



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

ANÁLISE DINÂMICA DE UM TUBO BIENGASTADO TRANSPORTANDO
FLUIDO MONOFÁSICO

Valéria Sousa França

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Nuclear da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Su Jian

Rio de Janeiro
Abril de 2021

ANÁLISE DINÂMICA DE UM TUBO BIENGASTADO TRANSPORTANDO
FLUIDO MONOFÁSICO

Valéria Sousa França

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO
CURSO DE ENGENHARIA NUCLEAR DA ESCOLA POLITÉCNICA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
ENGENHEIRO NUCLEAR.

Examinado por:

Prof. Su Jian, D.Sc.

Profa. Andressa dos Santos Nicolau, D.Sc.

Dr. José Luiz Horácio Faccini, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
ABRIL DE 2021

Sousa França, Valéria

Análise dinâmica de um tubo biengastado transportando fluido monofásico/Valéria Sousa França. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2021.

XV, 43 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Su Jian

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Nuclear, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 39 – 42.

1. Vibrações Induzida por Escoamento. 2. Mathematica. 3. GITT. I. Jian, Su. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Nuclear. III. Análise dinâmica de um tubo biengastado transportando fluido monofásico

*Aos meus pais
À Gina Ramalho.*

Agradecimentos

Ao professor Su Jian por me guiar desde os primeiros períodos da graduação, pela dedicação em me orientar na elaboração deste trabalho de conclusão e pelos bons conselhos. Deixo aqui registrado minha completa admiração ao seu trabalho.

Aos professores e funcionários do DNC/UFRJ pela dedicação e suporte prestado.

Aos meus colegas do LASME que estiveram comigo em momentos de grande esforço e também em momentos de diversão. Agradeço especialmente ao Luiz Aldeia, meu conterrâneo, a quem tenho muita admiração pela dedicação e humildade.

Aos amigos que fiz na graduação, que tornaram essa jornada menos cansativa e mais alegre. Sem os cafezinhos no bloco G essa caminhada não teria as mesmas lembranças. Um agradecimento especial a Larissa Paizante, por se fazer presente mesmo em momentos não merecidos.

À minha família - meus tios, Manu e Rachel pelo suporte e apoio, assim como a Nina e a tia Cida por serem amor e acolhimento quando estive longe de casa. E principalmente aos meus pais, Maria e Amaro pelas oportunidades que eles tanto lutaram para me proporcionar, agradeço por estarem sempre ao meu lado, sendo exemplo de força e coragem.

À minha segunda mãe, Gina Ramalho, por me acolher em sua vida e contribuir para a construção da mulher que sou hoje.

À sociedade brasileira, responsável indiretamente pela minha formação nesta Universidade.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Nuclear.

ANÁLISE DINÂMICA DE UM TUBO BIENGASTADO TRANSPORTANDO FLUIDO MONOFÁSICO

Valéria Sousa França

Abril/2021

Orientador: Su Jian

Curso: Engenharia Nuclear

Vibrações induzidas por escoamento (FIV) são problemas conhecidos dentro da Engenharia Nuclear, uma vez que reatores e componentes que integram as centrais nucleares são susceptíveis a este fenômeno. A interação fluido-estrutura (FSI), presente em diversos sistemas que compõem a usina, pode gerar vibrações indesejadas e causar potenciais riscos de segurança, danos estruturais e prejuízos financeiros devido a paradas inesperadas. O objetivo do presente trabalho é desenvolver uma ferramenta matemática para a análise dinâmica de um tubo biengastado transportando um fluido monofásico. O tubo, com diâmetro, espessura e propriedades mecânicas uniformes é modelado por uma viga Euler-Bernoulli. A técnica da transformada integral generalizada (GITT) é empregada para a solução do modelo matemático. A equação diferencial parcial governante é transformada em coordenada longitudinal, usando autofunções da viga Euler-Bernoulli, resultando-se em um sistema de equações diferenciais ordinárias que é integrado numericamente para a previsão da resposta dinâmica do tubo. Então, assumindo uma vibração livre senoidal, é obtido um sistema de autorvalores para determinar as frequências complexas do sistema dinâmico, fornecendo as frequências naturais e a velocidade crítica do tubo transportando um fluido monofásico. A abordagem proposta obteve boa convergência para ordem de truncamento $NW \leq 12$, assim como apresentou resultados de estabilidade compatíveis com os já reportados na literatura.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

