicial (ruptura generalizada).

2.1.2. Abordagem de VESIC (1975)

VESIC (1975) amplia o conceito anterior, e menciona a existência de 3 modos de ruptura. Nos itens a seguir os referidos modos de rupturas serão descritos de forma breve. Esta abordagem é apresentada de forma detalhada em VESIC (1975).

2.1.2.1. Ruptura generalizada

Esta é caracterizada pela existência de um padrão de ruptura sob a fundação muito bem definido, consistindo de uma superfície de ruptura partindo de um bordo da fundação até o nível do terreno, conforme a Figura 4 (a). A curva carga versus recalque apresenta um bom comportamento, ou seja, pequenos deslocamentos para valores crescentes de carga, até que a ruptura acontece de modo brusco, conforme a Figura 4 (b). Portanto, havendo a ruptura de uma dada fundação, esta acontece sem aviso, de forma repentina e catastrófica. A menos que a estrutura impeça de algum modo a rotação da fundação, a ruptura é acompanhada de significativa inclinação. Por ocasião da ruptura, o solo adjacente sofre intumescimento.

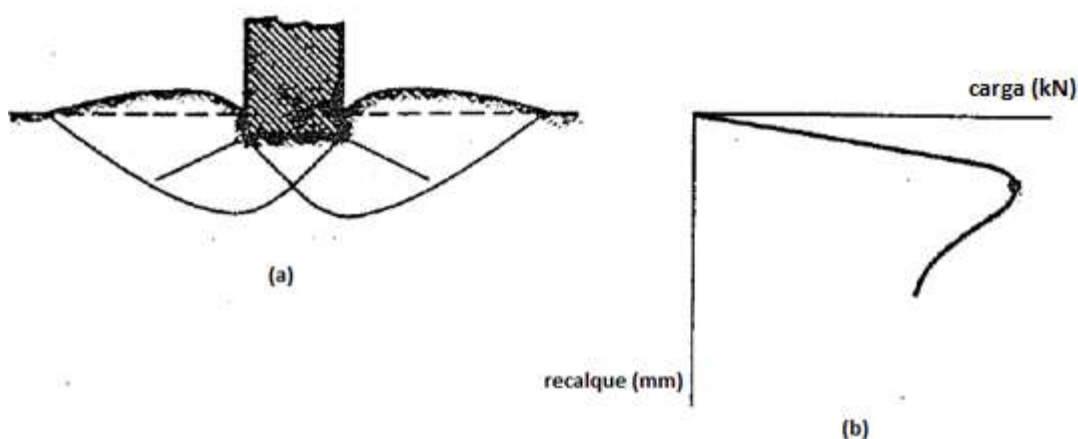


Figura 4 – Ruptura generalizada - VESIC (1975)

2.1.2.2. Ruptura localizada

Esta é caracterizada pela existência de um padrão de ruptura sob a fundação bem definido apenas imediatamente abaixo da fundação, conforme a Figura 5 (a). Há a tendência de intumescimento na região adjacente à fundação, mas mesmo com grandes valores de deslocamento não ocorre a rotação da fundação. A ruptura localizada representa uma situação intermediária entre a ruptura generalizada e a ruptura por puncionamento. A Figura 5 (b) apresenta o comportamento carga versus recalque associado à ruptura localizada.

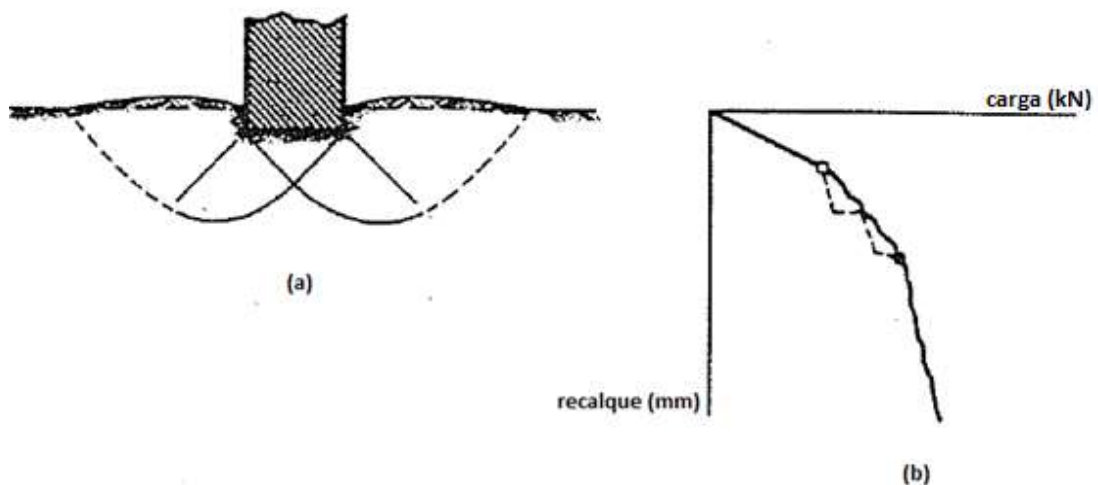


Figura 5 – Ruptura localizada - VESIC (1975)

2.1.2.3. Ruptura por punção

Caracterizada por um padrão de ruptura que não é fácil de visualizar. O solo em torno da fundação permanece relativamente inalterado e a rotação da fundação também não ocorre, conforme a Figura 6 (a).

Na Figura 6 (b), observa-se que o aumento do nível de deslocamento com o aumento do carregamento é ainda mais acentuado que no caso da ruptura localizada.

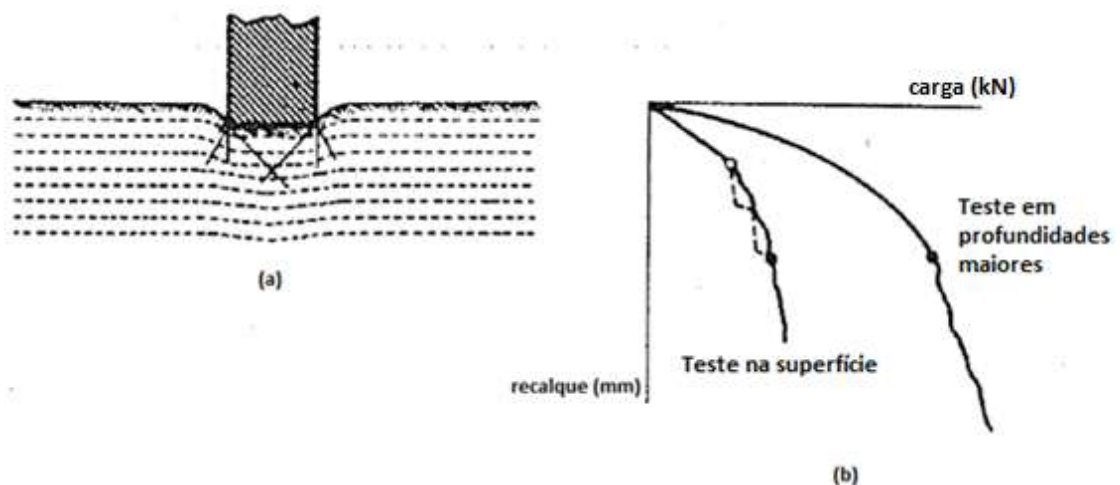


Figura 6 – Ruptura por punção – VESIC (1975)

A capacidade de carga está relacionada a vários outros aspectos e não somente ao tipo de solo, tal qual TERZAGHI (1943) havia preconizado inicialmente. Fatores como

geometria da fundação, compacidade relativa, escala e condições de carregamento podem influenciar significativamente.

A Figura 7 ilustra o descrito no parágrafo anterior para o caso de fundações em areias. No eixo das abscissas são apresentadas as diversas faixas de compacidade relativa da areia. Ou seja, quanto menor a compacidade, mais fofo é o material. Inversamente, a compacidade elevada corresponde a um material compacto. No eixo da ordenada é mostrado o embutimento relativo da fundação $\left(\frac{D_f}{B^*}\right)$, onde D_f é o trecho embutido da fundação e B^* é função das dimensões da fundação (B = menor dimensão da base da fundação e P = maior dimensão da base da fundação).

Nessa figura, ao se fixar o embutimento máximo de $2B$ (duas vezes a menor dimensão da fundação), conforme critério definido pela NBR6122:2010 para fundações superficiais, pode-se observar que para a compacidade fofa ($D_r < 0,33$) a tendência é a ocorrência de ruptura por puncionamento. Para compacidades elevadas ($D_r > 0,66$) a tendência é a ocorrência de ruptura generalizada. No caso de compacidades intermediárias, observa-se ruptura localizada. No entanto, na mesma figura, para a compacidade relativa 0,7, por exemplo, o modo de ruptura passa de generalizada para localizada para profundidades relativas maiores que 1.

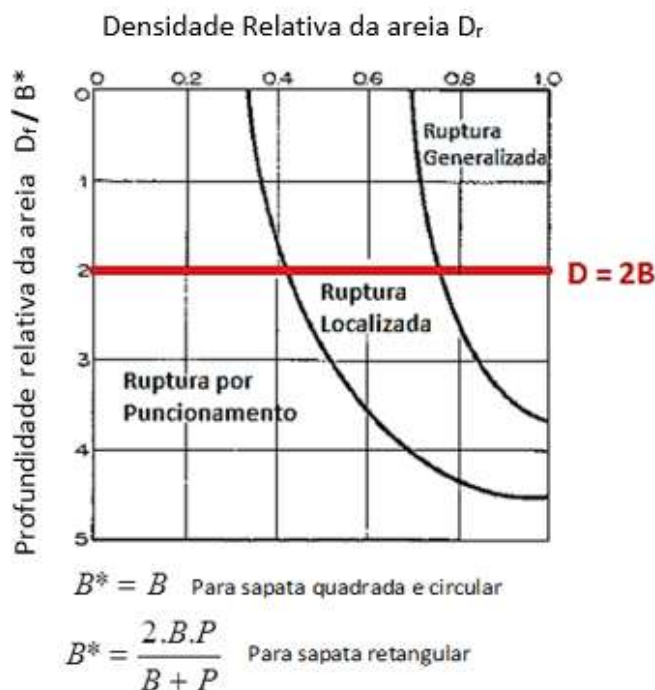


Figura 7 - Gráfico de densidade relativa da areia versus profundidade relativa da fundação - VESIC (1975)

2.2. Estimativa da tensão de ruptura

De acordo com VESIC (1975) a estimativa da carga de ruptura de fundações superficiais assentes em solos representa um problema de equilíbrio elasto-plástico que pode, em princípio, ser resolvido para casos de estado plano de deformação e casos de simetria axial. O autor comenta que a massa do solo é de extensão semi-infinita e homogênea, como também possui um peso específico efetivo conhecido e propriedades de resistência ao cisalhamento definidas por uma envoltória de resistência, com parâmetros de resistência c e ϕ , sendo c o intercepto de coesão e ϕ o ângulo de atrito do solo, e o comportamento tensão-deformação é rígido-plástico, definido pela curva apresentada na Figura 8 (b).

Para a estimativa da carga de ruptura, as seguintes simplificações são normalmente feitas, conforme a Figura 8 (a):

1. A resistência ao cisalhamento ao longo do trecho bc da superfície de ruptura é desconsiderada.
2. O atrito solo-solo ao longo de ab , bem como o atrito fundação-solo no trecho ad são desprezados.
3. O comprimento P é assumido ser grande em comparação com a largura B da fundação.

Isso significa que o solo acima da base da fundação (trecho entre o nível do terreno e a cota de assentamento da fundação) é substituído por um carregamento uniformemente distribuído q ($q = \gamma \cdot D_f$) aplicado no nível da cota de assentamento da mesma. Cumpre salientar que q equivale à tensão vertical efetiva no nível da base da fundação. Ao mesmo tempo, as condições de estado plano de deformação são assumidas ($P \gg B$).

As simplificações 1 e 2, sempre a favor da segurança, são justificadas na maioria dos casos. Como o solo acima da cota de assentamento da fundação pode não possuir as mesmas características do solo abaixo da mesma, por conta da escavação e reaterro realizados para a execução da fundação, essas simplificações são a favor da segurança.

Na Figura 8, em (a) é apresentado um caso real de fundação superficial e em (c) é ilustrado o mesmo caso tendo sido consideradas as simplificações descritas precedentemente.

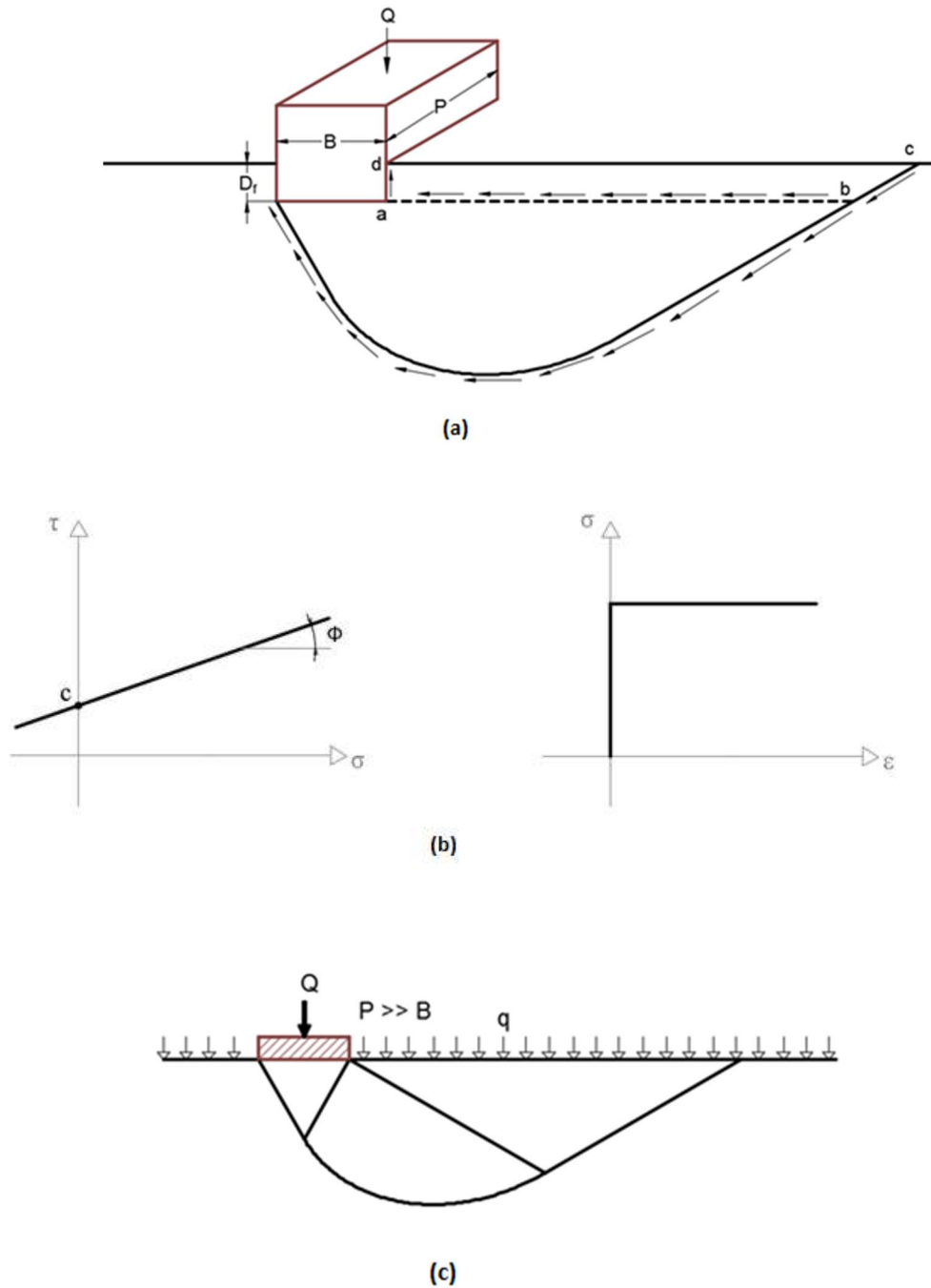


Figura 8 – Problema de capacidade de carga em fundações superficiais.

Assumindo as hipóteses simplificadoras arroladas anteriormente, bem como os procedimentos para serem obtidas soluções parciais, foi possível com base na superposição de efeitos, estabelecer um critério para estimativa da tensão ruptura. Essa tensão limite é dada pela Equação de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943):

$$\sigma_{rup} = c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \quad (1)$$

Onde:

σ_{rup} - tensão de ruptura (kPa)

γ - peso específico do solo (kN/m³)

c – intercepto de coesão (kPa)

B – menor dimensão da fundação (m)

q - tensão vertical efetiva no nível da base da fundação (kPa)

N_c , N_q , N_γ - fatores de capacidade de carga, que são obtidos a partir do conhecimento do valor do ângulo de atrito do solo ϕ .

As expressões utilizadas para os fatores de capacidade de carga são apresentadas a seguir nas equações (2), (3) e (4).

$$N_q = e^{(\pi \cdot \tan \phi)} \cdot \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2 \quad (2)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot(\phi) \quad (3)$$

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q + 1) \cdot \tan(\phi) \quad (4)$$

Para o caso específico em que a fundação está assente no nível do terreno, na equação (1), o valor de q é nulo. Adicionalmente, sendo o solo arenoso, o intercepto de coesão (c) também é nulo. Deste modo, a equação (1) de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) é reduzida a:

$$\sigma_{rup} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \quad (5)$$

Cabe destacar, que a proposta descrita é válida para fundações superficiais sujeitas a carga estática centrada de compressão (Q).

2.2.1. Considerações iniciais

Há diversas situações na prática da engenharia de fundações não contempladas pela solução apresentada na equação (1). Porém, em seu artigo, VESIC (1975) aborda soluções para os diferentes casos não contemplados a princípio. Dentre estas, destacam-se: efeito de forma da fundação, efeito da inclinação e da excentricidade da carga, efeito da inclinação da base da fundação e da superfície do terreno, efeito da resistência ao cisalhamento no trecho *bc* da superfície de ruptura, influência da compressibilidade do solo e dos fatores de escala, influência da rugosidade da base da fundação, influência do formato da base da fundação, influência da posição do nível d'água e condições de estratigrafia não homogênea.

No presente trabalho serão contemplados o efeito de forma da fundação e a influência da compressibilidade do solo e efeito de escala, de acordo com a proposta de VESIC (1975).

2.2.2. Efeito de forma da fundação

Para formatos de fundação diferentes das que possuem $P \gg B$ (retangular longo), as dificuldades matemáticas em se obter soluções para estimativa da carga de ruptura são consideráveis. De acordo com VESIC (1975), a hipótese de $P \gg B$ é rigorosamente justificável quando $P/B > 10$. Nos casos em que $5 < P/B < 10$, embora não seja rigorosamente justificável, seria aceitável. Para $P/B < 5$ e outras formas de fundações, como a circular e a quadrada, a hipótese $P \gg B$ não é válida. No capítulo 3, será analisado de forma crítica esse critério.

Em função das dificuldades do problema de ruptura elasto-plástica, a abordagem do problema é em geral semi-empírica. Foram realizados diversos ensaios por VESIC (1963), com diferentes formatos de fundações, e, a partir destes resultados, foram introduzidos fatores de correção de forma (ζ_c , ζ_q e ζ_γ) em cada parcela da expressão de Buisman-Terzaghi. Com isso a equação de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) com os respectivos fatores de forma passa a ser:

$$\sigma_{rup} = c \cdot N_c \cdot \zeta_c + q \cdot N_q \cdot \zeta_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot \zeta_\gamma \quad (6)$$

Onde os fatores de forma são calculados de acordo com o indicado na Tabela 1:

Tabela 1 - Fatores de forma de VESIC (1975)

Forma da base	ζ_c	ζ_q	ζ_γ
Corrida	1	1	1
Retangular	$1 + (B/P)(N_q/N_c)$	$1 + (B/P)\tan(\phi)$	$1 - 0,4(B/P)$
Circular/Quadrada	$1 + (N_q/N_c)$	$1 + \tan(\phi)$	0,60

2.2.3. *Influência da compressibilidade do solo e do efeito de escala*

Tem sido previamente enfatizado que todo o procedimento de análise da carga de ruptura é baseado na hipótese de incompressibilidade relativa do conjunto solo-fundação e isso deve ser aplicado, estritamente falando, somente para casos onde a superfície de ruptura de forma generalizada do solo é esperada. Existe uma falta de métodos racionais para a análise da superfície de ruptura nas outras duas formas (localizada e puncionamento), características de solo compressível.

Para satisfazer essas necessidades imediatas na prática de engenharia, Terzaghi propôs usar a mesma equação de carga de ruptura e respectivos fatores com a redução dos parâmetros de resistência c e ϕ , intercepto de coesão e do ângulo de atrito respectivamente. Essa redução é dada respectivamente por:

$$c^* = 0,67 \cdot c$$

$$\phi^* = 0,67 \cdot \tan(\phi)$$

Tal abordagem pode fornecer uma resposta satisfatória para alguns solos. No entanto, há situações que mesmo com a redução nos parâmetros, a previsão não estará a favor da segurança. Por outro lado, há casos, por exemplo em fundações em solos arenosos, em que a redução do ângulo de atrito (ϕ) no caso de ruptura localizada e por puncionamento pode ser exageradamente conservativa.

Vesic propõe uma avaliação comparativa entre o índice de rigidez do solo (I_r) e o índice de rigidez crítico ($I_{r \text{ crítico}}$), para avaliar a influência da compressibilidade relativa do conjunto solo-fundação. Com isso separa a ruptura generalizada de outras formas de

ruptura não-generalizadas (localizada ou puncionamento), sugerindo a adoção de fatores corretivos para a redução da carga de ruptura quando a ruptura for não-generalizada.

O Índice de rigidez do solo, no caso de análise drenada, é definido como:

$$I_r = \frac{G}{c + \sigma_{med} \cdot \tan \phi} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot (c + \sigma_{med} \cdot \tan \phi)} \quad (7)$$

Onde:

E = Módulo de elasticidades (MPa)

G = Módulo cisalhante do solo (MPa)

σ_{med} = Tensão efetiva média a profundidade de $B/2$ abaixo da cota de assentamento da fundação (kPa)

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma'_v + 2 \cdot \sigma'_h}{3} = \frac{\sigma'_v + 2 \cdot \sigma'_v \cdot k_0}{3} = \frac{\sigma'_v \cdot (1 + 2 \cdot k_0)}{3} \quad (8)$$

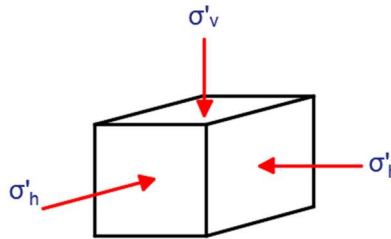


Figura 9 - Tensões principais do solo a $B/2$ abaixo da fundação

σ'_v = Tensão vertical efetiva à profundidade de $B/2$ abaixo da cota de assentamento da fundação (kPa):

$$\sigma'_v = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \quad (9)$$

σ'_h = Tensão horizontal a profundidade de $B/2$ abaixo da cota de assentamento da fundação (kPa).

$$\sigma'_h = \sigma'_v \cdot k_0 \quad (10)$$

γ = Peso específico natural do solo (kN/m³)

B = menor dimensão da fundação (m)

c = intercepto de coesão (kPa)

ϕ = Ângulo de atrito (°)

ν = Coeficiente de Poisson, dado pela equação (11).

$$\nu = \frac{k_0}{1 + k_0} \quad (11)$$

k_0 = Coeficiente de empuxo em repouso, dado pela equação (12).

$$k_0 = 1 - \sin \phi \quad (12)$$

Como para areias $c = 0$, então a equação (7) fica:

$$I_r = \frac{G}{\sigma \cdot \tan \phi} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot (\sigma_{med} \cdot \tan \phi)} \quad (13)$$

Já o Índice de rigidez crítico do solo é definido como:

$$I_{r \text{ crítico}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\left[\left(3,30 - 0,45 \frac{B}{P} \right) \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\phi}{2} \right) \right]} \quad (14)$$

Onde:

P = maior dimensão da fundação (m)

A avaliação comparativa entre os índices consiste em:

$I_r > I_{r \text{ crítico}} \rightarrow$ Ruptura generalizada (não é necessária a utilização dos fatores de compressibilidade e de efeito de escala).

$I_r < I_{r \text{ crítico}} \rightarrow$ Ruptura não generalizada (é necessária a utilização dos fatores de compressibilidade e de efeito de escala).

2.3. Teoria de Griffith para propagação de fissuras

Apesar de tratar o problema de propagação de fissuras em sólidos, a teoria de Griffith será usada como inspiração para o modelo de alívio de tensão proposto no presente trabalho. Portanto, serão revisados os seus principais resultados, apresentando-

se, também, uma derivação moderna (NEAL-STURGESS, 2008) do seu resultado principal acerca dos tamanhos de fissuras.

A ideia da Teoria de Griffith simplificada é que existe uma disputa entre custo energético necessário na quebra das ligações químicas em um sólido e na redução de energia potencial elástica ao se aliviar as tensões.

Imagine um sólido (assumindo uma placa delgada), no qual há uma tensão, por exemplo de tração, que é aplicada muito distante, de forma que esteja homogeneamente aplicada, conforme a Figura 10. Pretende-se aqui compreender a vantagem energética em se formar uma fissura de comprimento L no sólido em questão (energia total do sistema sólido tensionado mais fissura, E_t).

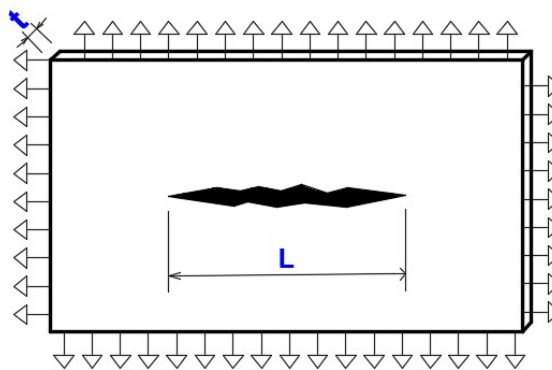


Figura 10 – Placa delgada homogeneamente tensionada e sua fissura

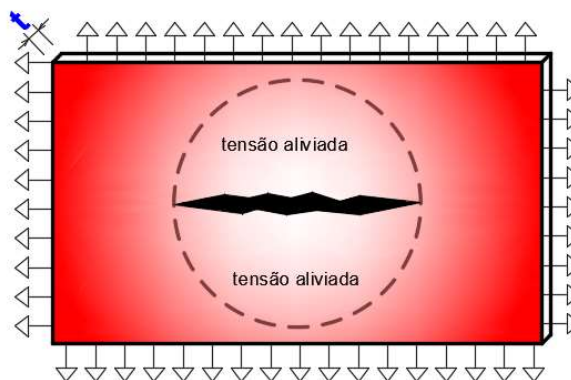


Figura 11 - Rompimento e alívio de tensão na placa delgada

Logo, é necessária a estimativa tanto do custo energético W de se gerar a fissura, quanto o ganho U de se aliviar a tensão na região indicada pelo círculo na Figura 11.

Cálculo do custo energético (W):

Se as ligações químicas possuem uma densidade de energia superficial η , que é uma taxa crítica de liberação de energia por área, tem-se que W é definido pela equação

$$W = \eta \cdot L \cdot t \quad (15)$$

Onde $L \cdot t$ é a área da fissura, já que L é o comprimento da superfície de ruptura e t a espessura da placa delgada, conseqüentemente a espessura da fissura, conforme mostrado na Figura 12.

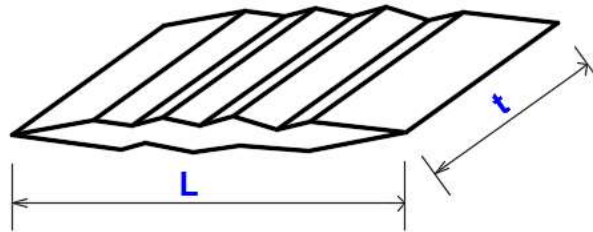


Figura 12 - Fissura em perspectiva

A densidade de energia superficial η pode ser estimada microscopicamente para sólidos como a energia de dissociação multiplicada pela densidade superficial de ligações químicas. A energia U (energia de ganho energético de se aliviar a tensão) pode ser obtida a partir de uma estimativa da densidade de energia elástica (u), conforme será mostrado a seguir

Ganho energético de se aliviar a tensão (U):

Sabe-se que no caso de molas, é válida a Lei de Hooke ($F = k \cdot x$). Já a energia elástica é dada por: $U_{el} = \frac{k \cdot x^2}{2}$ ou alternativamente $U_{el} = \frac{F^2}{2 \cdot k} = \frac{(k \cdot x)^2}{2 \cdot k} = \frac{k \cdot x^2}{2}$.

Por analogia direta, em sólidos tensionados a densidade de energia elástica (u) pode ser estimada como $u = \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2}$ (de posse de informação sobre a deformação (ε), ou $u = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}$, de posse da tensão, já que $\sigma = E \cdot \varepsilon$). Aqui, o módulo de elasticidade E é análogo à constante de força k da mola.

Assim, a energia total liberada no círculo do modelo de Griffith é dada por:

$$U = u \cdot Volume \quad (16)$$

$$U = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \cdot t \quad (17)$$

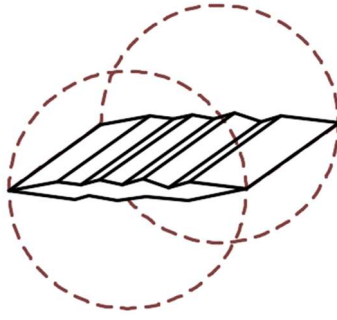


Figura 13 - Fissura em perspectiva na região circular conforme o modelo de Griffith

Assim, a energia total do sistema sólido tensionado mais fissura fica:

$$E_T = W - U \quad (18)$$

Substituindo na equação (18) as equações (15) e (17), tem-se:

$$E_T = \eta \cdot L \cdot t - \frac{\sigma^2}{8 \cdot E} \cdot \pi \cdot L^2 \cdot t \quad (19)$$

Para determinar o comprimento total L que otimiza a energia, basta derivar a equação (19) em relação a L e igualar a mesma a zero.

$$\frac{dE_T}{dL} = 0 = \eta \cdot t - \frac{\sigma^2}{4 \cdot E} \cdot \pi \cdot L \cdot t \quad (20)$$

Logo, explicitando-se na equação (20) o valor da tensão σ , é possível se obter a tensão necessária para gerar uma fissura de comprimento L.

$$\sigma = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}} \quad (21)$$

3. MODELO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA PARA O MODO DE RUPTURA DE FUNDAÇÕES RASAS EM SOLOS ARENOSOS

Esse modelo não se baseia nem na análise elástica, nem na análise plástica, mas sim em um critério de falha da Resistência dos Materiais. Ou seja, inicialmente existe um corpo que, quando submetido a uma tensão limite de ruptura, transformar-se-á em dois corpos independentes.

Para o caso de fundações superficiais assentes em solos arenosos, utilizando por analogia a Teoria de Griffith (capítulo 2.3) para geração de uma fissura de comprimento L (comprimento da superfície de ruptura), será considerado que a tensão necessária para gerar uma superfície de ruptura generalizada de comprimento máximo L_{total} é σ_L . Se a tensão de ruptura (σ_{rup}), que pode ser estimada a partir da expressão $\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma$ (equação (6), considerando a fundação assente em solo arenosos), for maior que σ_L , a falha é generalizada.

$\sigma_{rup} > \sigma_L \rightarrow$ Ruptura generalizada (não precisa de redução da tensão de ruptura estimada)

$\sigma_{rup} < \sigma_L \rightarrow$ Ruptura não generalizada (precisa de redução da tensão de ruptura estimada)

A região do solo mobilizado na ruptura generalizada será dividida em três diferentes regiões, conforme mostrado na Figura 14. A Zona I (ativa) de Rankine, que está logo abaixo da fundação, a Zona II (radial) de Prandtl, que tem o formato de uma espiral logarítmica e é adjacente à Zona I e por fim a Zona III (passiva) de Rankine, que está entre a zona II e o nível do terreno (N.T.). No capítulo 4 serão discutidas as aproximações que permitem definir a forma da superfície de ruptura.

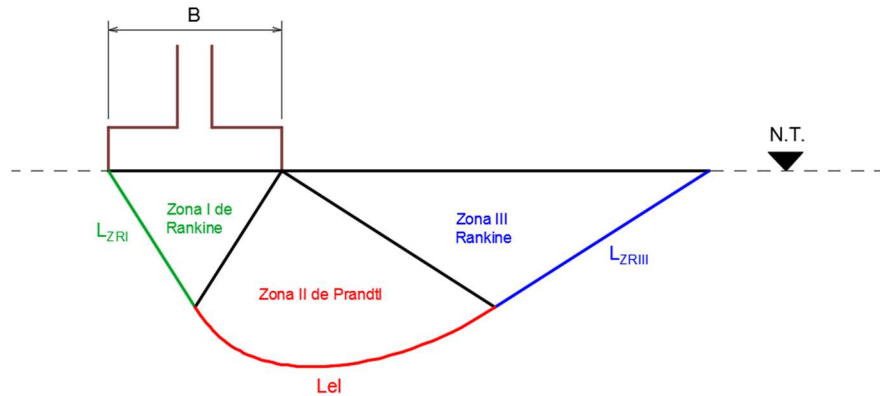


Figura 14 - Respectivas Zonas para cada superfície de ruptura.

O comprimento máximo L_{total} que a superfície de ruptura pode alcançar na ruptura generalizada é a soma dos três comprimentos da superfície de ruptura de cada zona (L_{ZRI} , L_{el} , L_{ZRIII}).

Esse modelo, diferente de VESIC (1975), não diferenciará somente entre ruptura generalizada e não generalizada, ela também determinará, quando a ruptura não for generalizada, se a ruptura é localizada ou por puncionamento. A comparação agora é feita entre a tensão de ruptura (σ_{rup}) e a tensão necessária para gerar uma ruptura localizada de comprimento L_{ZRI} (Zona I de Rankine). Essa tensão será designada como σ_L^* .

$$\sigma_{rup} > \sigma_L^* \rightarrow \text{Ruptura localizada}$$

$$\sigma_{rup} < \sigma_L^* \rightarrow \text{Ruptura por puncionamento}$$

A determinação, através desse modelo, dos três modos de rupturas será mostrada, primeiramente, para distinção entre ruptura generalizada e ruptura não generalizada (item 3.1). Depois, no item 3.2, será mostrado, para os resultados que resultarem ruptura não generalizada na primeira análise, se a ruptura é localizada ou por puncionamento. Nas duas aplicações pode-se trabalhar tanto com sapatas longas quanto com sapatas em que suas dimensões se aproximam.

3.1. Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos para distinção entre ruptura generalizada e ruptura não generalizada

3.1.1. Para $P \gg B$

Como já foi dito, para a aplicação do modelo há de se conhecer a tensão de ruptura (σ_{rup}) e a tensão necessária para gerar uma superfície de ruptura de comprimento máximo L_{total} .

O cálculo da tensão de ruptura (σ_{rup}) para fundação sem embutimento sob solos arenosos é dado por:

$$\sigma_{rup} = \zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma \quad (22)$$

Substituindo na equação (22) o valor de ζ_γ , que é fator de forma conforme Tabela 1 para $P \gg B$, tem-se:

$$\sigma_{rup} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \right) \cdot N_\gamma$$

Onde N_γ é definido conforme a equação (4).

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q + 1) \cdot \tan(\phi)$$

A tensão necessária para gerar uma fissura de comprimento máximo L_{total} é dada por:

$$\sigma_L = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \quad (23)$$

Onde:

L_{total} = comprimento da superfície de ruptura quando o modo for generalizado.

η = densidade superficial de energia [kN/m]

As variáveis L_{total} e η serão calculadas explicitamente nos capítulos 4 e 5. Entretanto, serão mostrados agora suas equações finais. Para o comprimento total da superfície de ruptura tem-se:

$$L_{total} = B \cdot \left[\frac{\sin(\phi) + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} \cdot \sin \phi - 1}{\sqrt{2} \sin \phi \cdot \left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]} \right] \quad (24)$$

Onde L_{total} de cada Zona pode ser discretizada conforme as equações (25), (26) e (27):

$$L_{ZRI} = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} \quad (25)$$

$$L_{el} = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right]}}{-\tan(\phi) \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} \cdot \sec(\phi) \left(e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)} - e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)} \right) \quad (26)$$

$$L_{ZRIII} = \frac{B \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]} \quad (27)$$

E para a densidade superficial de energia:

$$\eta = \eta_{ZRI} + \eta_{el} + \eta_{ZRIII} \quad (28)$$

$$\eta = \frac{B^2 \cdot \gamma}{8(-1 + \sin \phi)} \left[1 - 3 \sin \phi + e^{\pi \tan \phi} \cdot (-1 - 3 \cdot \sin \phi + \sin 3\phi) + \sin 3\phi \right] \quad (29)$$

Onde η de cada Zona pode ser discretizada conforme as equações (30), (31) e (32):

$$\eta_{ZRI} = \frac{\gamma \cdot B^2}{2} \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (30)$$

$$\eta_{el} = \frac{B^2 \cdot \gamma}{8(\sin \phi - 1)} \left[+1 - 2 \sin \phi + \sin 3\phi + e^{\pi \tan \phi} (-1 - 2 \cdot \sin \phi + \sin 3\phi) \right] \quad (31)$$

$$\eta_{ZRIII} = \frac{\gamma}{8} \cdot B^2 \cdot \frac{\tan(\phi)}{\left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]^4} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \cdot (\cos(\phi))^2 \cdot e^{\pi \tan \phi} \quad (32)$$

De modo que a partir de $\sigma_{rup} = \sigma_L$, passa-se a ter ruptura generalizada.

Substituindo as equações 22 e 23 na equação $\sigma_{rup} = \sigma_L$, chega-se à condição crítica:

$$\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}} \quad (33)$$

Então tem-se para fundação assente em solo arenoso com $P \gg B$, as seguintes condições:

$$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}} \rightarrow \text{Ruptura generalizada}$$

$$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}} \rightarrow \text{Ruptura não generalizada}$$

3.1.2. Para $P = B$ e Sapatas Retangulares

A tensão de ruptura (σ_{rup}), por se tratar do mesmo caso de fundação sob solo arenoso assente na superfície do nível do terreno, mantém-se conforme a equação (22). Porém seu fator de forma muda de valor, já que não se trata fundação superficial corrida, mas sim retangular, circular ou quadra, cujos valores foram mostrados na Tabela 1.

Agora, por não se tratar mais de um problema de estado plano de deformação, a largura t da superfície de ruptura varia ao longo de L_{total} (Figuras 15 e 16), não podendo mais usar como simplificação que sua largura t se mantém ao longo de toda superfície de ruptura. Ao invés de descrever essa variação em detalhe (o que acarretaria uma integral complicada, já que esse alargamento não é linear), será tomada uma largura t_{efet} , dada por:

$$t_{efet} = \frac{t_{final} + t_{inicial}}{2} \quad (34)$$

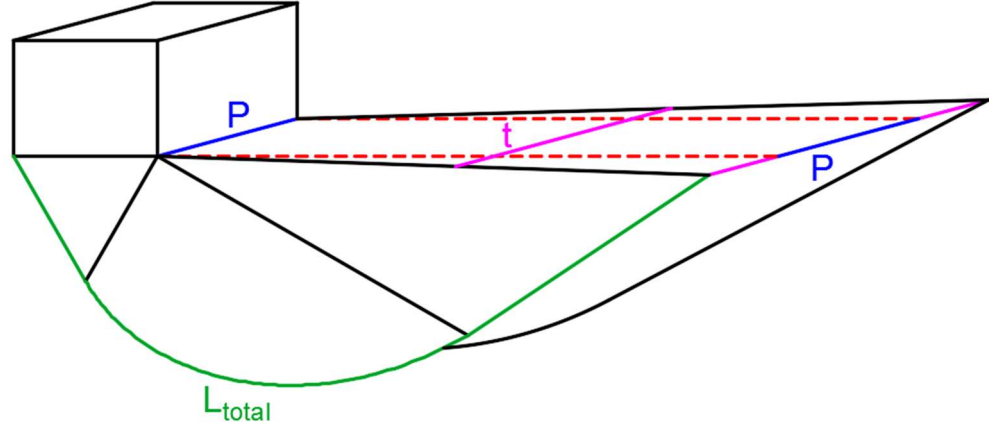


Figura 15 - Variação da largura da superfície de ruptura do solo de modo generalizado

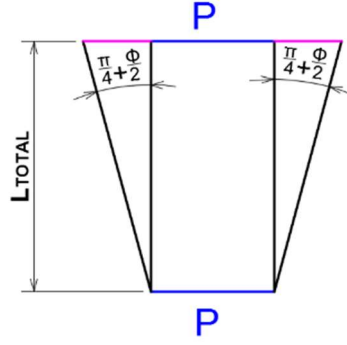


Figura 16 - Vista em planta da Figura 15.

Então tem-se que $t_{inicial}$ e t_{final} são respectivamente:

$$t_{inicial} = P \quad (35)$$

$$t_{final} = P + 2 \cdot L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (36)$$

Substituindo as equações (35) e (36) na equação (34), chegar-se-á a:

$$t_{efet} = P + L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (37)$$

Para a determinação do ângulo de espraio da superfície de ruptura, foi utilizado o ângulo correspondente à ruptura na condição ativa.