DYNAMIC ANALYSIS OF A CLAMPED-CLAMPED PIPE CONVEYING SINGLE-PHASE FLUID

Valéria Sousa França

April/2021

Advisor: Su Jian

Course: Nuclear Engineering

Flow-induced vibration (FIV) is a well known problem in Nuclear Engineering, since reactors and components that integrate nuclear power plants are susceptible to this phenomenon. The fluid-structure interaction (FSI), present in several systems that constitute the plant, can generate undesirable vibrations and cause potential safety risks, structural damage and financial losses due to unexpected shutdowns. The objective of this work is to develop a mathematical tool for the dynamic analysis of a clamped-clamped pipe conveying single-phase fluid. The pipe with uniform diameter, thickness and mechanical properties is modeled as an Euler-Bernoulli beam. The generalized integral transform technique (GITT) is used to solve the mathematical model. The governing partial differential equation is transformed in the longitudinal coordinate using Euler-Bernoulli beam eigenfunctions, resulting in a system of ordinary differential equations that is numerically integrated to predict the dynamic response of the pipe. Then, assuming a sinusoidal free vibration, a system of eigenvalues is obtained to determine the complex frequencies of the dynamic system, providing the natural frequencies and the critical velocity of the pipe carrying single-phase fluid. The proposed approach has shown good convergence for truncation order $NW \leq 12$, and presented stability results in good agreement with results reported in the literature.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas	xv
1 Introdução	1
1.1 Estrutura da Análise de Vibrações	2
1.2 Motivação e Objetivo	3
1.3 Organização do Trabalho	3
2 Fundamentos e Revisão Bibliográfica	4
2.1 Teoria das Vigas de Euler-Bernoulli	4
2.2 Vibrações em Vigas de Euler-Bernoulli	5
2.2.1 Condições de Contorno	6
2.2.2 Solução para Vibrações Livres	7
2.3 Vibrações	7
2.3.1 Autofrequências e Diagrama de Argand	9
2.4 Interação Fluido-Estrutura (FSI)	11
2.5 FSI em Engenharia Nuclear	13
3 Metodologia	15
3.1 O problema Físico	15
3.2 Equações Governantes	16
3.2.1 Condições de Contorno e Iniciais	19
3.2.2 Forma Adimensional	20
3.3 A GITT	20
3.3.1 O Problema de Sturm-Liouville	21
3.3.2 Determinação do Problema de Autovalor	21
3.3.3 Resolução do Problema de Autovalor	22

3.3.4	Par da Transformada Integral	23
3.3.5	Transformada Integral da Equação Governante	23
3.3.6	Determinação dos Coeficientes	24
4	Resultados e Discussões	26
4.1	Autovalores	26
4.2	Comportamento da Convergência	27
4.3	Verificação da Solução	29
4.4	Análise de Estabilidade	31
5	Conclusões	37
5.1	Conclusões	37
5.2	Sugestões para Trabalhos Futuros	38
	Referências Bibliográficas	39
A	Implementação Mathematica da Abordagem da Matriz Compa- nheira de Frobenius	43