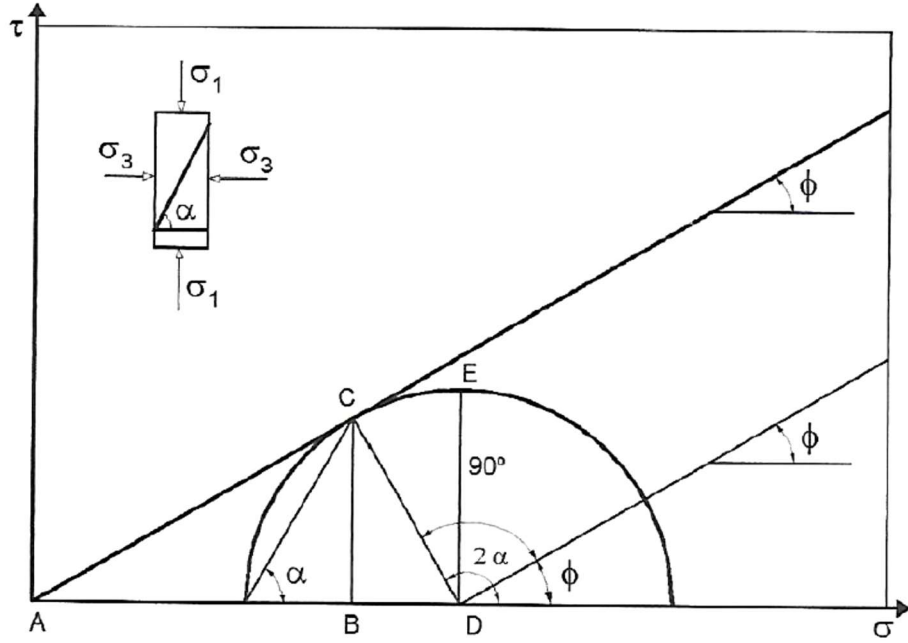


Figura 17 - Análise do estado de tensões no plano de ruptura (PINTO, 2006)

O plano de ruptura forma um ângulo α com o plano principal maior. Do centro do círculo de Mohr (ponto D), ao se traçar uma paralela à envoltória de resistência, constata-se que o ângulo 2α é igual ao ângulo ϕ mais 90° . (PINTO, 2006). Com isso:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \phi \quad (38)$$

Logo o ângulo associado à ruptura do solo é $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$.

Assim, o balanço de energia será feito conforme a equação (18)

$$E_T = W - U$$

Substituindo na equação (18) as equações (15) e (17), considerando-se $t = t_{efet}$, tem-se:

$$E_T = \eta \cdot L_{total} \cdot t_{efet} - \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot \pi \cdot \left(\frac{L_{total}}{2} \right)^2 \cdot t_{efet}$$

Substituindo o valor de t_{efet} , ou seja, a equação (37):

$$E_T = \eta \cdot L_{total} \cdot \left[P + L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right] - \frac{\sigma^2}{8 \cdot E} \cdot \pi \cdot L_{total}^2 \cdot \left[P + L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right] \quad (39)$$

A seguir serão avaliados para casos em que a forma da base da fundação for quadrada, circular ou retangular. Para encontrar a condição de L_{total} que otimiza a energia, a equação (39) será derivada em relação a L_{total} e igualada a zero:

$$\frac{dE_T}{dL_{total}} = 0 \quad (40)$$

$$0 = \eta \cdot P + 2 \cdot \eta \cdot L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - \frac{\sigma^2 \cdot \pi \cdot L_{total} \cdot P}{4 \cdot E} - \frac{3 \cdot \sigma^2 \cdot \pi \cdot L_{total}^2}{8 \cdot E} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\sigma^2 \left(\frac{\pi \cdot L_{total} \cdot P}{4 \cdot E} + \frac{3 \cdot \pi \cdot L_{total}^2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{8 \cdot E} \right) = \eta \cdot P + 2 \cdot \eta \cdot L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Com isso, explicitando-se o valor σ , a tensão necessária para gerar uma fissura de comprimento L é dada por:

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{8 \cdot E \cdot \eta \cdot \left[P + 2 \cdot L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right]}{\pi \cdot L_{total} \cdot \left[2 \cdot P + 3 \cdot \pi \cdot L_{total} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right]}} \quad (41)$$

Como também, fazendo a correlação com a Teoria de Griffith (item 2.3), chegar-se-á a

$$\sigma_L = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi}} \quad (42)$$

A correção para fundações superficiais cuja base pode apresentar formas quadradas, circulares ou retangulares é dada pela equação $\sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}}$.

Onde χ é

$$\chi = \frac{L_{total}}{P} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (43)$$

As variáveis L_{total} e η serão calculadas explicitamente nos capítulos 4 e 5, conforme já comentado anteriormente. Note que para $P \gg L_{total}$, $\chi=0$, com isso volta a se ter um estado plano de deformação.

De modo que para fundações superficiais em que $P = B$, a condição crítica é:

$$0,6 \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}} \quad (44)$$

Então para fundação em que $P = B$, tem-se a seguinte definição:

$$0,6 \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}} \rightarrow \text{Ruptura generalizada}$$

$$0,6 \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}} \rightarrow \text{Ruptura não generalizada}$$

Para sapatas retangulares, o que muda é somente a tensão de ruptura, que terá o seu fator de forma de Vesic (ζ_γ) igual a $1 - 0,4 \cdot \frac{B}{P}$. Com isso a avaliação comparativa fica:

$$\left(1 - 0,4 \cdot \frac{B}{P}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}} \quad \text{Ruptura generalizada}$$

$$\left(1 - 0,4 \cdot \frac{B}{P}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2\cdot\chi}{1+\frac{3}{2}\cdot\chi}} \quad \text{Ruptura não generalizada}$$

3.2. Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos para Resultado de Ruptura Não Generalizada

Quando o modelo proposto fornecer como resultado ruptura não generalizada há que se verificar se o modo de ruptura é localizado ou por puncionamento.

A ideia é repetir os dois argumentos, σ_{rup} e σ_L , das equações (22) e (42), porém agora os parâmetros L_{total} e η da equação (42) pertencerão somente a Zona I. Neste momento o L_{total} será chamado de L_{ZRI} , equação (25), e η será chamado de η_{ZRI} , equação (30).

$$\sigma_L^* = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta_{ZRI}}{\pi \cdot L_{ZRI}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}} \quad (45)$$

Onde χ^* é definido como:

$$\chi^* = \frac{L_{ZRI}}{p} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (46)$$

Com isso σ_L^* , equação (45), fica:

$$\sigma_L^* = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{ZRI}/B}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}} \quad (47)$$

Portanto a avaliação comparativa usando o mecanismo de cálculo do novo modelo para ruptura não generalizada fica:

$$\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{ZRI}/B}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}} \text{ Ruptura localizada}$$

$$\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{ZRI}/B}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}} \text{ Ruptura por puncionamento.}$$

4. CÁLCULO DO COMPRIMENTO DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA GENERALIZADA DO SOLO

Para se usar o Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos deve-se conhecer previamente o comprimento da superfície de ruptura. Por isso este capítulo demonstrará o cálculo do comprimento da superfície de ruptura do solo ao longo das três regiões apresentadas anteriormente.

O problema, formulado como mostrado na Figura 18, foi resolvido usando os métodos da Teoria da Plasticidade (VESIC, 1975). A solução básica disponível (PRANDTL, 1921; REISSNER, 1924) indica que a ruptura compreende três regiões distintas: zonas I, II e III. A zona I é a zona ativa de Rankine, a qual empurra a zona radial de Prandtl ao lado. A zona III é a zona passiva de Rankine que tende à direção ascendente. O limite inferior *acde* da massa de solo que foi deslocado é composto por duas linhas retas (*ac* e *de*), inclinadas de $45^\circ + \frac{\phi}{2}$ e $45^\circ - \frac{\phi}{2}$, respectivamente, com a horizontal. A forma da curva no trecho CD depende do ângulo ϕ e da proporção $\frac{\gamma \cdot B}{q}$. Para $\frac{\gamma \cdot B}{q} \rightarrow 0$ (“solo sem peso”) a curva se torna uma espiral logarítmica a qual para $\gamma = 0$ torna-se um círculo (VESIC, 1975). Para o caso geral, $\gamma \cdot B \neq 0$, a curva encontra-se entre uma espiral e um círculo, desde que $\phi \neq 0$. Para um solo cujo ângulo de atrito é nulo, a curva sempre toma a forma de um círculo. Todas essas descobertas foram confirmadas experimentalmente (DE BEER; VESIC, 1958), embora o ângulo ativo de Rankine possa ser ligeiramente superior que $45^\circ + \frac{\phi}{2}$, pelo menos para fundações superficiais retangulares longas ($P \gg B$) assentes em areia.

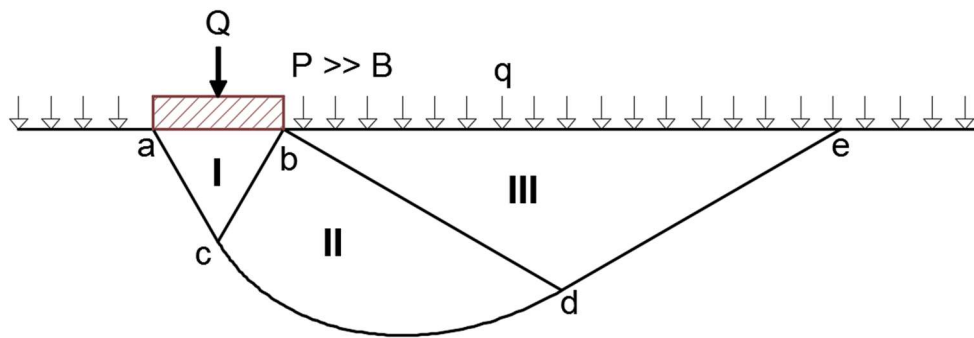


Figura 18 - Esquema simplificado da ruptura generalizada com as respectivas zonas.

Para o cálculo do comprimento da superfície de ruptura do solo, quando se dá de forma generalizada, são consideradas algumas premissas retiradas do artigo de VESIC, 1975. Uma delas é que o ângulo da zona I ativa de Rankine com a horizontal é igual a $45^\circ + \frac{\phi}{2}$, a outra é o ângulo com a horizontal da zona III passiva de Rankine é $45^\circ - \frac{\phi}{2}$, sendo ϕ o ângulo de atrito do solo.

Para o cálculo do ângulo remanescente do triângulo isósceles (Figura 19) abaixo da sapata fez-se a soma dos ângulos internos do triângulo, cuja soma total é π .

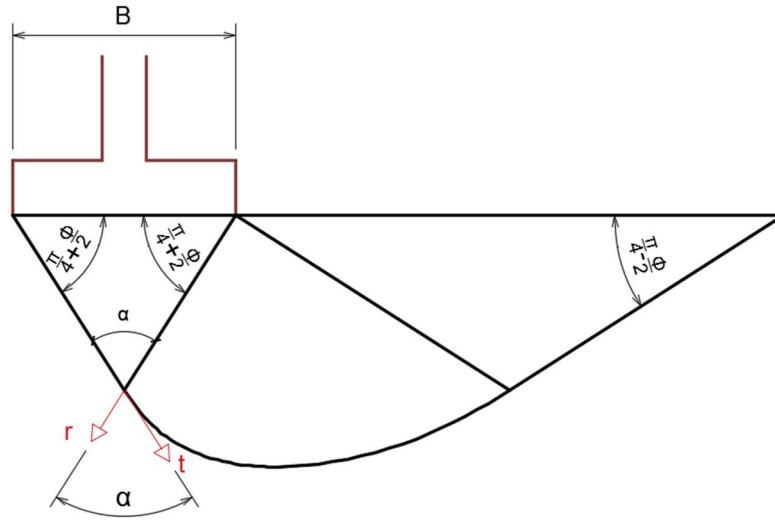


Figura 19 – Ângulos na ruptura.

$$\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} = \pi \quad (48)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi \quad (49)$$

Como já foi mencionado anteriormente, a zona II radial de Prandtl forma uma curva em espiral logarítmica. A principal característica da espiral logarítmica é que o vetor radial r e o tangencial t de qualquer ponto da espiral logarítmica formam um ângulo (α) que é mantido constante em toda a sua curva.

A equação da espiral logarítmica em coordenadas polares é $r(\theta) = a \cdot e^{b\theta}$ onde a e b são constantes e θ é o ângulo medido a partir da superfície em sentido horário.

Para determinar os ângulos do segundo triângulo (zona III passiva de Rankine) deve-se realizar uma análise trigonométrica a partir da Zona I de Rankine e utilizar o fato de que a região determinada pela exponencial logarítmica é descrita por uma curva cuja tangente forma um ângulo fixo em relação à direção radial. Pela Figura 20, pode-se observar que tal ângulo é $\frac{\pi}{2} - \phi$. Assim, o ângulo φ da zona III é suplemento do ângulo $\frac{\pi}{2} - \phi$, ou seja, $\frac{\pi}{2} + \phi$.

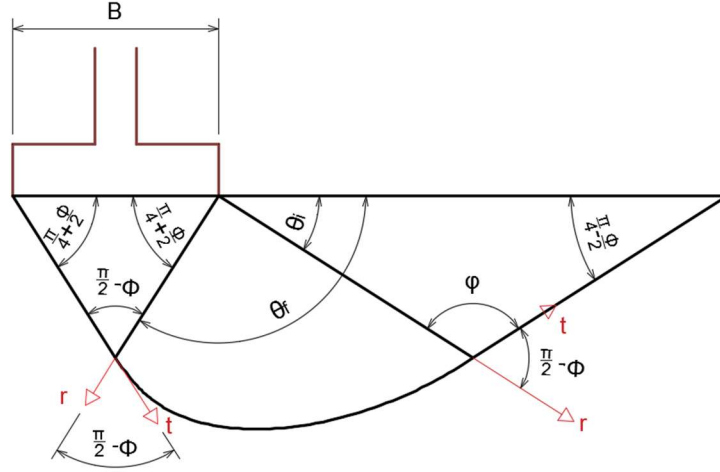


Figura 20 – Ângulo formado pelo vetor radial com o vetor tangencial – constante em toda superfície da espiral logarítmica.

$$\frac{\pi}{2} - \phi + \varphi = \pi \quad (50)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \phi \quad (51)$$

Com isso, ao serem somados os ângulos internos da Zona III de Rankine obtém-se o ângulo inicial (θ_i) da espiral logarítmica.

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} + \phi + \theta_i = \pi \quad (52)$$

$$\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (53)$$

O ângulo final (θ_f) da espiral logarítmica é obtido pela soma do ângulo inicial (θ_i) e $\frac{\pi}{2}$, já que o ângulo da zona radial de Prandtl é $\frac{\pi}{2}$.

$$\theta_f = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (54)$$

A Figura 21 mostra as três zonas com todos os seus respectivos ângulos:

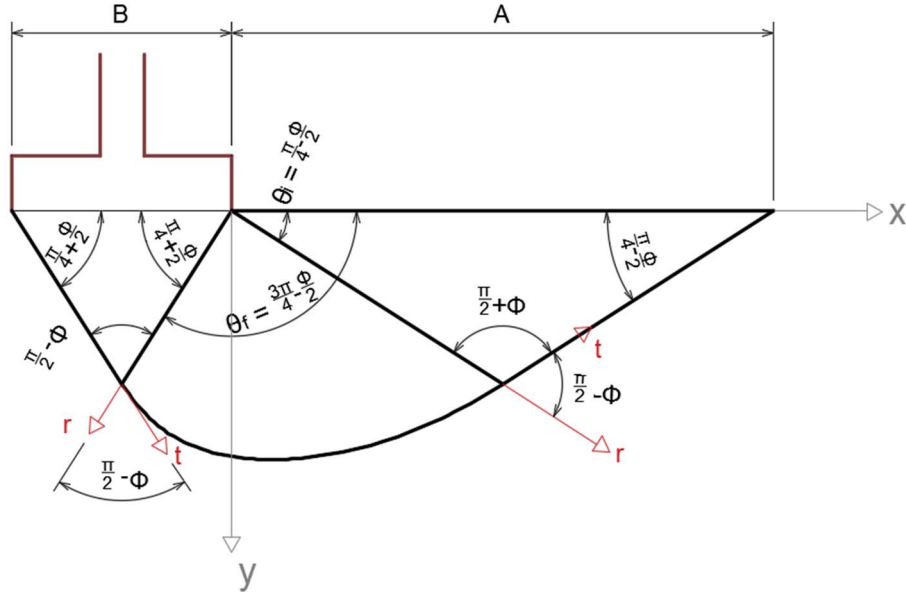


Figura 21 - Todos os ângulos das três zonas.

Agora serão definidas as constantes a e b da espiral logarítmica da zona radial de Prandtl, lembrado que a equação da espiral logarítmica em coordenadas polares é $r(\theta) = a \cdot e^{b\theta}$.

A espiral logarítmica forma um ângulo de $\frac{\pi}{2} - \phi$ entre a direção radial e a direção tangencial à curva. O ângulo entre essas duas direções é dado por:

$$[\tan \theta_{curva}]^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} \quad (55)$$

Essa conclusão é válida, já que se tem a seguinte propriedade:

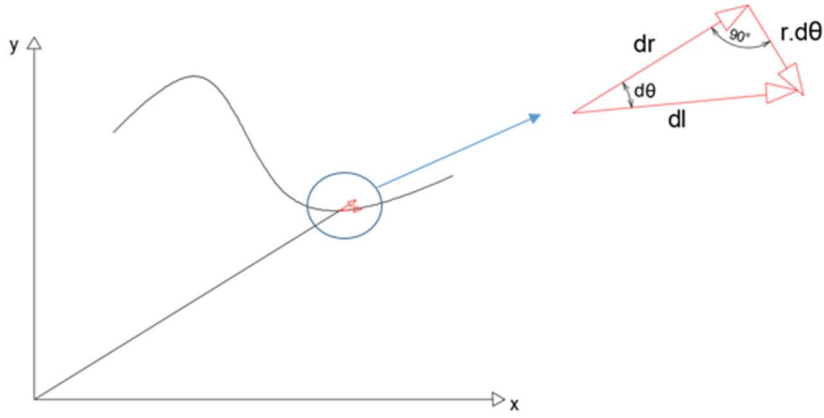


Figura 22 – Decomposição do elemento de arco dl

$$\tan \theta_{curva} = \frac{\sin \theta_{curva}}{\cos \theta_{curva}} = \frac{\frac{rd\theta}{dl}}{\frac{dr}{dl}} = \frac{rd\theta}{dl} \cdot \frac{dl}{dr} = \frac{rd\theta}{dr} \quad (56)$$

Logo,

$$[\tan \theta_{curva}]^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} \quad (57)$$

A equação da espiral logarítmica, equação (58), e a sua respectiva derivada, equação (59), são:

$$r(\theta) = a \cdot e^{b\theta} \quad (58)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = a \cdot e^{b\theta} \cdot b \quad (59)$$

Substituindo na equação (57) as equações (58) e (59), tem-se:

$$|[\tan(\theta_{curva})]^{-1}| = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{a \cdot e^{b\theta}} \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot b = b$$

$$|[\tan(\theta_{curva} = 90 - \phi)]^{-1}| = b = |\tan(\phi)|$$

Para comprovar que $|\tan(\theta_{curva} = 90 - \phi)|^{-1} = |\tan(\phi)|$ tem-se a seguinte propriedade trigonométrica:

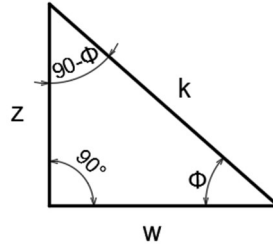


Figura 23 - Triângulo retângulo

$$\tan(\phi) = \frac{z}{w} \quad (60)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{w}{z} \quad (61)$$

$$\tan(\phi) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} = \left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{w}{z}} = \frac{z}{w} \quad (62)$$

Considerando-se o sentido horário como positivo, ou seja, os ângulos da espiral logarítmica do sentido de θ_i para θ_f , deve-se manter essa referência em todo o cálculo. O ângulo de $90 - \phi$ entre a direção radial e a direção tangencial à curva está no sentido anti-horário (sentido negativo), com isso para ser mantida a referência estabelecida inicialmente (positiva no sentido horário) esse ângulo fica: $-90 + \phi$, ou seja $-(90 - \phi)$

Como a tangente é uma função ímpar ($f(-x) = -f(x)$), tem-se:

$$-\tan(\phi) = -\left[\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]^{-1} = b \quad (63)$$

Assim, substituindo b (equação 63) na equação da espiral logarítmica, equação (58), chega-se a $r(\theta) = a \cdot e^{-\tan(\phi)\theta}$.

Para ser definido o valor da constante a , há que se calcular o cosseno do ângulo $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ contido na metade do triângulo da Zona I (Figura 24), que está em função de B (menor

dimensão da fundação) e $r(\theta_f)$, o qual é o comprimento do raio da espiral logarítmica quando fizer $\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}(\theta_f)$ com a abscissa.

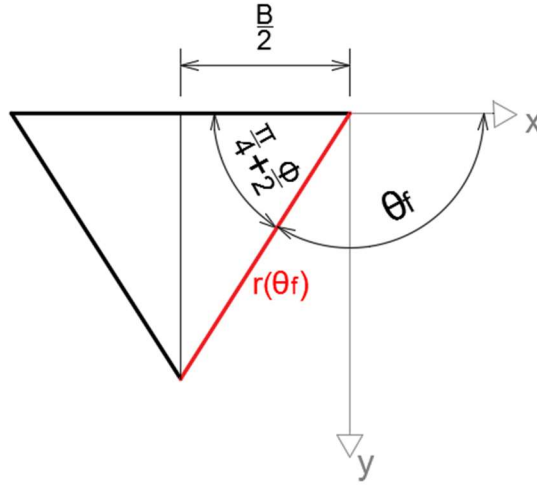


Figura 24 - Zona I e θ_f

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{B/2}{r(\theta_f)} \quad (64)$$

$$r(\theta_f) = \frac{B}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} \quad (65)$$

Pode-se simplificar a operação $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$ com a fórmula de adição de arco trigonométrico para cossenos. A soma entre esses arcos é dada pela seguinte identidade:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (66)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \quad (67)$$

Com isso, pode-se substituir a equação (67) na equação (65):

$$r(\theta_f) = \frac{B}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]}$$

$$r(\theta_f) = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \quad (68)$$

Além disso, para finalmente ser definido o valor final da constante a serão igualadas a equação (68) com a equação (69), a qual é a equação da espiral logarítmica ($r(\theta) = a \cdot e^{b\theta}$) com a substituição da constante b ($-\tan \phi$) e o ângulo θ_f ($\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$).

$$r(\theta_f) = a \cdot e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \quad (69)$$

$$a \cdot e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \quad (70)$$

$$a = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \quad (71)$$

Logo, a equação da espiral logarítmica final é a seguinte:

$$r(\theta) = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \cdot e^{-\tan(\phi) \cdot (\theta)} \quad (72)$$

θ é considerado em radianos.

Será estimado agora o comprimento total da superfície de ruptura generalizada do solo, que inclui os lados externos dos triângulos da Zona I e III (L_{ZRI} e L_{ZRIII}) e o comprimento da espiral logarítmica (L_{el}).

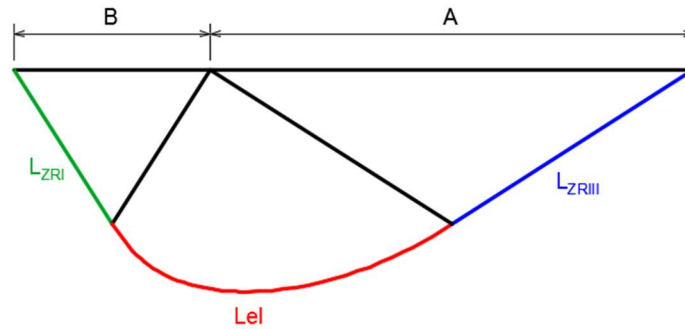


Figura 25 - Comprimento das três zonas.

O comprimento de uma curva em coordenadas polares é dado por:

$$L = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (73)$$

Substituindo as equações (58) e (59) na equação (73), chegar-se-á:

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sqrt{(a \cdot e^{b \cdot \theta})^2 + (a \cdot e^{b \theta} \cdot b)^2} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sqrt{(a \cdot e^{b \cdot \theta})^2 \cdot (1 + b^2)} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} (a \cdot e^{b \cdot \theta}) \cdot \sqrt{1 + b^2} d\theta$$

$$L = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot (e^{b \cdot \theta_f} - e^{b \cdot \theta_i}) \quad (74)$$

Substituindo os ângulos inicial $(\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ e final $(\theta_f = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ na equação (74) obtêm-se:

$$L = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{1 + b^2} \cdot \left(e^{b \cdot (\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2})} - e^{b \cdot (\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})} \right) \quad (75)$$

Substituindo os valores de b e a , determinados nas equações (63) e (71), respectivamente, na equação (75), encontra-se:

$$L_{el} = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{-\tan(\phi) \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]} \sqrt{1 + [\tan(\phi)]^2} \left(e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} - e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \right)$$

Chegando assim na equação (26) já mostrada:

$$L_{el} = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{-\tan(\phi) \cdot \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]} \cdot \sec(\phi) \left(e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} - e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \right)$$

Como $L_{ZRI} = r(\theta_f)$, já que a zona I de Rankine é um triângulo isósceles, chega-se a equação (25):

$$L_{ZRI} = r(\theta_f) = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]}$$

Para o cálculo de L_{ZRIII} , considera-se que $L_{ZRIII} = r(\theta_i)$, já que a zona III de Rankine também é um triângulo isósceles. Com isso substituindo na equação (72) o ângulo $\theta_i \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$, obtêm-se:

$$r\left(\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]} \cdot e^{-\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}$$

$$r\left(\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{B \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]}$$

$$r\left(\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{B \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]} \quad (76)$$

Com isso, chega-se a equação (27):

$$L_{ZRIII} = \frac{B \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]}$$

Como L_{total} é a soma das equações (25), (26) e (27), chega-se na equação (24):

$$L_{total} = B \cdot \left[\frac{\sin(\phi) + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} \cdot \sin \phi - 1}{\sqrt{2} \sin \phi \cdot \left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]} \right]$$

Colocando a equação (24), L_{total} , em função de B e $g(\phi)$, que é definido por $\frac{\sin(\phi) + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} \cdot \sin \phi - 1}{\sqrt{2} \sin \phi \cdot \left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]}$, obtêm-se:

$$L_{total} = B \cdot g(\phi) \quad (77)$$

Tabela 2 - ϕ e $g(\phi)$

ϕ (°)	$g(\phi)$
25	5,24
30	6,43
35	8,12
40	10,64
45	14,63

Para o cálculo do alcance A (Figura 25) será utilizada a lei dos senos:

$$\frac{A}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = \frac{r(\theta_i)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \quad (78)$$

As operações $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$ podem ser simplificadas com base nas fórmulas de adição e subtração de arcos trigonométricos para seno. Já considerados os dois arcos $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ a operação da soma e da diferença entre esses arcos será dada pelas seguintes identidades:

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\phi) \quad (79)$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (80)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \quad (81)$$

Com isso, substituindo essas simplificações trigonométricas, equações (79) e (81) e a equação (76) na equação (78), tem-se que o valor de A é:

$$A = \frac{\cos(\phi)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \cdot \frac{B \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]}$$

$$A = B \cdot \frac{\cos(\phi) \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2} \quad (82)$$

Colocando A em função de B e $w(\phi)$, que é definido por $\frac{\cos(\phi) \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2}$:

$$A = B \cdot w(\phi) \quad (83)$$

Tabela 3 - ϕ e $w(\phi)$

ϕ (°)	$w(\phi)$
25	3,27
30	4,29
35	5,77
40	8,01
45	11,61

Para o caso de um modelo de fundação em que a menor dimensão tenha 10 cm e o solo com $\phi = 30^\circ$, a superfície de ruptura de forma generalizada tem como alcance o valor de 42,90 cm, conforme mostrado na Figura 26.

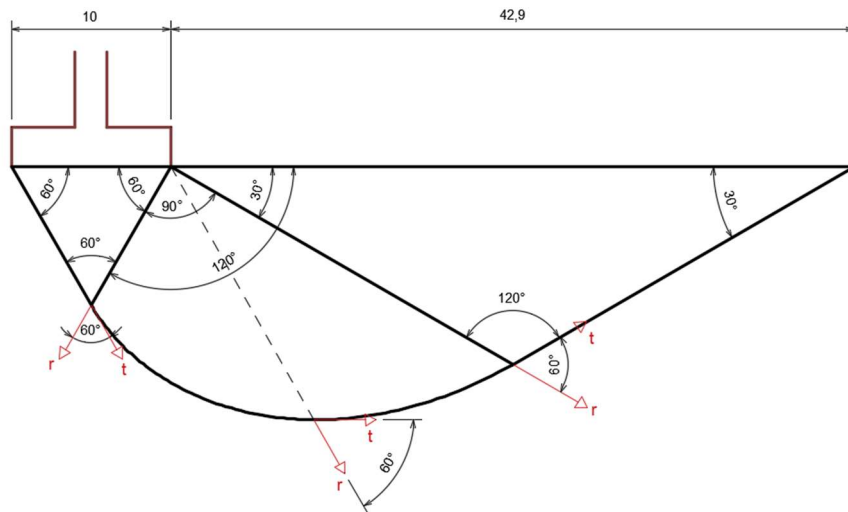


Figura 26 - Esquema da superfície de ruptura para $\phi = 30^\circ$ e $B = 10$ cm

5. DENSIDADE SUPERFICIAL DE ENERGIA (η)

DEMONSTRAÇÃO

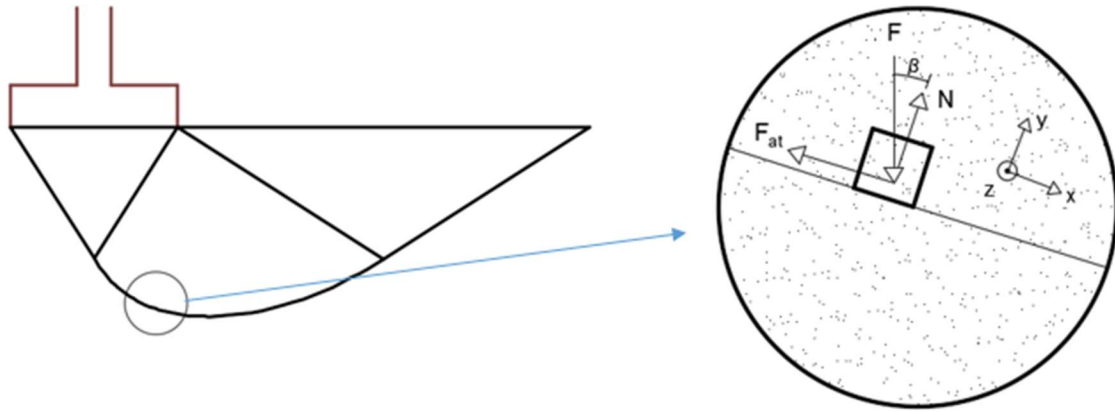


Figura 27 – Diagrama de forças para o cálculo da densidade superficial de energia

Será estimada a energia baseada na mecânica de uma parcela infinitesimal de solo, desprezando o peso dessa parcela de solo e considerando apenas a transmissão do peso da massa de solo acima (força F).

A equação de equilíbrio na direção y é:

$$F_y = N = F \cdot \cos \beta \quad (84)$$

Na direção x , há deslocamento. A energia dissipada nesse deslocamento é dada por:

$$dE = F_{at} \cdot dl = \mu \cdot F \cdot \cos \beta \cdot dl \quad (85)$$

A pressão é definida do seguinte modo:

$$pressão = \frac{|\vec{F}|}{Area} \cong \gamma \cdot y = p \quad (86)$$

$$F = p \cdot Area \quad (87)$$

Onde γ é o peso específico do material.

Substituindo a equação (87) na equação (85), tem-se:

$$dE = \mu \cdot p \cdot Area \cdot \cos \beta \cdot dl \quad (88)$$

Assim, a densidade superficial de energia é estimada dividindo a equação (88) pela seção infinitesimal de área transversal ($Area$),

$$d\eta = \frac{dE}{Area} = \mu \cdot p \cdot \cos \beta \cdot dl \quad (89)$$

Como $\mu = \tan \phi$ e $p = \gamma \cdot y$, então a equação 89 fica:

$$d\eta = \tan \phi \cdot \gamma \cdot y \cdot \cos \beta \cdot dl \quad (90)$$

Se houver embutimento da fundação, a pressão p é igualada a $\gamma \cdot y + q$, sendo q a tensão vertical efetiva no nível da base da fundação. Com isso a equação (90) fica:

$$d\eta = \tan \phi \cdot (\gamma \cdot y + q) \cdot \cos \beta \cdot dl \quad (91)$$

Ou seja, pode-se perceber que a equação (91) é uma equação mais geral do que a equação (90), já que se não houver embutimento pode-se usar a equação (91) considerando $q = 0$, com isso chegar-se-á a equação (90).

5.1. Densidade superficial de energia para zona I (zona ativa de Rankine)

Para a zona I, o ângulo β da equação (91) é igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$, e $\cos \beta \cdot dl$ é igual a dx , já que: $\cos \beta = \frac{dx}{dl}$, de acordo com a figura 28.

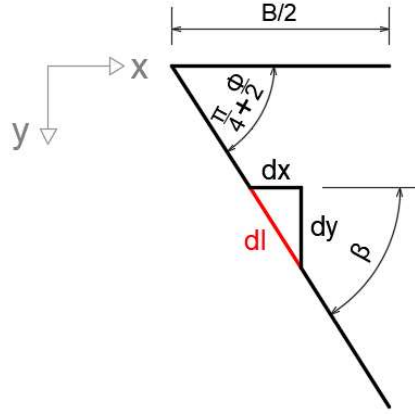


Figura 28 - Zona I ampliada

O valor da distância que parte no nível do terreno até a parcela infinitesimal de solo varia de acordo com a equação da reta $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot x$, com isso a equação (91) fica:

$$d\eta_{ZRI} = \tan \phi \cdot \left(\gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot x + q \right) \cdot dx$$

$$d\eta_{ZRI} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot x \cdot dx + \tan \phi \cdot q \cdot dx$$

$$\eta_{ZRI} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \int_0^{B/2} x \cdot dx + \tan \phi \cdot q \cdot \int_0^{B/2} dx$$

$$\eta_{ZRI} = \tan \phi \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \gamma \cdot \frac{B^2}{8} + \tan \phi \cdot q \cdot \frac{B}{2}$$

Para os casos em que a fundação é assente no nível do terreno (não há embutimento), ou seja $q = 0$, chegar-se-á na equação (30).

$$\eta_{ZRI} = \tan \phi \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{\gamma}{8} \cdot B^2$$

5.2. Densidade superficial de energia para zona II (zona radial de Prandtl)

Para a zona II tem-se, conforme Figura 29:

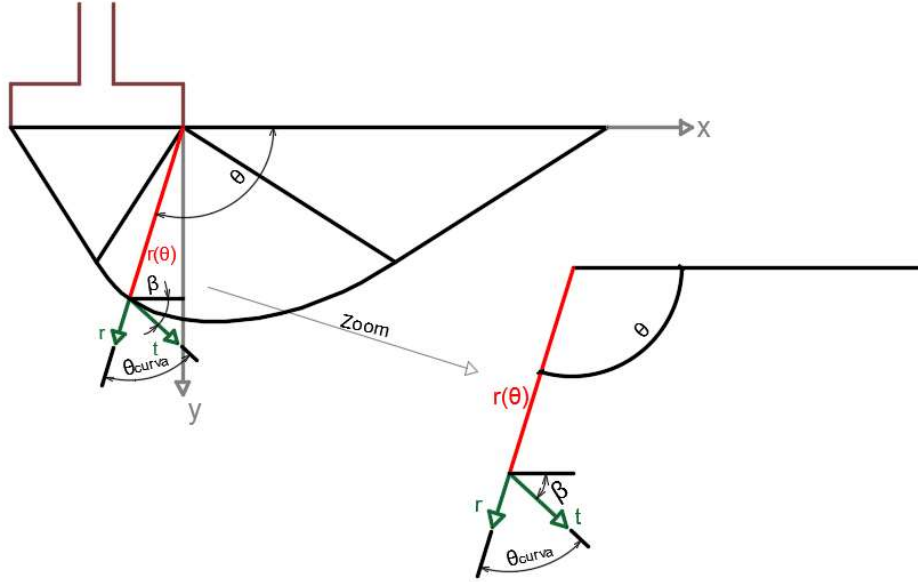


Figura 29 - Zona Radial ampliada

Com isso pode-se obter $\theta = \theta_{curva} + \beta$, logo a equação (91) fica:

$$d\eta = \tan \phi \cdot (\gamma \cdot y + q) \cdot \cos(\theta - \theta_{curva}) \cdot dl$$

O valor da distância que parte no nível do terreno até a parcela infinitesimal de solo varia de acordo com a equação $y = r(\theta) \cdot \sin \theta$, já que $\cos(\theta - 90) = \sin \theta$. Pode-se constatar isso através da seguinte propriedade trigonométrica:

$$\cos(\theta - 90) = \cos \theta \cdot \cos 90 + \sin \theta \cdot \sin 90 = \sin \theta$$

A equação final de $d\eta$, equação (91), fica

$$d\eta = \tan \phi \cdot (\gamma \cdot r(\theta) \cdot \sin \theta + q) \cdot \cos(\theta - \theta_{curva}) \cdot dl \quad (92)$$

Usando as seguinte propriedade trigonométrica:

$$\cos(\theta - \theta_{curva}) = \cos \theta \cdot \cos \theta_{curva} + \sin \theta \cdot \sin \theta_{curva}$$

Como $[\theta_{curva} = 90 - \phi]$ e $[\text{sen}(\theta_{curva}) = \text{sen}(90 - \phi) = \cos(\phi)]$, como também $[\cos(\theta_{curva}) = \cos(90 - \phi) = \text{sen}(\phi)]$, então $[\cos(\theta - \theta_{curva}) = \cos \theta \cdot \text{sen}(\phi) + \text{sen} \theta \cdot \cos(\phi)]$.

Substituindo a equação $[\cos(\theta - \theta_{curva}) = \cos \theta \cdot \text{sen}(\phi) + \text{sen} \theta \cdot \cos(\phi)]$ na equação (92), tem-se:

$$d\eta = \tan \phi \cdot (\gamma \cdot r(\theta) \cdot \text{sen} \theta + q) \cdot (\cos \theta \cdot \text{sen}(\phi) + \text{sen} \theta \cdot \cos(\phi)) \cdot dl \quad (93)$$

Há de se usar uma manobra matemática para simplificar a equação (93). Como o comprimento de uma curva em coordenadas polares é definida como:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy = \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad (94)$$

Pode-se substituir na equação (94) as equações da espiral logarítmica, equação (58), e sua respectiva derivada, equação (59):

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(a \cdot e^{b \cdot \theta})^2 + (a \cdot e^{b \cdot \theta} \cdot b)^2} d\theta \\ dl &= \sqrt{(a \cdot e^{b \cdot \theta})^2 \cdot (1 + b^2)} d\theta \\ dl &= (a \cdot e^{b \cdot \theta}) \cdot \sqrt{1 + b^2} d\theta \\ dl &= r \cdot \sqrt{1 + b^2} d\theta \end{aligned} \quad (95)$$

Substituindo na equação final de $d\eta$, equação (93), a equação (95), tem-se:

$$\begin{aligned} d\eta &= \tan \phi \cdot \gamma \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \text{sen} \theta \cdot \text{sen} \phi \cdot \cos \theta \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi d\theta \\ &\quad + \tan \phi \cdot q \cdot \text{sen} \phi \cdot \cos \theta \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi d\theta + \tan \phi \cdot \gamma \cdot a \cdot e^{b\theta} \\ &\quad \cdot (\text{sen} \theta)^2 \cdot \cos \phi \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi d\theta \\ &\quad + \tan \phi \cdot q \cdot \text{sen} \theta \cdot \cos \phi \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi d\theta \end{aligned} \quad (96)$$

Considerando a fundação sem embutimento, ou seja $q = 0$, a equação (96) fica:

$$d\eta = \tan \phi \cdot \gamma \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi \, d\theta + \tan \phi \cdot \gamma \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot (\sin \theta)^2 \cdot \cos \phi \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi \, d\theta \quad (97)$$

Integrando os dois lados da equação (97), tem-se:

$$\eta_{el} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \cdot \int_{\theta_i}^{\theta_f} a^2 \cdot e^{2b\theta} \cdot \sin \theta \cdot [\cos \theta \cdot \sin \phi + \sin \theta \cdot \cos \phi] \cdot d\theta \quad (98)$$

Como já mostrado, os ângulos inicial e final da espiral logarítmica são, respectivamente, $\theta_i = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ e $\theta_f = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ e as constantes b e a da espiral logarítmica

são, respectivamente, $b = -\tan(\phi)$ e $a = \frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]}$, com isso pode-se substitui-

los na equação (98), gerando assim a seguinte expressão:

$$\eta_{el} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\frac{B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]} \right)^2 \cdot e^{2(-\tan(\phi))\theta} \cdot \sin \theta \cdot [\cos \theta \cdot \sin \phi + \sin \theta \cdot \cos \phi] \cdot d\theta \quad (99)$$

$$\eta_{el} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} \frac{B^2 \cdot e^{2 \cdot \left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2} \cdot e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot [\cos \theta \cdot \sin \phi + \sin \theta \cdot \cos \phi] \cdot d\theta$$

$$\eta_{el} = \frac{\tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \cdot B^2 \cdot e^{2 \cdot \left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2} \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot [\cos \theta \cdot \sin \phi + \sin \theta \cdot \cos \phi] \cdot d\theta$$

$$\eta_{el} = \frac{\tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \cdot B^2 \cdot e^{2 \cdot \left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^2} \left[\int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot d\theta + \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot (\sin \theta)^2 \cos \phi \cdot d\theta \right]$$

Como $(\sin \theta)^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$:

$$\eta_{el} = \frac{\tan \phi \cdot \gamma \cdot \sec \phi \cdot B^2 \cdot e^{2 \cdot \left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \right]}}{2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^2} \left[\int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot d\theta \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right) \cos \phi \cdot d\theta \right] \quad (100)$$