Lista de Figuras

1.1	Ilustração de dois componentes de uma usina nuclear (a) núcleo de um reator e (b) elemento combustível [19].	2
1.2	Relação <i>input-output</i> de um sistema sob vibrações [30].	2
2.1	Viga sob flexão [13].	5
2.2	Sistema massa-mola: (a) Mola não-deformada; (b) Mola esticada; (c) Mola comprimida [30].	8
2.3	Representação de uma viga no sistema massa-mola com um grau de liberdade [9].	9
2.4	Típico Diagrama de Argand mostrando o comportamento das autofrequências em função de u . (a) Divergência via bifurcação de pitchfork, (b) <i>flutter</i> via bifurcação Hopf, (c) <i>flutter</i> de modo acoplado Hamilton e (d) <i>flutter</i> de modo acoplado Paidoussis [27].	11
2.5	Diferentes condições de contorno para tubos transportando fluido com velocidade U [26].	12
2.6	Gerador de vapor, equipamento presente em centrais nucleares [32]. .	13
3.1	Tubo biengastado contendo um fluido em escoamento [17].	15
3.2	Diagrama dos elementos infinitesimais (a) do fluido e (b) do tubo [27].	16
3.3	Sistemas de coordenadas de Euler e Lagrange, respectivamente [27]. .	18
4.1	Análise de convergência da flexão transversal adimensional $w(x,t)$ para $t = 25$ com diferentes ordens de truncamentos NW para (a) $u = 4,5$ e $\beta = 1,0$, (b) $u = 4,5$ e $\beta = 0,5$ e (c) $u = 1,5$ e $\beta = 0,5$. . .	28
4.2	Análise da convergência da evolução temporal da flexão transversal no centro do tubo $w(0.5,t)$ com diferentes ordens de truncamentos NW para (a) $u = 4,5$ e $\beta = 1,0$, (b) $u = 4,5$ e $\beta = 0,5$ e (c) $u = 1,5$ e $\beta = 0,5$	29
4.3	Frequência adimensional ω para os modos 1-3, versus a velocidade adimensional u , para $\beta = 0,1$	30
4.4	Diagrama do primeiro modo das frequências adimensionais complexas para (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.	31

4.5	Diagrama do segundo modo das frequências adimensionais complexas para (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.	32
4.6	Diagrama do terceiro modo das frequências adimensionais complexas para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.	33
4.7	Componente real da frequência adimensional ω em função da velocidade adimensional u para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (a) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.	34
4.8	Componente imaginária da frequência adimensional ω em função da velocidade adimensional u para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (a) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.	35

Lista de Tabelas

2.1	Condições de Contorno de uma viga [30].	6
2.2	Tipos de vibrações [21].	8
2.3	Tipos de instabilidade em sistemas lineares [16].	10
2.4	Reatores americanos que apresentaram VIF [10].	14
4.1	Autovalores. (a) obtidos através da GITT e (b) Blevins [8].	26
4.2	Comportamento da convergência do deslocamento transversal $w(x, t)$ de um tubo contendo fluido monofásico.	27
4.3	Influência da velocidade nas primeiras cinco frequências adimensio- nais ω_i para $\beta = 0, 1$	30
4.4	Influência de β nas cinco primeiras frequências so sistema para $u = 4, 5$	36

Lista de Símbolos

ρ	Densidade de massa, p. 5
f	Força externa, p. 6
w	Frequência natural, p. 7
$\Im m$	Componente imaginária, p. 9
$\Re e$	Componente real, p. 9
u	Velocidade adimensional do fluido, p. 9
u_c	Velocidade crítica adimensional do fluido, p. 9
ω	Frequência adimensional, p. 10
A	Área transversal do tubo, p. 15
EI	Rigidez flexural, p. 15
U	Velocidade do fluido, p. 15
L	Comprimento do tubo, p. 15
M	Massa do fluido, p. 15
m	Massa do tubo, p. 15
p	Pressão, p. 16
F	Forças normais, p. 16
D/Dt	Derivada material, p. 17 Tensão de cisalhamento transversal, p. 17
T	Tensão longitudinal, p. 17
a_f	Aceleração do fluido, p. 18
μ	Autovalores, p. 21