Com isso só a parte das integrais da equação (100) fica:

$$\int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot d\theta \\ + \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \frac{\cos \phi}{2} \cdot d\theta \\ - \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-2 \cdot \tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \cos(2\theta) \cdot \frac{\cos \phi}{2} \cdot d\theta \quad (101)$$

O resultado da equação (101) é:

$$\frac{-(2 \cdot \cos(2\phi) - 2) \cdot \left(e^{\phi \tan \phi} \cdot e^{\frac{-\pi \tan \phi}{2}} + e^{\phi \tan \phi} \cdot e^{\frac{-3\pi \tan \phi}{2}} \right)}{8 \cdot (\tan \phi)^2 + 8} \\ + \frac{e^{\phi \tan \phi} \cdot \cos \phi \cdot \cot \phi \cdot \left(e^{\frac{-\pi \tan \phi}{2}} - e^{\frac{-3\pi \tan \phi}{2}} \right)}{4} \\ - \frac{2 \cdot \cos(2\phi) \cdot \left(e^{\phi \tan \phi} \cdot e^{\frac{-\pi \tan \phi}{2}} + e^{\phi \tan \phi} \cdot e^{\frac{-3\pi \tan \phi}{2}} \right)}{8 \cdot (\tan \phi)^2 + 8}$$

Com isso há de se chegar na equação final citada no item 3.1, a equação (31):

$$\eta_{el} = \frac{B^2 \cdot \gamma}{8(\sin \phi - 1)} \left[+1 - 2 \sin \phi + \sin 3\phi + e^{\pi \tan \phi} (-1 - 2 \cdot \sin \phi + \sin 3\phi) \right]$$

Se houver embutimento, ou seja $q \neq 0$, as parcelas que envolvem q na equação (96) serão consideradas. Essas parcelas são:

$$\tan \phi \cdot q \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi \, d\theta + \tan \phi \cdot q \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \cdot a \cdot e^{b\theta} \cdot \sec \phi \, d\theta \quad (102)$$

Integrando e substituindo os valores das constantes nas duas parcelas da equação (102) tem-se:

$$\frac{\tan \phi \cdot q \cdot \sec \phi \cdot B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)} \left[\int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{\tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \cdot d\theta + \int_{\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}}^{\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}} e^{-\tan(\phi) \cdot \theta} \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \cdot d\theta \right] \quad (103)$$

Resolvendo a integral da equação (103):

$$\frac{\tan \phi \cdot q \cdot \sec \phi \cdot B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)} \cdot \left[\frac{e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} \cdot \sin \phi \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right)}{(\tan \phi)^2 + 1} - \frac{e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sin \phi \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right)}{(\tan \phi)^2 + 1} + \frac{e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} \cdot \cos \phi \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right)}{(\tan \phi)^2 + 1} + \frac{e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos \phi \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \tan \phi\right)}{(\tan \phi)^2 + 1} \right] \quad (104)$$

Simplificando o resultado da equação (104):

$$\frac{\tan \phi \cdot q \cdot \sec \phi \cdot B \cdot e^{\left[\tan(\phi) \cdot \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right]}}{\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)} \cdot \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{(\tan \phi)^2 + 1} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)}}{(\tan \phi)^2 + 1} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)} \cdot \tan \phi}{(\tan \phi)^2 + 1} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot e^{\tan \phi \cdot \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \tan \phi}{(\tan \phi)^2 + 1} \right] \quad (105)$$

Com isso, se houver embutimento há de se acrescentar na equação (31) a equação (105).

5.3. Densidade superficial de energia para zona III (zona passiva de Rankine)

Para a zona III, o ângulo β da equação (91) é igual a $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$, e $\cos \beta \cdot dl$ é igual a dx , de acordo com Figura 30.

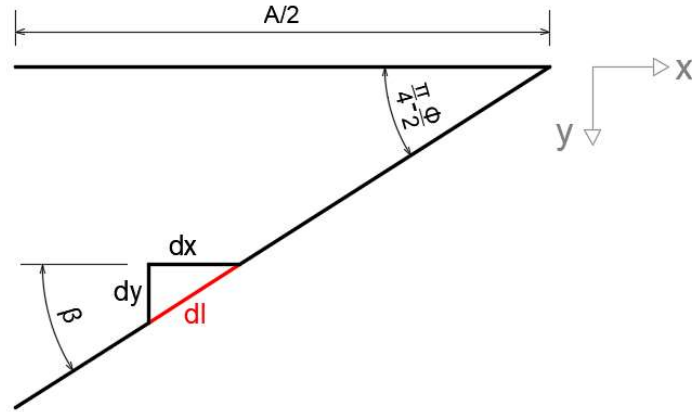


Figura 30 - Zona III ampliada

O valor da distância que parte no nível do terreno até a parcela infinitesimal de solo varia de acordo com a equação da reta $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot x$, com isso a equação (91) fica:

$$d\eta_{ZRIII} = \tan \phi \cdot \left(\gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot x + q \right) \cdot dx$$

$$d\eta_{ZRIII} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot x \cdot dx + \tan \phi \cdot q \cdot dx \quad (106)$$

Integrando a equação (106) dos dois lados:

$$\eta_{ZRIII} = \tan \phi \cdot \gamma \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot \int_0^{A/2} x \cdot dx + \tan \phi \cdot q \cdot \int_0^{A/2} dx \quad (107)$$

$$\eta_{ZRIII} = \tan \phi \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot \gamma \cdot \frac{A^2}{8} + \tan \phi \cdot q \cdot \frac{A}{2} \quad (108)$$

Substituindo na equação (108) o alcance A, equação (82), tem-se:

$$\eta_{ZRIII} = \tan \phi \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \cdot \gamma \cdot \left(B \cdot \frac{\cos(\phi) \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)}}{\left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \tan \phi \cdot q \cdot B$$

$$\cdot \frac{\cos(\phi) \cdot e^{\tan(\phi) \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)}}{2 \cdot \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]^2} \quad (109)$$

Considerando a fundação assente no nível do terreno, ou seja $q = 0$, na equação (109), chegar-se-á na equação final citada no item 3.1, equação (32):

$$\eta_{ZRIII} = \frac{\gamma}{8} \cdot B^2 \cdot \frac{\tan(\phi)}{\left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]^4} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \cdot (\cos(\phi))^2 \cdot e^{\pi \tan \phi}$$

6. COMPARAÇÃO DOS MODELOS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, os resultados obtidos com base nos dois critérios de estimativa do modo de ruptura (Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos e VESIC, 1975) serão comparados aos resultados experimentais apresentados no artigo do VESIC, 1963. Nesse trabalho são apresentados resultados experimentais de ensaios em placas circulares e retangulares assentes na superfície de solo arenoso. As informações das características físicas e de resistência do solo (ângulo de atrito e peso específico do solo), da geometria da fundação, bem como os resultados do tipo de ruptura de cada ensaio foram obtidos a partir das tabelas 3, 4 e 5, do respectivo artigo.

O solo arenoso usado no experimento de Vesic foi o mesmo em todos os ensaios, tendo sido variada a compacidade relativa do material. Deste modo, variando-se o índice de vazios, consequentemente foram alterados os pesos específicos do solo e os ângulos de atrito. O peso específico dos grãos (γ_s) é de 26,52 kN/m³.

Com esse dado ($\gamma_s = 26,52$ kN/m³), é possível estimar o índice de vazios (e) após a areia ser vertida para o ensaio, e portanto determinar o ângulo de atrito (ϕ) através da relação empírica obtida por Vesic, que é:

$$\tan(\phi) = \frac{0,68}{e} \quad (110)$$

O índice de vazios, conforme mostrado na equação (111), é função do peso específico aparente seco (γ_d) e do peso específico dos grãos (γ_s).

$$e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1 \quad (111)$$

O peso específico aparente seco (γ_d) de cada ensaio é fornecido na tabela 4 do artigo VESIC (1963).

A seguir, será mostrado um exemplo da determinação do ângulo de atrito (ϕ) e do índice de vazios do solo (e), usando as equações (110) e (111), respectivamente, utilizando como base os dados do ensaio número 16 de VESIC (1963).

Como o peso específico aparente seco (tabela 4 do artigo citado anteriormente) é $\gamma_d = 15,44 \text{ kN/m}^3$, com isso pode-se calcular o índice de vazios (e) através da equação (111):

$$e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1 = e = \frac{26,52}{15,44} - 1 = 0,7176$$

Portanto, usando a equação (110), o ângulo de atrito é:

$$\tan(\phi) = \frac{0,68}{0,7176} = 0,9476$$

$$\tan^{-1}(0,9476) = 43,46^\circ$$

A seguir segue a Tabela 4 com os resultados da estimativa do índice de vazios (e) e do ângulo de atrito (ϕ) de todos os ensaios apresentados no artigo para fundação assente em solo arenoso:

Tabela 4 - Peso específico seco, índice de vazios e ângulo de atrito dos diferentes ensaios.

Ensaio	$\gamma_d \text{ (kN/m}^3\text{)}$	e	$\tan(\phi)$	$\phi \text{ (}^\circ\text{)}$	Ensaio	$\gamma_d \text{ (kN/m}^3\text{)}$	e	$\tan(\phi)$	$\phi \text{ (}^\circ\text{)}$
23	13,23	1,0045	0,6769	34,10	1	14,99	0,7692	0,8841	41,48
43	13,34	0,9880	0,6883	34,54	41	15,02	0,7656	0,8881	41,61
3	13,45	0,9717	0,6998	34,98	64	15,22	0,7424	0,9159	42,49
83	14,09	0,8822	0,7708	37,63	81	15,25	0,7390	0,9201	42,62
22	14,38	0,8442	0,8055	38,85	82	15,25	0,7390	0,9201	42,62
42	14,58	0,8189	0,8304	39,70	34	15,37	0,7254	0,9374	43,15
63	14,69	0,8053	0,8444	40,18	84	15,41	0,7210	0,9432	43,33
2	14,72	0,8016	0,8483	40,31	61	15,41	0,7210	0,9432	43,33
21	14,90	0,7799	0,8719	41,09	16	15,44	0,7176	0,9476	43,46
62	14,89	0,7811	0,8706	41,04	44	15,50	0,7110	0,9564	43,72

6.1. Módulo de Elasticidade do solo (E)

Os módulos de elasticidade do solo (E) para diferentes ensaios não foram fornecidos no artigo (VESIC, 1963). Para a estimativa dos mesmos, foi utilizada a proposta do mesmo autor em VESIC (1975). É definido nesse artigo que para uma faixa de níveis de tensões variando de baixa a elevada, o módulo de elasticidade (E) de solos arenosos aumenta com o nível de tensões (tensão normal média ou octaédrica, σ_m) de acordo com a equação:

$$E = E_1 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_1}}. \quad (112)$$

Onde $E_1 = 39.180,65 \text{ kN/m}^2$ e $\sigma_1 = 104,64 \text{ kN/m}^2$.

O módulo de elasticidade E_1 corresponde à tensão média normal σ_1 . Com isso através da tensão normal média (considerada a uma profundidade de $B/2$ abaixo da base da fundação), pode-se estimar o módulo de elasticidade para cada ensaio. A seguir segue a Tabela 5, que apresenta os módulos de Elasticidade (E) obtidos para cada ensaio.

Tabela 5 - Módulos de elasticidade.

Placa Circular		Placa Retangular	
Ensaio	E (kN/m ²)	Ensaio	E (kN/m ²)
44	2.476,09	16	1.764,97
41	2.476,26	1	1.766,13
42	2.479,70	2	1.766,21
43	2.464,05	3	1.759,65
34	1.821,75		
21	1.820,36		
22	1.820,43		
23	1.811,57		
61	3.057,14		
62	3.059,30		
63	3.059,14		
64	3.058,21		
84	3.530,08		
81	3.531,21		
82	3.531,21		
83	3.528,89		

6.2. Comparação entre os resultados obtidos

Ao substituir os valores dos módulos de elasticidade (Tabela 5) e as dimensões da fundação (Tabelas 6 e 7) nas equações do Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos (detalhada no capítulo 3), pode-se comparar seus resultados com os de VESIC, 1963. Antes de serem apresentados os resultados, seguem os valores das dimensões das fundações de cada ensaio (Tabelas 6 e 7).

Tabela 6 - Placa Circular.

Placa Circular	
Ensaio	B (m)
44	0,1000
41	0,1000
42	0,1000
43	0,1000
34	0,0540
21	0,0540
22	0,0540
23	0,0540
61	0,1524
62	0,1524
63	0,1524
64	0,1524
84	0,2032
81	0,2032
82	0,2032
83	0,2032

Tabela 7 - Placa Retangular.

Placa Retangular		
Ensaio	B (m)	P (m)
16	0,0508	0,3048
1	0,0508	0,3048
2	0,0508	0,3048
3	0,0508	0,3048

Primeiramente, há que se verificar se a ruptura é generalizada ou não generalizada, usando o mecanismo de cálculo proposto nesta pesquisa e o modelo de VESIC (1975). Com isso, foram obtidos os seguintes resultados (Tabelas 8 e 9):

Tabela 8 - Resultados do modo de ruptura para placa circular

Placa Circular/ Experimento		Um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos			VESIC (1975)		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L (kN/m ²)	Tipo de ruptura	$(I_r)_{crit}$	I_r	Tipo de ruptura
44	Generalizada	98,93	95,95	Generalizada	393,74	2.506,39	Generalizada
41	Localizada	65,36	84,16	NÃO generalizada	284,25	2.665,09	Generalizada
42	Localizada	45,45	74,81	NÃO generalizada	216,41	2.815,84	Generalizada
43	Puncionamento	17,88	54,48	NÃO generalizada	113,11	3.317,25	Generalizada
34	Generalizada	47,74	58,35	NÃO generalizada	359,58	3.463,46	Generalizada
21	Localizada	31,93	51,34	NÃO generalizada	263,39	3.681,14	Generalizada
22	Localizada	20,95	44,72	NÃO generalizada	192,85	3.934,37	Generalizada
23	Puncionamento	8,94	33,40	NÃO generalizada	107,58	4.581,91	Generalizada
61	Generalizada	139,67	128,48	Generalizada	369,95	2.053,11	Generalizada
62	Localizada	89,27	111,44	NÃO generalizada	261,49	2.193,60	Generalizada
63	Localizada	75,80	105,68	NÃO generalizada	231,33	2.250,15	Generalizada
64	Puncionamento	118,25	121,92	NÃO generalizada	324,55	2.103,16	Generalizada
84	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	369,95	1.778,05	Generalizada
81	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	331,10	1.814,55	Generalizada
82	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	331,10	1.814,55	Generalizada
83	Localizada	63,04	112,11	NÃO generalizada	164,46	2.105,97	Generalizada

Tabela 9 - Resultados do modo de ruptura para placa retangular.

Placa Retangular/ Experimento		Um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos			VESIC (1975)		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L (kN/m ²)	Tipo de ruptura	$(I_r)_{crit}$	I_r	Tipo de ruptura
16	Generalizada	74,33	56,15	Generalizada	903,27	3.542,85	Generalizada
1	Localizada	50,37	49,54	Generalizada	640,82	3.750,94	Generalizada
2	Localizada	40,28	46,03	NÃO generalizada	529,55	3.882,37	Generalizada
3	Puncionamento	15,27	32,98	NÃO generalizada	244,54	4.586,13	Generalizada

Nas Tabelas 8 e 9, os resultados apresentados na cor verde indicam concordância entre o modo de ruptura previsto e o observado experimentalmente. Já os resultados apresentados na cor vermelha não apresentaram concordância. Com isso, utilizando ao modelo de cálculo proposto pode-se perceber que só há dois resultados que não coincidem com os obtidos experimentalmente. Já a aplicação da proposta de VESIC (1975) conduziu

a resultados bastantes imprecisos (todos os seus cálculos analíticos resultaram em ruptura generalizada).

Depois dessa primeira análise (ruptura generalizada ou ruptura não generalizada), é possível prever (com base no modelo proposta no presente trabalho) se as rupturas não generalizadas são localizadas ou por puncionamento (Tabelas 10). Tal procedimento somente será realizado com base no Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos, já que essa foi a única que gerou resultados com ruptura não generalizada. Além disso, Vesic não discute um critério para diferenciar esses dois modos de ruptura a partir do índice de rigidez.

Tabela 10 – Resultado usando o Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos – Placa Circular e Retangular.

Placa Circular/ Experimento		Um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L^* (kN/m ²)	Tipo de ruptura
41	Localizada	98,93	34,88	Localizada
42	Localizada	45,45	33,04	Localizada
43	Puncionamento	17,88	28,26	Puncionamento
21	Localizada	31,93	21,65	Localizada
22	Localizada	20,95	20,31	Localizada
23	Puncionamento	8,94	17,55	Puncionamento
62	Localizada	89,27	47,09	Localizada
63	Localizada	75,80	45,95	Localizada
64	Puncionamento	118,25	49,03	Localizada
83	Localizada	63,04	52,92	Localizada
Placa Retangular/Experimento		Um Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L^* (kN/m ²)	Tipo de ruptura
2	Localizada	40,28	19,13	Localizada
3	Puncionamento	15,27	16,27	Puncionamento

Novamente os resultados apresentados na cor verde indicam concordância com os fornecidos experimentalmente, porém o de cor vermelha não. Pode-se perceber uma maior precisão nos resultados, já que somente o ensaio 64 não refletiu o resultado experimental. Abaixo seguem duas tabelas (Tabelas 11 e 12) que reúnem todos os resultados finais baseado nos dois critérios, bem como os resultados experimentais.

Tabela 11 - Resultados do modo de ruptura para placa circular

Placa Circular/ Experimental		Um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos			VESIC (1975)		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L (kN/m ²)	Tipo de ruptura	$(I_r)_{crit}$	I_r	Tipo de ruptura
44	Generalizada	98,93	95,95	Generalizada	393,74	2.506,39	Generalizada
41	Localizada	98,93	34,88	Localizada	284,25	2.665,09	Generalizada
42	Localizada	45,45	33,04	Localizada	216,41	2.815,84	Generalizada
43	Puncionamento	17,88	28,26	Puncionamento	113,11	3.317,25	Generalizada
34	Generalizada	47,74	58,35	Localizada	359,58	3.463,46	Generalizada
21	Localizada	31,93	21,65	Localizada	263,39	3.681,14	Generalizada
22	Localizada	20,95	20,31	Localizada	192,85	3.934,37	Generalizada
23	Puncionamento	8,94	17,55	Puncionamento	107,58	4.581,91	Generalizada
61	Generalizada	139,67	128,48	Generalizada	369,95	2.053,11	Generalizada
62	Localizada	89,27	47,09	Localizada	261,49	2.193,60	Generalizada
63	Localizada	75,80	45,95	Localizada	231,33	2.250,15	Generalizada
64	Puncionamento	118,25	49,03	Localizada	324,55	2.103,16	Generalizada
84	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	369,95	1.778,05	Generalizada
81	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	331,10	1.814,55	Generalizada
82	Generalizada	161,76	152,51	Generalizada	331,10	1.814,55	Generalizada
83	Localizada	63,04	52,92	Localizada	164,46	2.105,97	Generalizada

Tabela 12 - Resultados do modo de ruptura para placa retangular

Placa Retangular/ Experimental		Um Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos			VESIC (1975)		
Ensaio	Tipo de ruptura do experimento	σ_{rup} (kN/m ²)	σ_L (kN/m ²)	Tipo de ruptura	$(I_r)_{crit}$	I_r	Tipo de ruptura
16	Generalizada	74,33	56,15	Generalizada	903,27	3.542,85	Generalizada
1	Localizada	50,37	49,54	Generalizada	640,82	3.750,94	Generalizada
2	Localizada	40,28	19,13	Localizada	529,55	3.882,37	Generalizada
3	Puncionamento	15,27	16,27	Puncionamento	244,54	4.586,13	Generalizada

A Tabela 13 mostra para cada ensaio a densidade relativa $\left(D_r = \frac{e_{max}-e}{e_{max}-e_{min}}\right)$ do solo e o tipo de ruptura prevista com base no Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos. Como foi ressaltado, Terzaghi associa somente ao tipo de solo o modo de ruptura, ou seja, o solo que apresenta um comportamento fofo tem tendência a uma ruptura localizada, já solos mais resistentes tem

tendência a uma ruptura generalizada. Porém Vesic amplia esse conceito, mostrando que há um tipo de ruptura denominada punção.

Tabela 13 - Densidade relativa correspondente ao solo arenoso utilizado em cada ensaio

Um Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos					
γ_s (kN/m ³)		e_{max}		e_{min}	
26,52		1,1		0,615	
Ensaio	γ_d (kN/m ³)	e	ϕ (°)	D_r	Tipo de ruptura
23	13,23	1,0045	34,10	0,20	Puncionamento
43	13,34	0,9880	34,54	0,23	Puncionamento
3	13,45	0,9717	34,98	0,26	Puncionamento
83	14,09	0,8822	37,63	0,45	Localizada
22	14,38	0,8442	38,85	0,53	Localizada
42	14,58	0,8189	39,70	0,58	Localizada
63	14,69	0,8053	40,18	0,61	Localizada
2	14,72	0,8016	40,31	0,62	Localizada
21	14,90	0,7799	41,09	0,66	Localizada
62	14,89	0,7811	41,04	0,66	Localizada
41	15,02	0,7656	41,61	0,69	Localizada
64	15,22	0,7424	42,49	0,74	Localizada
34	15,37	0,7254	43,15	0,77	Localizada
1	14,99	0,7692	41,48	0,68	Generalizada
81	15,25	0,7390	42,62	0,74	Generalizada
82	15,25	0,7390	42,62	0,74	Generalizada
84	15,41	0,7210	43,33	0,78	Generalizada
16	15,44	0,7176	43,46	0,79	Generalizada
61	15,41	0,7210	43,33	0,78	Generalizada
44	15,50	0,7110	43,72	0,80	Generalizada

Tabela 14 - Classificação das areias segundo a compactação (PINTO, 2006)

Classificação	D_r
Areia fofa	abaixo de 0,33
Areia de compactação média	entre 0,33 e 0,66
Areia compacta	acima de 0,66

A Tabela 15 resume os resultados obtidos

Tabela 15 - Dados completos de cada ensaio

Dados ensaios e resultados									
γ_s (kN/m ³)	26,52	e_{max}	1,1	e_{min}	0,615	Tipo de ruptura			
Ensaio	γ_d (kN/m ³)	e	ϕ (°)	E (kN/m ²)	B (m)	P (m)	D_r	Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações	Dados experimentais (VESIC, 1963)
23	13,23	1,0045	34,10	1.811,57	0,0540	-	0,20	Puncionamento	Puncionamento
43	13,34	0,9880	34,54	2.464,05	0,1000	-	0,23	Puncionamento	Puncionamento
3	13,45	0,9717	34,98	1.759,65	0,0508	0,3048	0,26	Puncionamento	Puncionamento
83	14,09	0,8822	37,63	3.528,89	0,2032	-	0,45	Localizada	Localizada
22	14,38	0,8442	38,85	1.820,43	0,0540	-	0,53	Localizada	Localizada
42	14,58	0,8189	39,70	2.479,70	0,1000	-	0,58	Localizada	Localizada
63	14,69	0,8053	40,18	3.059,14	0,1524	-	0,61	Localizada	Localizada
2	14,72	0,8016	40,31	1.766,21	0,0508	0,3048	0,62	Localizada	Localizada
21	14,90	0,7799	41,09	1.820,36	0,0540	-	0,66	Localizada	Localizada
62	14,89	0,7811	41,04	3.059,30	0,1524	-	0,66	Localizada	Localizada
1	14,99	0,7692	41,48	1.766,13	0,0508	0,3048	0,68	Generalizada	Localizada
41	15,02	0,7656	41,61	2.476,26	0,1000	-	0,69	Localizada	Localizada
64	15,22	0,7424	42,49	3.058,21	0,1524	-	0,74	Localizada	Puncionamento
81	15,25	0,7390	42,62	3.531,21	0,2032	-	0,74	Generalizada	Generalizada
82	15,25	0,7390	42,62	3.531,21	0,2032	-	0,74	Generalizada	Generalizada
34	15,37	0,7254	43,15	1.821,75	0,0540	-	0,77	Localizada	Generalizada
84	15,41	0,7210	43,33	3.530,08	0,2032	-	0,78	Generalizada	Generalizada
61	15,41	0,7210	43,33	3.057,14	0,1524	-	0,78	Generalizada	Generalizada
16	15,44	0,7176	43,46	1.764,97	0,0508	0,3048	0,79	Generalizada	Generalizada
44	15,50	0,7110	43,72	2.476,09	0,1000	-	0,80	Generalizada	Generalizada

A partir da aplicação do Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos foi possível gerar o gráfico apresentado na Figura 31, para fundações assentes na superfície do terreno, ou seja, sem embutimento. Esse é o principal resultado desse trabalho. O eixo da ordenada representa a relação adimensional $\gamma B/\psi_0$, onde $\psi_0 = E_1^2/\sigma_1$, equação (112), ou seja, uma constante. Já no eixo da abscissa é apresentado o ângulo de atrito do solo (ϕ). Quando γB e ϕ possuem valores altos, segundo o Modelo De Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos, haverá ruptura generalizada. Porém, à medida que γB e ϕ vão se reduzindo, a ruptura deixa de ser generalizada e torna-se localizada ou ainda por puncionamento, se esses parâmetros forem ainda menores.

Um fato importante que Vesic não previu (Figura 7) em sua análise e que o modelo desenvolvido nesta pesquisa concluiu é que quando a fundação superficial for assente superficialmente em solo arenoso (sem embutimento), a forma da fundação também influencia o tipo de ruptura do solo, não somente sua compacidade relativa. Isso pode-se ser observado no gráfico da Figura 31.

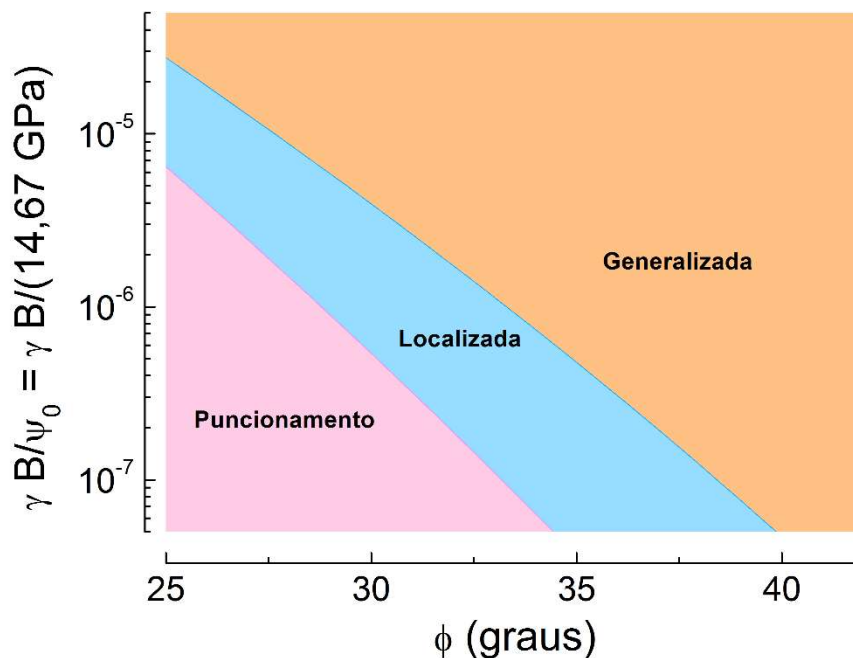


Figura 31 – Diagrama mostrando o modo de ruptura como função dos adimensionais ϕ e $\gamma.B/\psi_0$ para fundação superficial assente em solo arenoso

Ao ser substituído valores nos parâmetros que compõem o eixo da ordenada, pode-se perceber como o modo de ruptura varia com a dimensão B da base da fundação.

O gráfico mostra valores típicos do adimensional $\gamma B/\Psi_0$. Por exemplo, se mantiver γ constante e igual à 18 kPa, e variar o valor de B nas dimensões 0,60 metros, 2 metros e 10 metros, o eixo da ordenada terá valores, respectivamente, iguais a $7,39 \cdot 10^{-7}$; $2,46 \cdot 10^{-6}$ e $1,23 \cdot 10^{-5}$. Na Figura 32 pode-se perceber que, ao se manter um ângulo de atrito igual à 30° , os respectivos modos de rupturas variam de ruptura localizada a generalizada para os valores estabelecidos de B e γ .

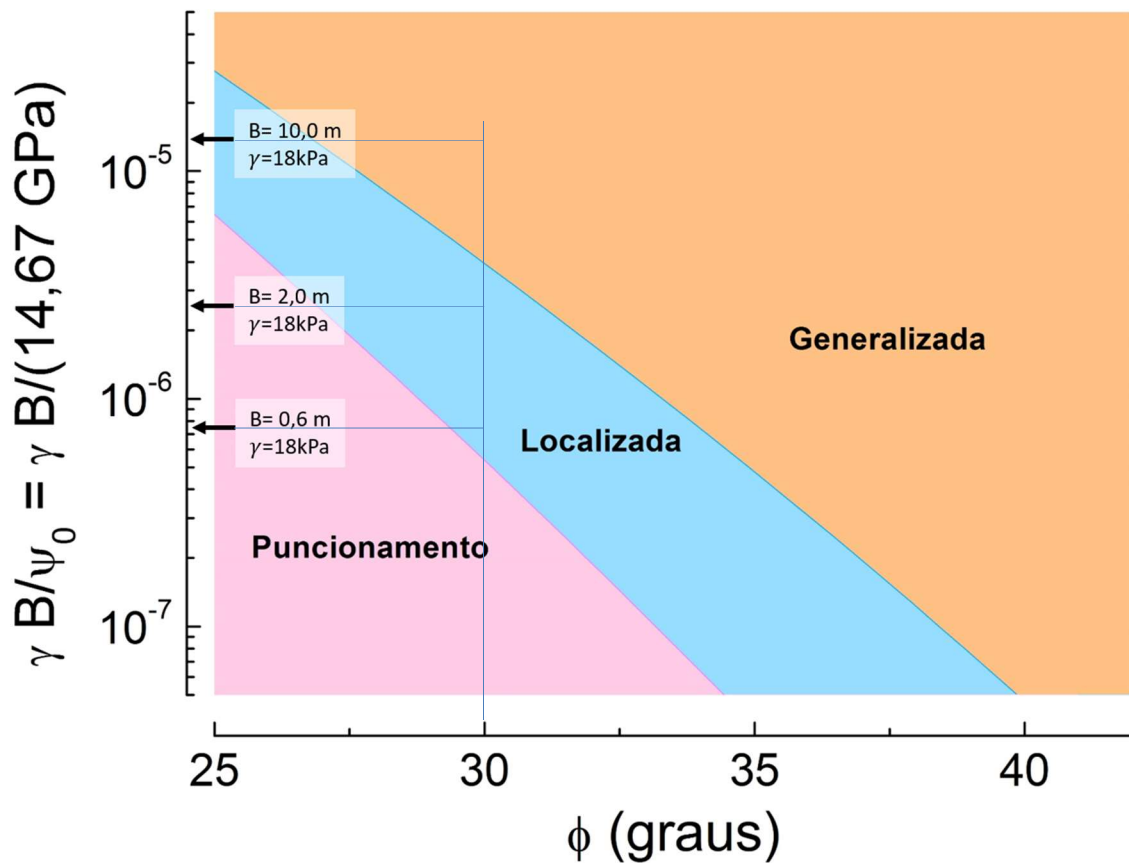


Figura 32 - Valores típicos do adimensional $\gamma B/\Psi_0$

A abscissa foi gerada através da análise dimensional, o qual é mostrado no Capítulo 8.2 (Apêndice).

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Na presente pesquisa foi proposta uma nova abordagem para estimativa do mecanismo de ruptura de fundações superficiais assentes em solos arenosos (sem presença de água). O referido modelo baseou-se em uma comparação entre tensões, refletindo a tensão de ruptura do solo (equação de Buisman-Terzaghi) e a tensão derivada a partir de uma analogia à Teoria de Griffith para geração de uma fissura de comprimento L (comprimento da superfície de ruptura).

Finalmente, a seguir é apresentado um resumo dos procedimentos sugeridos, os quais foram apresentados em detalhe no Capítulo 3:

Tabela 16 – Resumo de equações - 1ª análise

1ª ANÁLISE		
Forma	Mecanismo de cálculo	Tipo de ruptura
P>>B	$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_{\gamma} > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}}$	Ruptura generalizada
	$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_{\gamma} < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}}$	Ruptura não generalizada
P=B ou P>B	$\zeta_{\gamma} \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_{\gamma} > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2 \cdot \chi}{1+\frac{3}{2} \cdot \chi}}$	Ruptura generalizada
	$\zeta_{\gamma} \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_{\gamma} < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1+2 \cdot \chi}{1+\frac{3}{2} \cdot \chi}}$	Ruptura não generalizada

Tabela 17 – Resumo de equações - 2ª análise

2ª ANÁLISE - Para rupturas não generalizadas		
Forma	Mecanismo de cálculo	Tipo de ruptura
P>>B	$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{total}^* / B}}$	Ruptura localizada
	$\frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{total}^* / B}}$	Ruptura por punção
P=B ou P>B	$\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma > 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{total}^* / B}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}}$	Ruptura localizada
	$\zeta_\gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma < 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\pi \cdot L_{total}^* / B}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}}$	Ruptura por punção

Onde:

$$\eta = \frac{B^2 \gamma [1 - 3 \sin \phi + e^{\pi \tan \phi} \cdot (-1 - 3 \cdot \sin \phi + \sin 3\phi) + \sin 3\phi]}{8(-1 + \sin \phi)} \quad (113)$$

$$\eta^* = \sigma'_v \cdot B \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), \quad (114)$$

$$L_{total} = B \cdot \left[\frac{\sin(\phi) + e^{\frac{\pi \tan \phi}{2}} + e^{\frac{\pi \tan \phi}{2}} \cdot \sin \phi - 1}{\sqrt{2} \sin \phi \cdot \left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]} \right] \quad (115)$$

$$L_{total}^* = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} \quad (116)$$

$$\chi = \frac{L_{total}}{P} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (117)$$

$$\chi^* = \frac{L_{total}^*}{P} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (118)$$

e ζ_γ segue as equações da Tabela 2 a depender da forma da fundação.

Analisando os resultados das Tabelas 11 e 12 do item 6.2, pode-se inferir que o critério do Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos apresentou uma boa precisão, na medida em que dos 20 experimentos fornecidos no artigo de VESIC (1963), somente 3 obtiveram resultados diferentes daqueles encontrados experimentalmente, sendo um deles a favor da segurança.

Como já foi pontuado, ao se comparar o critério de VESIC (1975) com os resultados experimentais fornecidos no artigo VESIC (1963), verificou-se uma precisão reduzida nas previsões, podendo inclusive afetar a segurança da fundação (de 20 experimentos, 13 obtiveram resultados diferentes encontrados experimentalmente), já que solos que rompem de forma não generalizada, ou seja, localizada ou por puncionamento, necessitariam a aplicação de um fator de redução na Equação de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943), equação (1). Assim, usando a equação (1) sem nenhuma redução, o engenheiro geotécnico trabalharia com uma tensão de ruptura superestimada, ou seja, contra a segurança.

Um outro ponto importante na conclusão que o modelo desenvolvido nessa pesquisa gerou foi questionar a proposta de VESIC (1975) sobre a proporção limite de $P < 5B$ da geometria da fundação superficial (capítulo 2.2.2). Esse limite estabelece que a equação (1) de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) poderá ser usada sem os fatores de forma. Porém, para ensaios com sapatas de proporção mais alongada do que o limite $P > 5B$ foi possível determinar que o fator de correção χ é ainda necessário para uma correta descrição do modo de ruptura.

Os resultados desse trabalho foram compilados em um programa que está disponível no endereço <https://luizadosfs.wixsite.com/modeloderuptura>.

Como sugestões para futuras pesquisas podem ser destacadas as seguintes:

- i) Realização de experimentos, inclusive em escala real, para gerar um banco de dados atual e possibilitar a continuidade da comparação dos dois critérios de previsão do modo de ruptura;
- ii) Realização de experimentos em modelo físico e em escala real de fundações superficiais embutidas no terreno, já que o Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos prevê o seu cálculo, porém não há dados experimentais para se avaliar os resultados;

iii) Estabelecer um procedimento para a previsão do fator de redução da carga de ruptura, quando a ruptura não for generalizada;

iv) Realização de experimentos em modelo físico e em escala real de fundações superficiais embutidas, ou não, no terreno com presença de água no solo. Pois o modelo aqui apresentado poderia ser adaptada para uso nessa situação, sendo necessária apenas sua validação frente a dados de ensaios;

v) Modelagem numérica bidimensional e tridimensional dos experimentos (fundações superficiais assentes em areia) e comparação dos resultados com os previstos por meio dos modelos para previsão do modo de ruptura;

vi) Modelagem numérica, baseada no modelo de Griffith, dos experimentos (fundações superficiais assentes em areia) para previsão da forma da superfície de ruptura.

8. APÊNDICE

8.1. Análise Direcional:

8.1.1. Análise Direcional Geral:

É incontestável que ao se pensar em algumas variáveis físicas vetoriais, como exemplos, a distância, velocidade e força, percebe-se uma orientação espacial. Entretanto outras, como a massa, tempo e energia não a possuem. Essa diferença é dada explicitamente através de notação vetorial. Equações devem ser *dimensionalmente* balanceadas, como também *orientacionalmente*.

A análise direcional é um método para ampliar os métodos de análise dimensional. Ela é baseada em atribuir símbolos orientacionais às grandezas físicas como área, força e ângulo, que são orientados espacialmente. Os símbolos se relacionam entre si seguindo uma tabela de multiplicação específica, e eles podem ser usados para obter informações adicionais que resolvam problemas incompletamente fornecidos pela análise dimensional convencional.

Em analogia à notação apresentada por DUNCAN (1953), que usa \simeq para denotar igualdade *dimensional*, o símbolo \doteq será usado para denotar igualdade *direcional* (SIANO, 1985). Os símbolos para orientações em x, y e z serão, respectivamente, l_x , l_y e l_z , que estão em coordenadas cartesianas, mas há possibilidade de se formular em outras. Quantidades sem orientação serão denominados com o símbolo l_0 (identidade).

Do produto entre duas quantidades com orientações diferentes é também esperado uma orientação, seguindo a respectiva tabela de multiplicação, que é análoga a regra de produto vetorial, mas comutativa (não leva em consideração o sinal).

$$l_y \cdot l_z \doteq l_x \doteq l_z \cdot l_y,$$

$$l_x \cdot l_z \doteq l_y \doteq l_z \cdot l_x,$$

$$l_x \cdot l_y \doteq l_z \doteq l_y \cdot l_x,$$

como há também a regra de multiplicação entre duas quantidades orientacionais iguais, que sempre gera um resultado sem orientação (l_0)

$$l_x \cdot l_x \doteq l_0,$$

$$l_y \cdot l_y \doteq l_0,$$

$$l_z \cdot l_z \doteq l_0,$$

$$l_0 \cdot l_0 \doteq l_0,$$

como l_0 é a identidade da operação, ao multiplicá-lo por uma quantidade com orientação gera-se um elemento que mantém a orientação,

$$l_x \cdot l_0 \doteq l_x \doteq l_0 \cdot l_x,$$

$$l_y \cdot l_0 \doteq l_y \doteq l_0 \cdot l_y,$$

$$l_z \cdot l_0 \doteq l_z \doteq l_0 \cdot l_z,$$

e por último, todo símbolo de orientação é inverso de si mesmo, ou seja,

$$l_0^{-1} \doteq l_0,$$

$$l_x^{-1} \doteq l_x,$$

$$l_y^{-1} \doteq l_y,$$

$$l_z^{-1} \doteq l_z.$$

Pode-se resumir tudo isso em uma só tabela de multiplicação:

	l_0	l_x	l_y	l_z
l_0	l_0	l_x	l_y	l_z
l_x	l_x	l_0	l_z	l_y
l_y	l_y	l_z	l_0	l_x
l_z	l_z	l_y	l_x	l_0

Figura 33 – Tabela de multiplicação direcional geral.

Note-se que, por conta da propriedade $l_x \cdot l_x \triangleq l_0$, a análise direcional é mais poderosa se a equação é escrita utilizando os menores expoentes inteiros possíveis. Por exemplo, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ leva a uma análise direcional não-trivial (a variação de momento é colinear com a força na 2ª Lei de Newton), mas $\vec{F}^2 = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2$ é trivial na sua análise direcional. A equação com menores expoentes é referida como forma normal.

Não há nenhuma definição de potências fracionárias de símbolos orientacionais. Com isso não se pode ter expoente racional ao aplicar a análise direcional. Para se fazer a análise direcional de uma equação em que apareça raiz, é necessário eliminá-la, sempre levando em conta a questão do menor expoente.

Exemplo de potência fracionária, relação entre o lado e a área do quadrado:

$$L = \sqrt{A} \quad (119)$$

Para que a raiz seja eliminada, eleva-se ao quadrado os dois lados da equação (119):

$$(L)^2 = (\sqrt{A})^2$$

$$L^2 = A$$

A análise *direcional* da área do quadrado é l_z , já que:

$$L^2 \triangleq l_x \cdot l_y = l_z \triangleq A$$

Também seria eliminada a potência fracionária se fosse elevada à quarta potência:

$$(L)^4 = (\sqrt{A})^4$$

$$L^4 = A^2$$

Porém esta não é a forma normal, já que há perda (ausência) de informações.

Com isso, pode-se perceber que mesmo não sabendo a princípio a orientação de uma grandeza física, é possível através do balanceamento de uma equação identificá-la.