$W(x)$	Autofunções, p. 22
NW	Ordem de truncamento, p. 28
β	Razão de massa, p. 28
t	Tempo adimensional, p. 28

Lista de Abreviaturas

<i>LMFBR</i>	Liquid Metal Fast Breeder Reactor, p. 14
<i>PWR</i>	Pressurized Water Reactor, p. 14
EDO	Equação Diferencial Ordinária, p. 20
EDP	Equação Diferencial Parcial, p. 20
FIV	Flow Induced Vibration, p. 1
FSI	Fluid-Structure Interaction, p. 1
GITT	Técnica de Transformada Integral Generalizada, p. 3
LN	Linha Natural, p. 4
MIV	Método de Interação Variacional, p. 12
MTD	Método de Transformada Diferencial, p. 12
QEP	Quadratic Eigenvalue Problem, p. 25
VIV	Vibrações Induzidas por Vórtex, p. 12

Capítulo 1

Introdução

Quando comparada com outras fontes de energia disponíveis, a energia nuclear é uma das que apresentam maiores densidades de energia por unidade de massa e volume, tornando-se uma fonte muito lucrativa e limpa de gerar eletricidade [19].

Considerando o crescimento da demanda energética e a necessidade de redução da emissão de combustíveis fósseis, a ciência nuclear tem apresentado progressos significativos para desempenhar uma contribuição de importância no fornecimento de energia limpa e segura para o futuro.

Para garantir a plena segurança do funcionamento de centrais nucleares, é requerido que todos os equipamentos que compõem as usinas tenham seus comportamentos estudados e previstos em diversas condições de operação.

Na década de 1960, alguns estudos comprovaram a susceptibilidade de componentes da indústria nuclear sofrerem vibrações induzidas por escoamento (FIV), fazendo com que este fenômeno desempenhasse um papel importante no design e operação de usinas nucleares, uma vez que vibrações excessivas são motivos de redução da vida útil de equipamentos, além de possíveis falhas operacionais.

Vibrações induzidas por escoamento podem estar presentes em diversos componentes e equipamentos das usinas como o próprio reator, em tubos associados aos trocadores de calor e geradores de vapor, além de equipamentos auxiliares como tubos de instrumentação. Um sistema essencial que compõe os equipamentos citados anteriormente são tubos transportando um fluido, cujas estruturas cilíndricas quando sujeitas a escoamentos internos ou externos podem vibrar devido a velocidade do escoamento, causando danos operacionais, estruturais e econômicos. Essas vibrações são uma resultante da interação fluido-estrutura (FSI), tema abrangente em diversos setores da indústria e conseqüentemente um grande gerador de pesquisas científicas.