Exemplo de símbolos orientacionais através do balanceamento da equação:

- Pressão devida a uma força na direção z:

$$p = \frac{F}{A} \quad (120)$$

Onde:

F = força [N]

A = área perpendicular a força F [m²]

Com isso, ao ser feita a análise *direcional* da equação (120), tem-se:

$$p \doteq \frac{l_z}{l_x \cdot l_y} \doteq \frac{l_z}{l_z} \doteq l_0$$

- Energia:

$$E = F \cdot d = m \cdot g \cdot d \quad (121)$$

Onde:

F = força da gravidade [N]

d = distância [m]

m = massa [kg]

g = aceleração da gravidade [m/s²]

Com isso, ao ser feita a análise *direcional* da equação (121), tem-se:

$$E \doteq l_0 \cdot l_z \cdot l_z \doteq l_0 \cdot l_0 \doteq l_0$$

Adiante serão estudadas as tensões de cisalhamento.

8.1.2. Análise Direcional de ângulos

Ângulos são adimensionais, porém pode-se definir uma *direção* para eles, de forma que equações associando vetores em direções diferentes tornam-se *direcionalmente* homogêneas.

Exemplo de análise *direcional* de ângulo:

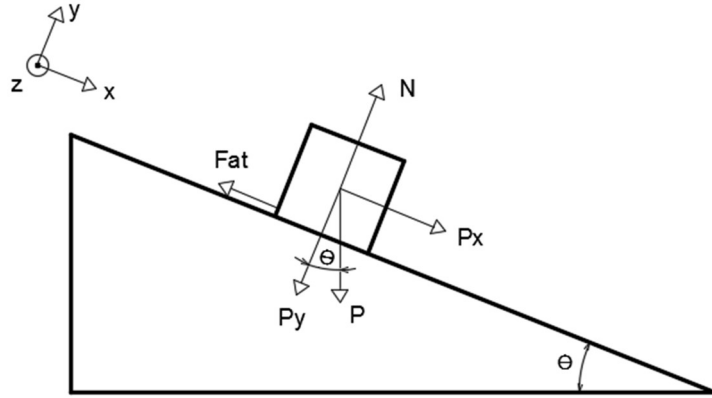


Figura 34 - Esquema de um bloco em plano inclinado

Equilibrando as forças no eixo y tem-se:

$$N = P_y \quad (122)$$

Ao decompor a força P no eixo y tem-se:

$$P_y = P \cdot \cos \theta \quad (123)$$

Equilibrando as forças no eixo x tem-se:

$$F_{at} = N \cdot \mu = P_x \quad (124)$$

Substituindo as equações (122) e (123) na equação (124) tem-se:

$$F_{at} = P \cdot \cos \theta \cdot \mu = P_x \quad (125)$$

Ao decompor a força P em x tem-se:

$$P_x = P \cdot \sin \theta \quad (126)$$

Substituindo a equação (126) na equação (125) chegar-se-á:

$$P \cdot \cos \theta \cdot \mu = P \cdot \sin \theta \quad (127)$$

Logo, $\mu = \tan \theta$.

Agora usando a análise direcional, tem-se:

$$F_{at} = N \cdot \mu$$

$$l_x \doteq l_y \cdot l_\mu$$

Logo por homogeneidade,

$$l_\mu \triangleq l_x \cdot l_y^{-1} \triangleq l_z$$

Com isso pode-se concluir que $\tan \theta$ tem direção l_z .

$$\mu = \tan \theta \triangleq l_z$$

8.1.3. Análise Direcional de Resistência dos Materiais

A definição formal de tensão normal - σ (sigma) - é a intensidade da força, ou força por unidade de área, que age perpendicularmente à ΔA (que está no plano xy). Visto que ΔF_z é normal a área, então (HIBBELER, 2010):

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (128)$$

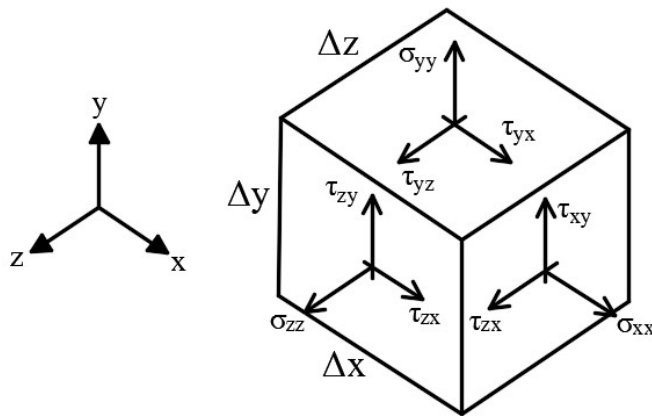


Figura 35 - Componentes de tensão no sistema cartesiano de coordenadas.

Já a tensão cisalhante - τ (tau) - é definida como a intensidade da força, ou força por unidade de área, que age tangente a ΔA . Aqui estão as componentes da tensão de cisalhamento (HIBBELER, 2010):

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

Observe que a notação do índice z em σ_z é usada para indicar a direção da reta normal dirigida para fora, que especifica a orientação da área ΔA (Figura 35). São usados dois índices para as componentes da tensão de cisalhamento, τ_{zx} e τ_{zy} . O eixo z especifica a orientação da área e x e y referem-se às retas que indicam a direção das tensões de cisalhamento (HIBBELER, 2010):

A análise *direcional* da tensão normal e da tensão de cisalhamento são respectivamente:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} \doteq \frac{l_x}{l_z \cdot l_y} = \frac{l_x}{l_x} = l_x \cdot l_x^{-1} = l_o$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A} \doteq \frac{l_y}{l_x \cdot l_z} = \frac{l_y}{l_y} = l_y \cdot l_y^{-1} = l_o$$

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} \doteq \frac{l_z}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_z}{l_z} = l_z \cdot l_z^{-1} = l_o$$

$$\tau_{zx} = \frac{F_x}{A} = \frac{l_x}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_x}{l_z} = l_x \cdot l_z^{-1} = l_y$$

$$\tau_{zy} = \frac{F_y}{A} = \frac{l_y}{l_x \cdot l_y} = \frac{l_y}{l_z} = l_y \cdot l_z^{-1} = l_x$$

$$\tau_{yx} = \frac{F_x}{A} = \frac{l_x}{l_x \cdot l_z} = \frac{l_x}{l_y} = l_x \cdot l_y^{-1} = l_z$$

$$\tau_{yz} = \frac{F_z}{A} = \frac{l_z}{l_x \cdot l_z} = \frac{l_z}{l_y} = l_z \cdot l_y^{-1} = l_x$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_y}{A} = \frac{l_y}{l_z \cdot l_y} = \frac{l_y}{l_x} = l_y \cdot l_x^{-1} = l_z$$

$$\tau_{xz} = \frac{F_z}{A} = \frac{l_z}{l_z \cdot l_y} = \frac{l_z}{l_x} = l_z \cdot l_x^{-1} = l_y$$

É possível resumir tudo isso no tensor e sua respectiva matriz *direcional*:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} l_o & l_z & l_y \\ l_z & l_o & l_x \\ l_y & l_x & l_o \end{pmatrix}$$

Figura 36 – tensor de tensões e sua respectiva matriz direcional

8.1.4. Análise Direcional da equação de Terzaghi-Buisman

A equação (1) de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) é:

$$\sigma_{rup} = c \cdot N_c + q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma$$

Onde:

σ_{rup} - tensão de ruptura (kPa)

γ = Peso específico do solo (kN/m³)

c – “coesão” do solo - peso específico aparente do solo (kPa)

B – menor dimensão da fundação (m)

q - tensão vertical efetiva ao nível da base da fundação (kPa)

N_c , N_q , N_γ - fatores de capacidade de carga, que são funções exclusivamente do ângulo de atrito do solo ϕ .

$$N_q = e^{(\pi \cdot \tan \phi)} \cdot \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot(\phi)$$

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q + 1) \cdot \tan(\phi)$$

Para areias $c = 0$, a equação (1) de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) fica:

$$\sigma_{rup} = q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \quad (129)$$

Tanto N_q , quanto N_γ são adimensionais, já que:

$$\sigma_{rup} \left[\frac{kN}{m^2} \right] = q \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \left[\frac{kN}{m^3} \right] \cdot B[m] \cdot N_\gamma \quad (130)$$

Agora será analisado o balanceamento das equações de N_q e N_γ . Como as duas equações apresentam $\tan(\phi)$ e em N_q há também um $\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right)^2$, é preciso fazer uma aplicação da série de Taylor à Análise *Dimensional* e *Direcional*.

Analisando a série de Taylor verifica-se que o argumento das funções precisam ser adimensionais, já que a série de Taylor para $\tan(\phi)$ e $\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right)^2$ são respectivamente:

$$\tan(\phi) = \phi + \frac{\phi^3}{3} + \frac{2 \cdot \phi^5}{15} + \dots \quad (131)$$

$$\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right)^2 = 1 + 2 \cdot \phi + 2 \cdot \phi^2 + \frac{5 \cdot \phi^3}{3} + \frac{4 \cdot \phi^4}{3} + \frac{61 \cdot \phi^5}{60} + \dots \quad (132)$$

Se $\tan(\phi)$ e $\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \right)^2$ fossem *dimensionais*, então não faria sentido somar números de potências distintas (exemplo: $\phi^3 + \phi^5$). Porém eles podem ser *direcionais*. Para provar suas respectivas direções devem ser feitas as seguintes análises:

Série de Taylor para $\cos \phi$:

$$\cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{24} - \dots \quad (133)$$

Imagine que $\phi \doteq l_z$:

$$\cos \phi \doteq l_0 + l_z^2 + l_z^4 + \dots$$

$$\cos \phi \doteq l_0 + l_0 + l_0 + \dots$$

$$\cos \phi \doteq l_0$$

Logo, funções pares (potências pares) de ϕ têm símbolo de direção l_0 .

Já as funções ímpares são *direccionais*:

$$\text{sen } \phi = \phi - \frac{\phi^3}{6} + \frac{\phi^5}{120} - \dots \quad (134)$$

Se $\phi \doteq l_z$, então:

$$\text{sen } \phi \doteq l_z + l_z^3 + l_z^5 + \dots$$

$$\text{sen } \phi \doteq l_z + l_z + l_z + \dots$$

$$\text{sen } \phi \doteq l_z$$

Com isso:

$$\tan \phi = \frac{\text{sen } \phi}{\cos \phi} \doteq \frac{l_z}{l_0} \doteq l_z$$

Funções sem paridade definida (que não é somente par nem somente ímpar), precisam ter argumentos simultaneamente *adimensionais* e *adireccionais*.

Exemplo 1:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad (135)$$

Se $x \doteq l_z$, teria-se

$$l_{e^x} \doteq l_0 + l_z + \frac{l_z^2}{2} + \frac{l_z^3}{6} + \dots$$

$$l_{e^x} \doteq l_0 + l_z + l_0 + l_z + \dots$$

O que não é balanceado *directionalmente*, com isso:

$$e^x \doteq l_0, \text{ para } x \doteq l_0 \quad (136)$$

Com frequência surge um pré-fator que possui direção que deve ser levado em conta. Quase sempre, esse pré-fator contém π (3,1415...), o que é nosso caso em relação

a N_q , já que $e^{(\pi \cdot \tan \phi)}$ violaria o balanço *direcional*, se π não tivesse direção, pois $\tan \phi \doteq l_z$, com isso $\pi \doteq l_z$:

$$\pi \cdot \tan \phi \doteq l_z \cdot l_z$$

$$\pi \cdot \tan \phi \doteq l_0$$

Logo,

$$e^{(\pi \cdot \tan \phi)} \doteq l_0$$

Exemplo 2:

$$\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2 = 1 + 2 \cdot \phi + 2 \cdot \phi^2 + \frac{5 \cdot \phi^3}{3} + \frac{4 \cdot \phi^4}{3} + \frac{61 \cdot \phi^5}{60} + \dots \quad (137)$$

Se $\phi \doteq l_z$,

$$l_{\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2} \doteq l_0 + 2 \cdot l_z + 2 \cdot l_z^2 + \frac{5 \cdot l_z^3}{3} + \frac{4 \cdot l_z^4}{3} + \frac{61 \cdot l_z^5}{60} + \dots$$

$$l_{\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2} \doteq l_0 + l_z + l_0 + l_z + l_0 + l_z + \dots$$

O que não é balanceado *direcionalmente*, com isso:

$$\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2 \doteq l_0$$

Então, o balanceamento de N_q fica:

$$N_q = e^{(\pi \cdot \tan \phi)} \cdot \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right)^2$$

$$N_q \doteq l_0 \cdot l_0 \doteq l_0 \quad (138)$$

Já o balanceamento de N_γ fica:

$$N_\gamma = 2 \cdot (N_q + 1) \cdot \tan(\phi)$$

$$N_\gamma \triangleq l_0 \cdot (l_0 + l_0) \cdot l_z \triangleq l_z \quad (139)$$

Agora será verificado se N_q e N_γ estão balanceadas *direcionalmente* nas equações (2) e (4), respectivamente.

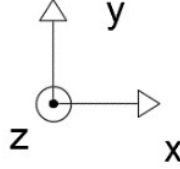


Figura 37 - Coordenadas usadas

$$\sigma_{rup} = \frac{P}{A} \triangleq \frac{l_y}{l_x \cdot l_z} \triangleq \frac{l_y}{l_y} \triangleq l_0$$

$$q = \frac{P}{A} \triangleq \frac{l_y}{l_x \cdot l_z} \triangleq \frac{l_y}{l_y} \triangleq l_0$$

$$\gamma = \frac{P}{V} \triangleq \frac{l_y}{l_x \cdot l_y \cdot l_z} \triangleq \frac{l_y}{l_0} \triangleq l_y$$

$$B \triangleq l_x$$

Então tem-se que a equação (129) balanceada é:

$$\sigma_{rup} = q \cdot N_q + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma$$

$$l_0 \triangleq l_0 \cdot N_q + l_0 \cdot l_y \cdot l_x \cdot N_\gamma$$

$$l_0 \triangleq l_0 \cdot N_q + l_z \cdot N_\gamma$$

Com isso pode-se concluir que *direcionalmente* N_q e N_γ são:

$$N_q \triangleq l_0$$

$$N_\gamma = l_z$$

O que ratifica a análise direcional feita anteriormente das equações (138) e (139). Logo a equação (129) está *direcionalmente* balanceada.

Para o nosso caso, por ser uma fundação superficial assente em solo arenoso, a equação (129) fica:

$$\sigma_{rup} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma$$

Qualquer proposta para N_γ diferente precisa garantir que o fator multiplicador seja uma função ímpar da variável ϕ .

8.1.5. Análise Direcional da equação de Vesic para determinação de ruptura generalizada e não generalizada

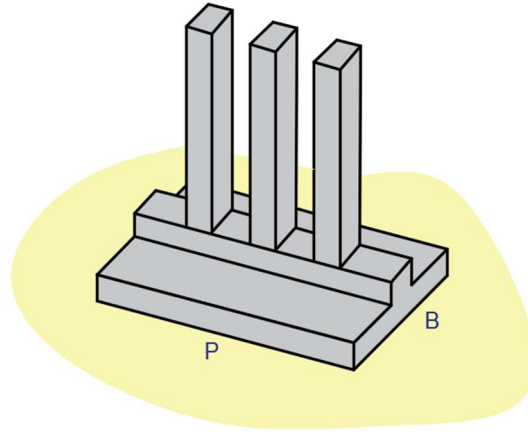


Figura 38 - Fundação superficial assente em solo (BxP)

$$l_B = l_x \quad (140)$$

$$l_P = l_y \quad (141)$$

O índice de rigidez preconizado por Vesic é dado por (equação (7)):

$$I_r = \frac{G}{c + \sigma_{med} \cdot \tan \phi}$$

Primeiramente deve-se fazer a análise *direcional* da Teoria de Elasticidade.

A princípio, as distorções não possuiriam *direcionalidade*, por sua definição:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L_x} \doteq \frac{l_x}{l_x} \doteq l_0$$

Porém ε_{ij} é um tensor. De fato, para tensores, os elementos da diagonal não possuem direção, de modo que $\varepsilon_{xx} \doteq l_0$ é coerente.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} l_0 & l_z & l_y \\ l_z & l_0 & l_x \\ l_y & l_x & l_0 \end{pmatrix}$$

Figura 39 - Matriz de deformação e matriz direcional da deformação

Esse aspecto ajuda a entender a direção dos módulos elásticos. A lei de Hooke pode ser expressa em três dimensões, onde cada deformação está relacionada com as três componentes da tensão normal pelas propriedades do material E e ν :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (142)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (143)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (144)$$

Como *direcionalmente* $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z são l_0 , logo por balanceamento pode-se constatar que E e ν também são l_0 . Será feito o balanceamento da equação (142) como exemplo:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$l_0 \doteq \frac{1}{E} \cdot [l_0 - \nu \cdot (l_0 + l_0)]$$

$$l_0 \doteq \frac{1}{E} \cdot [l_0 - \nu \cdot (l_0)] \quad (145)$$

Para a equação (145) ser balanceada, l_0 só pode somar ou ser subtraído por outro l_0 , logo pode-se concluir que ν tem direção l_0 . Continuando o balanceamento:

$$l_0 \doteq \frac{1}{E} \cdot [l_0 - l_0 \cdot (l_0)]$$

$$l_0 \doteq \frac{1}{E} \cdot [l_0 - l_0]$$

$$l_0 \doteq \frac{1}{E} \cdot [l_0 - l_0] \quad (146)$$

Novamente para atender o balanceamento, já que $\varepsilon_x \doteq l_0$, E (módulo de elasticidade) somente pode ser l_0 (equação (146)).

Com isso conclui-se que G também tem direção l_0 , já que:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$G \doteq \frac{l_0}{2 \cdot (1 + l_0)} \doteq l_0 \quad (147)$$

Sendo G o módulo de deformação transversal.

Para saber qual é a direção do índice de rigidez, equação (7), falta definir a *direção* do intercepto de coesão (c). A resistência ao cisalhamento dos solos é dada por:

$$\tau = c + \sigma \cdot \tan \phi \quad (148)$$

Para ruptura perfeitamente bidimensional ($P \gg B$), por exemplo, tem-se que a tensão de cisalhamento na direção do eixo x, aplicada em uma área com direção em y, será:

$$\tau_{yx} = c + \sigma_y \cdot \tan \phi \quad (149)$$

$$l_z \doteq l_c + l_0 \cdot l_z$$

$$l_z \doteq l_c + l_z$$

Logo para que haja uma equação balanceada *direcionalmente* tem-se que $l_c \doteq l_z$.

Com isso, o índice de rigidez possui direção l_z , já que:

$$I_r = \frac{G}{c + \sigma_{med} \cdot \tan \phi}$$

$$I_r \doteq \frac{l_0}{l_z + l_0 \cdot l_z} \doteq \frac{l_0}{l_z + l_z} \doteq \frac{l_0}{l_z} \doteq l_0 \cdot l_z^{-1} \doteq l_z$$

8.1.6. Crítica ao Critério de Vesic

Vesic propôs que o índice de rigidez crítico do solo, equação (14), fosse definido como:

$$I_{r \text{ crítico}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\left[\left(3,30 - 0,45 \frac{B}{P} \right) \cdot \cot \left(\frac{\pi}{4} \frac{\phi}{2} \right) \right]}$$

Esse índice não obedece ao princípio de balanceamento *direcional*, conforme, a seguir, será mostrado.

Como há uma avaliação comparativa entre os índices (índice de rigidez e índice de rigidez crítico do solo), a direção de $I_{r \text{ crítico}}$ deveria ser a mesma que I_r , ou seja, l_z , porém não é isso que ocorre, já que, como foi demonstrado anteriormente na equação (135):

$$e^x \doteq l_0, \text{ para } x \doteq l_0 \quad (150)$$

Com isso, $\left(3,30 - 0,45 \cdot \frac{B}{L}\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ deveria ser l_0 , porém o que ocorre é:

$$\left(3,30 - 0,45 \cdot \frac{B}{L}\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \doteq \left(l_0 - l_0 \cdot \frac{l_x}{l_y}\right) \cdot l_{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\left(3,30 - 0,45 \cdot \frac{B}{L}\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \doteq (l_0 - l_0 \cdot l_z) \cdot l_{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\left(3,30 - 0,45 \cdot \frac{B}{L}\right) \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \doteq \boxed{(l_0 - l_z)} \cdot l_{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}$$

Só pela parte da exponencial da equação é possível perceber que o Índice de rigidez crítico do solo não está balanceado, já que dois elementos *direccionais* diferentes não podem se subtrair.

8.2. Análise Dimensional

Embora a análise dimensional seja incapaz, por si só, de descobrir a formulação completa de uma lei da física, ela fornece indicações preciosas sobre combinações dos parâmetros envolvidos, de modo a reduzir o número total de variáveis a incluir nas equações. É assim um valioso guia para a elaboração de teorias que se propunham a interpretar resultados experimentais (CARNEIRO, 1996).