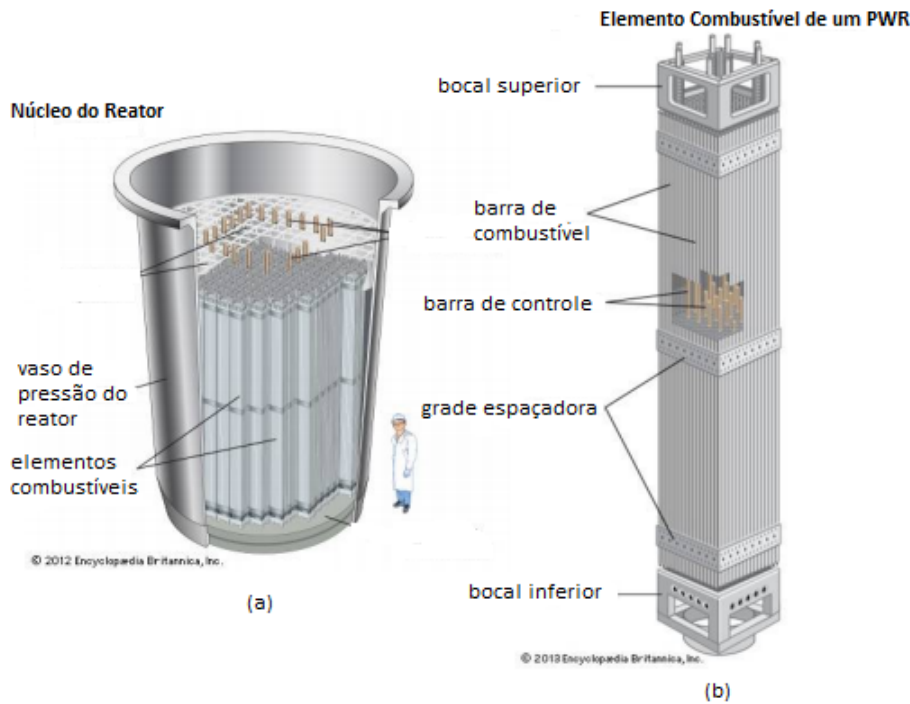


Figura 1.1: Ilustração de dois componentes de uma usina nuclear (a) núcleo de um reator e (b) elemento combustível [19].

1.1 Estrutura da Análise de Vibrações

A resposta dinâmica (*output*) de um sistema sob vibrações depende da excitação inicial (*input*) a qual ele é submetido e das características que envolvem o sistema, como é ilustrado na figura 1.2. O processo de desenvolvimento desse tipo de análise começa com uma modelagem matemática que represente o sistema de forma adequada, através de equações que governem o seu comportamento. Uma vez com um modelo definido, as equações são derivadas através de algum método e a resolução das equações se dá a partir de diferentes técnicas, sendo elas analíticas e/ou numéricas, que retornam deslocamento, velocidade e aceleração do sistema [30].

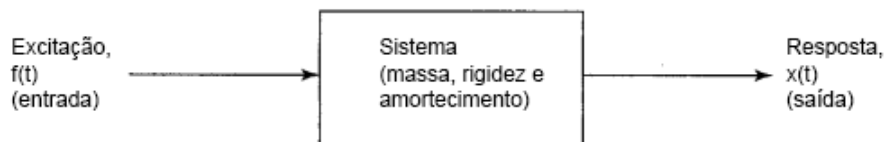


Figura 1.2: Relação *input-output* de um sistema sob vibrações [30].

1.2 Motivação e Objetivo

Tubos transportando um fluido estão fortemente presentes em equipamentos que constituem as centrais nucleares, e quando submetidos a altos valores de velocidade do fluido escoando em seu interior, podem vibrar em excesso e causar falhas operacionais, tendo como resultado potencial risco à segurança e perdas econômicas.

Este trabalho analisa o comportamento dinâmico de um tubo de Euler-Bernoulli com extremidades fixas, transportando fluido monofásico em seu interior, utilizando a técnica de transformada integral generalizada.

1.3 Organização do Trabalho

Dentre os 5 capítulos deste trabalho, o Capítulo 1 busca introduzir e contextualizar o estudo de vibrações induzidas por escoamento dentro do campo da Engenharia Nuclear. O Capítulo 2 apresenta uma introdução da teoria das vigas de Euler-Bernoulli, assim como conceitos básicos de vibrações, juntamente com uma revisão bibliográfica de trabalhos anteriores que abordaram o tema de FSI e que serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 3 descreve o problema físico, formula as equações que governam a interação fluido-estrutura, além de apresentar e descrever a metodologia aplicada para a solução numérico-analítica do problema físico proposto, descrevendo os passos necessários para aplicação da técnica de transformada integral generalizada (GITT). O Capítulo 4 trata dos resultados obtidos através da metodologia proposta, sendo composto por um estudo de convergência, seguido de uma validação da solução pelo método proposto, e pelos resultados da resposta dinâmica do sistema. Por fim, as conclusões dos resultados são apresentadas no Capítulo 5, assim como sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos e Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentado uma breve introdução de conceitos básicos necessários para o contexto e entendimento do tema proposto, em conjunto com um resumo dos principais trabalhos desenvolvidos anteriormente dentro do tema de vibração induzida por escoamento que contribuíram para a elaboração deste texto.

Inicialmente é apresentado uma definição da teoria das vigas de Euler-Bernoulli, assim como o fenômeno de vibrações. Em seguida, são discutidos pontos gerais da interação fluido-estrutura (FSI), desde revisões importantes a diferentes metodologias utilizadas para a solução analítica do problema. Por fim, é apresentado outra seção dando ênfase aos trabalhos desenvolvidos dentro do campo da Engenharia Nuclear, também avaliando diferentes metodologias de solução.

2.1 Teoria das Vigas de Euler-Bernoulli

A teoria das vigas de Euler-Bernoulli admite como hipótese fundamental que as seções transversais permanecem planas e perpendiculares a linha natural (LN), mesmo quando submetida a pequenas deformações e deslocamentos. Esse princípio é bem adequado para vigas esbeltas e de comprimento muito maior que sua seção transversal [35].

Premissas básicas assumidas:

- Viga em formato de prisma, com comprimento muito maior que sua seção transversal;
- Material de composição da viga linearmente elástico;
- Coeficiente de Poisson desconsiderado;
- Planos perpendiculares não sofrem alteração em relação a LN mesmo depois da deformação;

- Efeitos da inércia de rotação são negligenciados;
- Energia de cisalhamento desprezada;
- Seção transversal simétrica ao plano vertical;
- Material homogêneo;
- Adesão da hipótese de pequenos ângulos de rotação.

2.2 Vibrações em Vigas de Euler-Bernoulli

Vigas possuem extensa aplicação na engenharia e quando submetidas a vibrações excessivas pode haver comprometimento de sua vida útil devido a possíveis falhas estruturais. A fim de modelar o comportamento dinâmico dessas estruturas, a seguir são apresentadas as equações que descrevem a deflexão lateral, w , de uma viga de Euler-Bernoulli, de acordo com as forças atuantes mostradas na figura 2.1 [5].

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}, \quad (2.2)$$

sendo M o momento fletor, $V(x, t)$ a força de cisalhamento, E o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia.

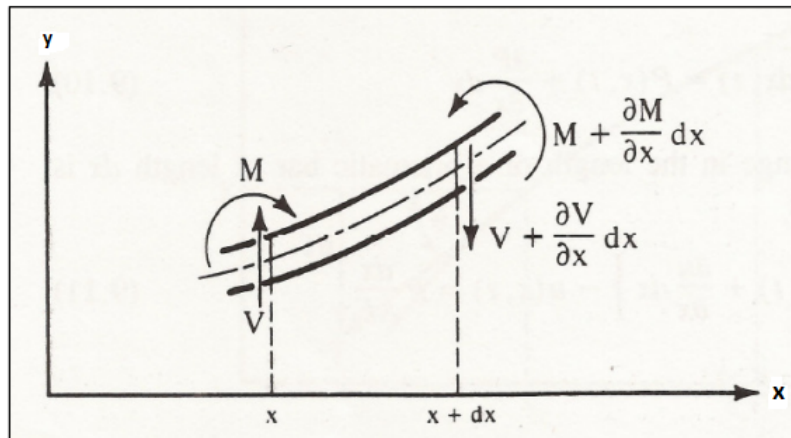


Figura 2.1: Viga sob flexão [13].