- Teoria π de Vaschy-Buckingham:

Em qualquer equação física existente há de se respeitar o equilíbrio dimensional. Muitas vezes é usada a homogeneidade dimensional para descobrir-se a dimensão de um parâmetro desconhecido de uma equação quando já são sabidas as dimensões de todos os outros parâmetros envolvidos da mesma.

Quando deseja-se formular uma equação nova, a Teoria π de Vaschy-Buckingham nos ajuda a saber quais elementos dimensionais influenciam a equação almejada. Primeiramente, há de se fazer uma lista de parâmetros que se julga atuar na formulação pretendida. São chamados de π 's as quantidades de adimensionais que se pode construir a partir dos parâmetros determinados.

Os números π 's permitem reescrever qualquer equação, de forma adimensional. O teorema π de Vaschy-Buckingham estabelece que existem $(n-r)$ números adimensionais independentes que podem ser construídos a partir de um sistema físico que possua n variáveis e r dimensões linearmente independentes.

Para tentar esclarecer, será feito um exemplo da aplicação do teorema de π . Neste exemplo, pretende-se formular uma equação para determinar a tensão de ruptura do solo arenoso (σ_{rup}) com a estrutura de fundação assente na superfície ($q = 0$). Antes de tudo, há de se listar todos os parâmetros que se julgue influenciar σ_{rup} com suas respectivas dimensões, porém não se preocupando se todos os parâmetros que serão arrolados realmente entrarão na equação final.

Parâmetros do exemplo:

$$[\sigma_{rup}] = \left[\frac{P}{A} \right] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (151)$$

$$[\gamma] = \left[\frac{P}{V} \right] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2} \quad (152)$$

$$[B] = L \quad (153)$$

$$[P] = L \quad (154)$$

$$[E] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (155)$$

Onde:

σ_{rup} – Tensão de ruptura

γ – Peso específico do solo

B – Menor dimensão do elemento de fundação superficial

P – Maior dimensão do elemento de fundação superficial

E – Módulo de elasticidade do solo

L – Representa a dimensão de comprimento

M – Representa a dimensão de massa

T – Representa a dimensão de tempo

Para se calcular os π 's existentes há de se fazer a matriz dimensional:

	γ	E	B	P	σ_{rup}
L	-2	-1	1	1	-1
M	1	1	0	0	1
T	-2	-2	0	0	-2

Figura 40 - Matriz dimensional

A matriz dimensional tem que ser feita elencando-se na primeira linha todas as variáveis que se julga influenciar na formulação que se pretende desenvolver, já na primeira coluna há de se listar todas as dimensões que existem nas variáveis da primeira linha. Depois disso, há de se completar a parte central da matriz dimensional colocando as potências das dimensões, que cada variável envolve (Equações de (151) até (155) mostram todas as essas dimensões e suas respectivas potências).

Como se pode perceber a segunda e a terceira linha da matriz dimensional são proporcionais, então nesse exemplo há 5 variáveis (n) e 2 dimensões linearmente independentes (r). Logo o número de parâmetros π 's de Buckingham são 3 ($n - r = 5 - 2 = 3$). Para se calcular os três π 's existentes há de se fazer o sistema de equações que exprime a nulidade das dimensões:

$$-2 \cdot \alpha_{\gamma} - \alpha_E + \alpha_B + \alpha_P - \alpha_{\sigma_{rup}} = 0 \quad (156)$$

$$\alpha_{\gamma} + \alpha_E + \alpha_{\sigma_{rup}} = 0 \quad (157)$$

Como existem 2 equações e 5 incógnitas há de se tomar como hipótese:

1º) $\alpha_E = 0$, $\alpha_P = 0$ e $\alpha_{\sigma_{rup}} = 1$, com isso, substituindo essas três hipótese nas equações (156) e (157), tem-se:

$$-2 \cdot \alpha_\gamma + \alpha_B - 1 = 0 \quad (158)$$

$$\alpha_\gamma + 1 = 0 \rightarrow \alpha_\gamma = -1 \quad (159)$$

Com o resultado da equação (159), α_B fica igual a -1, logo $\pi_1 = \frac{\sigma_{rup}}{\gamma \cdot B}$

2º) $\alpha_E = 1$, $\alpha_P = 0$ e $\alpha_{\sigma_{rup}} = 0$, com isso, substituindo essas três hipóteses nas equações (156) e (157), tem-se:

$$-2 \cdot \alpha_\gamma - 1 + \alpha_B = 0 \quad (160)$$

$$\alpha_\gamma + 1 = 0 \rightarrow \alpha_\gamma = -1 \quad (161)$$

Com o resultado da equação (161), α_B fica igual a -1, logo $\pi_2 = \frac{E}{\gamma \cdot B}$

3º) $\alpha_E = 0$, $\alpha_P = 1$ e $\alpha_{\sigma_{rup}} = 0$, com isso, substituindo essas três hipótese nas equações (156) e (157), tem-se:

$$-2 \cdot \alpha_\gamma + \alpha_B + 1 = 0 \quad (162)$$

$$\alpha_\gamma = 0 \quad (163)$$

Com o resultado da equação (163), α_B fica igual a -1, logo $\pi_3 = \frac{P}{B}$.

Ao ser analisado o resultado gerado em π_1 , percebe-se que a carga de ruptura do solo arenoso (σ_{rup}) com a estrutura de fundação assente ($q = 0$) é função direta do peso específico do solo (γ) e do menor dimensão da fundação (B). Já o valor de π_1 , valor adimensional, é preconizado na equação (1) de BUISMAN (1940) e TERZAGHI (1943) como $\frac{N_\gamma}{2}$.

8.2.1. Análise Dimensional da Densidade Superficial De Energia (η)

Usando a análise dimensional (o teorema π), para estudar as dimensões dos parâmetros na equação da densidade superficial de energia (η), podem ser feitas algumas previsões tanto para fundações na superfície do terreno, quanto para sapatas embutidas.

A densidade superficial de energia (η), que é definida como a quantidade de energia dissipada por seção de área, é função dos seguintes parâmetros dimensionais: B (menor dimensão da fundação), γ (peso específico do solo), q (tensão vertical efetiva ao nível da base da fundação, quando houver embutimento). Com isso tem-se $\eta(B, \gamma, q)$.

As dimensões de η e dos parâmetros de que η está em função ficam:

$$[\eta] = \left[\frac{E}{A} \right] = \left[\frac{F \cdot d}{A} \right] = M \cdot T^{-2} \quad (164)$$

$$[B] = L \quad (165)$$

$$[\gamma] = \left[\frac{F}{V} \right] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2} \quad (166)$$

$$[q] = \left[\frac{F}{A} \right] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \quad (167)$$

Com isso a matriz dimensional fica:

	B	γ	q	η
L	1	-2	-1	0
M	0	1	1	1
T	0	-2	-2	-2

Figura 41 - Matriz dimensional

Como a segunda e a terceira linhas são proporcionais, conforme o teorema π de Vaschy-Buckingham, as quantidades de números π 's são 2 (4-2), já que n é igual a 4 (quantidade de variáveis) e r é igual a 2 (dimensões linearmente independentes).

Com isso, as equações gerais da matriz dimensional ficam:

$$\alpha_B - 2\alpha_\gamma - \alpha_q = 0 \quad (168)$$

$$\alpha_\gamma + \alpha_q + \alpha_\eta = 0 \quad (169)$$

Se $\alpha_q = -1$ e $\alpha_\gamma = 0$ (considerando embutimento):

$$\alpha_B + 1 = 0 \rightarrow \alpha_B = -1 \quad (170)$$

$$-1 + \alpha_\eta = 0 \rightarrow \alpha_\eta = 1 \quad (171)$$

Com isso π_1 fica igual a:

$$\pi_1 = \frac{\eta}{q \cdot B} \quad (172)$$

E pode-se concluir que a densidade superficial de energia (η), quando houver embutimento da fundação, será diretamente proporcional a q e B, já que ambas têm potência 1.

$$\eta = \pi_1 \cdot q \cdot B \quad (173)$$

Se $\alpha_q = 0$ e $\alpha_\gamma = -1$ (considerando assente em solo):

$$\alpha_B + 2 = 0 \rightarrow \alpha_B = -2 \quad (174)$$

$$-1 + \alpha_\eta = 0 \rightarrow \alpha_\eta = 1 \quad (175)$$

Com isso π_2 fica igual a:

$$\pi_2 = \frac{\eta}{\gamma \cdot B^2} \quad (176)$$

E pode-se concluir que a densidade superficial de energia (η), quando não houver embutimento, será diretamente proporcional a γ e B^2 , já que:

$$\eta = \pi_2 \cdot \gamma \cdot B^2 \quad (177)$$

8.2.2. *Análise Dimensional da um Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos*

Será utilizada, neste item, a análise dimensional do teorema π , para a obtenção das equações adimensionais que sejam compostas por parâmetros utilizados no Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos. No gráfico apresentado na Figura 31, no eixo das abscissas, é usada uma dessas equações geradas com base na análise dimensional.

O modelo analisado é dada pela comparação entre duas tensões, onde a tensão crítica é determinada por

$$\frac{\gamma \cdot B}{2} \cdot N_\gamma = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L}}$$

As dimensões presentes no modelo estão em função de força ($[F] = M.L.T^{-2}$) e comprimento (L), conforme mostrado nas equações (178) à (182):

$$[\gamma] = \frac{F}{L^3} \quad (178)$$

$$[B] = L \quad (179)$$

$$[E] = \frac{F}{L^2} \quad (180)$$

$$[\eta] = \frac{F}{L} \quad (181)$$

$$[L] = L \quad (182)$$

O módulo de elasticidade, como mostrado na equação (112), é igual a $E_1 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_m}{\sigma_1}}$, e $\frac{E_1}{\sqrt{\sigma_1}}$ é uma constante que foi designada por $\sqrt{\psi_0}$, ou seja, $\psi_0 = E_1^2 / \sigma_1$, ψ_0 é um parâmetro que consta no referido modelo analisado. Com isso, ela será incluída nesta análise dimensional e sua respectiva dimensão é:

$$\psi_0 = \left[\frac{F}{L^2} \right] \quad (183)$$

Com isso a matriz dimensional é:

	γ	B	E	ψ_0	η	L_{total}
F	1	0	1	1	1	0
L	-3	1	-2	-2	-1	1

Figura 42 - Matriz dimensional

Conforme o teorema π de Vaschy-Buckingham, as quantidades de números π' s são 4 (6-2), já que n é igual a 4 (quantidade de variáveis) e r é igual a 2 (dimensões linearmente independentes). Os π' s gerados são:

$$\pi_1 = \frac{L_{total}}{B} \quad (184)$$

$$\pi_2 = \frac{\gamma \cdot B}{\psi_0} \quad (185)$$

$$\pi_3 = \frac{E}{\gamma \cdot B} \quad (186)$$

$$\pi_4 = \frac{\eta}{\gamma \cdot B^2} \quad (187)$$

Vale destacar que a equação (185) foi a utilizada no gráfico da Figura 31.

8.3. Memória de Cálculo do Modelo de Dissipação de Energia para o Modo de Ruptura de Fundações Rasas em Solos Arenosos

Neste item será mostrado o desenvolvimento do cálculo para a estimativa do modo de ruptura usando o modelo abordado neste trabalho (Capítulo 3) em um dos ensaios do artigo de VESIC (1963). Como exemplo, será usado o ensaio número 2, em que segundo resultados experimentais ocorreu ruptura localizada.

Primeiramente há de se saber a forma da fundação e os parâmetros físicos e de resistência do solo. O ensaio 2 foi executado com uma placa retangular com medidas de B=0,0508 metros e P=0,3048 metros sob um solo arenoso com peso específico igual a 14,72 kN/m³ e o ângulo de atrito igual a 40,31°.

O cálculo da tensão da ruptura desse solo é dado por:

$$\sigma_{rup} = \left(1 - 0,4 \cdot \frac{B}{P}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B \cdot \gamma \cdot N_\gamma$$

$$\sigma_{rup} = \left(1 - 0,4 \cdot \frac{0,0508}{0,3048}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0508 \cdot 14,72 \cdot 115,43 = 40,28 \text{ kN/m}^2$$

A tensão necessária para gerar uma fissura de comprimento igual a uma superfície na forma generalizada é:

$$\sigma_L = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta}{\pi \cdot L_{total}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi}}$$

$$\sigma_L = 2 \cdot \sqrt{\frac{1766,21 \cdot 0,40}{\pi \cdot 0,55}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot 3,9}{1 + \frac{3}{2} \cdot 3,9}} = 46,03 \text{ kN/m}^2$$

Já que L_{total} , η e E e χ são, respectivamente,

$$L_{total} = B \cdot \left[\frac{\sin(\phi) + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} + e^{\frac{\pi \cdot \tan \phi}{2}} \cdot \sin \phi - 1}{\sqrt{2} \sin \phi \cdot \left[\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \right]} \right]$$

$$L_{total} = 0,0508 \cdot \left[\frac{\text{sen}(40,31) + e^{\frac{\pi \cdot \tan(40,31)}{2}} + e^{\frac{\pi \cdot \tan(40,31)}{2}} \cdot \text{sen}(40,31) - 1}{\sqrt{2} \text{sen}(40,31) \cdot \left[\cos \frac{40,31}{2} - \text{sen} \frac{40,31}{2} \right]} \right]$$

$$= 0,55 \text{ m}$$

$$\eta = \frac{B^2 \cdot \gamma}{8(-1 + \text{sen} \phi)} \left[1 - 3 \text{sen} \phi + e^{\pi \tan \phi} (-1 - 3 \cdot \text{sen} \phi + \text{sen} 3\phi) + \text{sen} 3\phi \right]$$

$$\eta = \frac{0,0508^2 \cdot 14,72}{8(-1 + \text{sen}(40,31))} \left[1 - 3 \text{sen}(40,31) + \text{sen}(3 \cdot 40,31) + e^{\pi \tan(40,31)} (-1 - 3 \cdot \text{sen}(40,31) + \text{sen}(3 \cdot 40,31)) \right] = 0,40 \text{ kN/m}$$

$$E = 39180,65 \cdot \sqrt{\frac{0,21264}{104,64}} = 1766,21 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{med} = \frac{\sigma'_v \cdot (1 + 2 \cdot k_0)}{3} = \frac{\frac{0,0508 \cdot 14,42}{2} \cdot (1 + 2 \cdot (1 - \text{sen}(40,31)))}{3}$$

$$= 0,21264 \text{ kN/m}^2$$

$$\chi = \frac{L_{total}}{P} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\chi = \frac{0,55}{0,3048} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{40,31}{2} \right) = 3,9$$

Com isso, pode-se inferir em uma primeira análise que a ruptura é não generalizada, já que $\sigma_{rup} = 40,28 \text{ kN/m}^2 < \sigma_L = 46,03 \text{ kN/m}^2$. Logo, há de se fazer a segunda análise, que consiste em estimar o valor de σ_L^* , que se diferencia de σ_L em alguns parâmetros, pois é função de um L_{ZRI} , η_{ZRI} e χ^* , os quais são calculados da seguinte forma.

$$L_{ZRI} = \frac{B}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]} = \frac{0,0508}{\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{40,31}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{40,31}{2}\right) \right]} = 0,06045 \text{ m}$$

$$\eta_{ZRI} = \frac{\gamma \cdot B^2}{2} \cdot \frac{\tan(\phi)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{14,72 \cdot 0,0508^2}{2} \cdot \frac{\tan(40,31)}{4} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{40,31}{2}\right) = 0,0087 \text{ kN/m}$$

$$\chi^* = \frac{L_{total}^*}{P} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{0,06045}{0,3048} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{40,31}{2}\right) = 0,43$$

Agora pode-se calcular σ_L^*

$$\sigma_L^* = 2 \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \eta_{ZRI}}{\pi \cdot L_{ZRI}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot \chi^*}{1 + \frac{3}{2} \cdot \chi^*}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1766,21 \cdot 0,0087}{\pi \cdot 0,06045}} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2 \cdot 0,43}{1 + \frac{3}{2} \cdot 0,43}} = 19,13 \text{ kN/m}^2$$

Como $\sigma_{rup} = 40,28 \text{ kN/m}^2 > \sigma_L^* = 19,13 \text{ kN/m}^2$, pode-se perceber que a ruptura é localizada, cujo resultado está em concordância com o referido ensaio realizado por VESIC (1963).

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, *NBR 6122: Projeto e Execução de Fundações*, Rio de Janeiro, 2010.

BUISMAN, A. S. K., *Grondmechanica*, 1ª Edição, Delft, Waltman, 1940.

CARNEIRO, F. L., *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos*, 2ª Edição, Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

CERATO, A. B.; LUTENEGGER, A. J., *Scale Effects of Shallow Foundation Bearing Capacity on Granular Material*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE / outubro de 2007.

CINTRA, J. C. A., AOKI, N.; ALBIERO, J. H., *Livro Fundações Diretas Projeto Geotécnico*, 2011, Editora Oficina de Textos.

DE BEER, E. E.; VESIC, A. B., *Etude expérimentale de la capacité portante du sable sous des fondations directes établies en surface*, Annales des Travaux Publics de Belgique 59, No. 3, pp. 5 – 58, 1958.

DE BEER, E. E., *Experimental Determination of the Shape Factors and the Bearing Capacity Factors of Sand*, Gotechnique - No. 4, 387-411. Volume 20 Issue 4, pp. 387-411, dezembro de 1970.

DUNCAN, W. J., *Physical Similarity and Dimensional Analysis*, Hodder e Stoughton Educational, dezembro de 1953.

FREITAS, A. C., *Material de Aula do Curso de Projeto de Estruturas de Fundações*, Mestrado Profissional (PPE - UFRJ), 2015.

INGRA, T. S.; BAECHER, G.B., *Uncertainty in Bearing Capacity of Sands*, ASCE - Journal of Geotechnical Engineering - Vol. 109, Issue 7, julho de 1983.

HANSEN, J. B, *A revised and extended formula for bearing capacity*, Danish Geoteknisk Institut, Bulletin n. 28, Copenhagen, p. 5-11, 1970.

HIBBELER, R. C., *Resistência dos Materiais*, 7ª Edição, 2010, Editora Person.

MEYERHOF, G. G., *The Ultimate Bearing Capacity of Foundations*, Geotechnique - Volume 2 Issue 4, pp. 301-332, dezembro 1951.

MEYERHOF, G. G., *Some recent research on the bearing capacity of foundations*, *Canadian Geotech. J.* , 1(1), 16-26, 1963.

MICHALOWSKI, R. L., *An Estimate of the Influence of Soil Weight on Bearing Capacity Using Limit Analysis*, Soil and Foundation Vol.37, No. 4, 57-64, Japanese Geotechnical Society, dezembro de 1997.

NEAL-STURGESS, C.E., *A Direct Derivation of the Griffith-Irwin Relationship using a Crack tip Unloading Stress Wave Model*, arXiv 0810.2218 Volume, DOI, 2008.

NOVA, R.; MONTRASIO, L., *Settlements of shallow foundations on sand*, Geotechnique - Volume 41 Issue 2, pp. 243-256, junho de 1991.

PINTO, C. S., *Curso Básico de Mecânica dos Solos*, 3ª Edição, 2006, Editora Oficina de Textos.

PRANDTL, L., *Über die Harte plastischer Körper, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math. Phys. KI 12, 74-85, 1920.

PRANDTL, L., *Hauptaufsätze: Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden*, Z. angew. Math. Mech., 1: 15–20. doi:10.1002/zamm.19210010102, 1921.

REISSNER, H., *Zum Erddruckproblem*, Proc., 1st Int. Congress for Applied Mechanics, C. B. Biezeno and J. M. Burgers, eds., Delft, The Netherlands, 295–311, 1924.

SIANO, D. B., *Orientational Analysis-a Supplement to Dimensional Analysis- I*, Exxon Research and Engineering Company, Corporate Research Science Laboratories, Clinton Township, Route 22 East, Annandale, NJ 08801, U.S.A, dezembro de 1985.

SIANO, D. B., *Orientational Analysis, Tensor Analysis and the Group Properties of the SI Supplementary Units- II*, Exxon Research and Engineering Company, Corporate Research Science Laboratories, Clinton Township, Route 22 East, Annandale, NJ 08801, U.S.A, dezembro de 1985.

TERZAGHI, K., *Theoretical soil mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1943.

TSCHEBOTARIOFF, G. P., *Soil Mechanics, Foundations, and Earth Structures: an introduction to the theory and practice of design and construction*, Mc Graw-Hill, New-York, 1951.

VELLOSO, A. B.; LOPES, F. R., *Fundações*, Editora Oficina de Textos, São Paulo, 2012.

VESIC, A. B., *Bearing Capacity of Deep Foundations in Sand*, Highway Research Record, Issue 39, 1963, pp 112-153, 1963.

VESIC, A. B., *Tests on instrumented piles*, Journal of Soil Mechanics e Foundations, Duke University, Durham, 1970.

VESIC, A. B., *Analysis of ultimate loads of shallow foundations*. J. Soil Mech. Found. Div., 99(1), 53, 1973.

VESIC, A. B., *Bearing Capacity of Shallow Foundations*, Foundation Engineering Handbook, New York, McGraw-Hill, pp.121-147, 1975.