Sabendo que a força de inércia que age sobre a viga é dada como,

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Fazendo a resultante das forças na direção y e utilizando as equações 2.1 e 2.2, obtemos a equação que descreve o movimento lateral de vigas homogêneas, livre da ação de forças externas,

$$F_w = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Podendo ser escrita da seguinte condição de equilíbrio,

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

onde

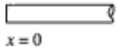
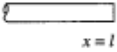
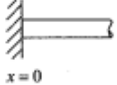
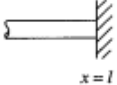
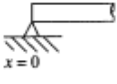
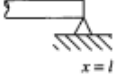
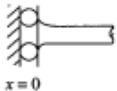
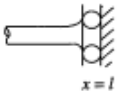
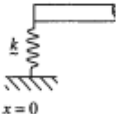
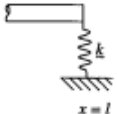
$$c = (EI/\rho A)^{1/2}, \quad (2.6)$$

sendo ρ a densidade da massa e A a área transversal da viga.

2.2.1 Condições de Contorno

A equação 2.5, de quarta ordem, necessita de quatro condições de contorno para determinar a solução da equação diferencial. Sendo elas referentes as extremidades da viga, representando as restrições de movimentos relativos à deflexão e inclinação. As mais usuais são mostradas na tabela 2.1.

Tabela 2.1: Condições de Contorno de uma viga [30].

Condição de contorno	Extremidade esquerda ($x = 0$)	Extremidade direita ($x = l$)
1. Livre	 $x = 0$	 $x = l$
	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
2. Biengastado	 $x = 0$	 $x = l$
	$w(0, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$	$w(l, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$
3. Simplesmente apoiado	 $x = 0$	 $x = l$
	$w(0, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$w(l, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
4. Deslizante	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
5. Extremidades com mola	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -kw(0, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = kw(l, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$

2.2.2 Solução para Vibrações Livres

A equação 2.5, como dito anteriormente, descreve o deslocamento lateral de uma viga homogênea, livre da ação de excitações externas, $f(x, t) = 0$. Sabendo que segundo o método de separação de variáveis o deslocamento lateral $w(x, t)$ pode ser escrito na forma [30],

$$w(x, t) = W(x)T(t), \quad (2.7)$$

onde $W(x)$ é a deflexão modal e $T(t)$ é uma função do tempo. Substituindo a eq. 2.7 em eq. 2.5 obtemos,

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \omega^2. \quad (2.8)$$

Podendo ser escrita como a seguinte equação diferencial ordinária,

$$\frac{d^4 W_i(x)}{dx^4} - \mu^4 W_i(x) = 0 \quad 0 < x < l, \quad (2.9)$$

onde,

$$\mu^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}, \quad (2.10)$$

sendo ω a frequência natural do sistema.

2.3 Vibrações

Vibrações, de forma geral, são movimentos repetitivos em torno de uma posição de equilíbrio, envolvendo troca alternada de energia potencial e cinética. Dessa forma, para que haja um sistema vibrando ou oscilando é necessário que existam dois componentes, um que estoque energia cinética e outro que estoque energia potencial, e vice-versa [30].

Pensando em um sistema massa-mola, inicialmente em equilíbrio, como ilustrado na figura 2.2(a), nota-se que m , ao se deslocar até a posição 2, figura 2.2(b), tem sua velocidade reduzida a zero, enquanto submete a mola a seu alongamento máximo. Dessa forma, toda a energia cinética de m passa a ser estocada pela mola, em forma de energia potencial. A mola é um componente que apresenta tendência a retornar a sua condição de equilíbrio, e conseqüentemente haverá uma força que fará m se mover para a esquerda. A velocidade da mola irá crescer até chegar na posição 1, onde ela voltará a seu equilíbrio e assumirá energia potencial igual a zero, enquanto m terá máxima energia cinética. Uma vez com sua velocidade máxima, m tenderá a continuar se movendo para a esquerda, contra a mola e atingirá a posição 3, figura

2.2(c), onde sua velocidade irá decair e chegar a zero, enquanto a mola apresentará energia potencial máxima. Todo esse processo irá se repetir e então m apresentará movimento oscilatório.

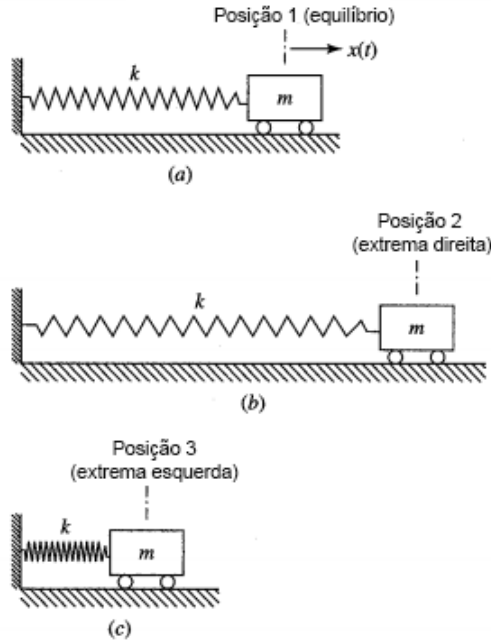


Figura 2.2: Sistema massa-mola: (a) Mola não-deformada; (b) Mola esticada; (c) Mola comprimida [30].

O fenômeno de vibrações em sistemas mecânicos pode ser dividido em vibrações naturais e vibrações forçadas. Sendo a vibração natural ou livre definida como uma deflexão repetitiva da posição de equilíbrio de um determinado sistema, estando ele sob influência de sua frequência natural, que é a frequência na qual um sistema vibra, a partir de uma perturbação inicial, sem ação de forças externas. Em casos onde o amortecimento não é considerado, esses sistemas podem vibrar infinitamente, uma vez que o amortecimento dissipa energia mecânica e a transforma em ruídos ou outros tipos de energia. Já sistemas sujeitos a forças externas possuem como resultado vibrações forçadas, realizadas pela intervenção de forças repetitivas. A tabela 2.2 mostra os dois tipos de vibrações mencionados e as respectivas equações que as regem.

Tabela 2.2: Tipos de vibrações [21].

Sistema	Livre, $f = 0$	Forçada, $f \neq 0$
Não amortecido, $c = 0$	$m\ddot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + kx = f(t)$
Amortecido, $c \neq 0$	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

Alguns sistemas estruturais podem ser idealizados como um sistema simples de vibração, no qual a massa é aproximada por um ponto M e a elasticidade do sistema é modelada pela mola. Similarmente, uma viga com extremidades fixas, vibrando livremente pode ser considerada como um sistema massa-mola possuindo um grau de liberdade, e tendo suas extremidades fixas, como representado na figura 2.3.

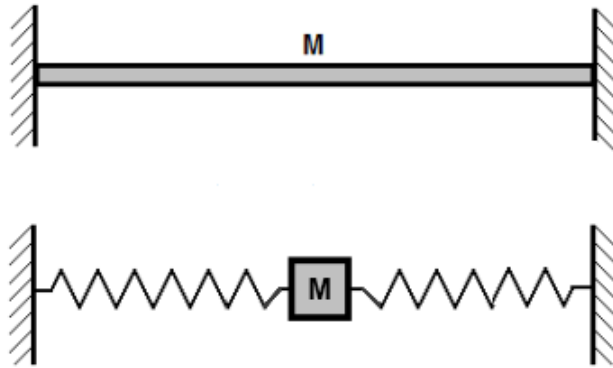


Figura 2.3: Representação de uma viga no sistema massa-mola com um grau de liberdade [9].

2.3.1 Autofrequências e Diagrama de Argand

Bifurcações são mudanças qualitativas na estrutura da resposta do sistema em consequência da variação de um parâmetro, na interação fluido-estrutura, por exemplo, estuda-se a influência do aumento da velocidade do escoamento na resposta dinâmica. Considerando os casos encontrados neste trabalho, as bifurcações podem ser do tipo:

- Bifurcação de *Hopf*, que refere-se ao aparecimento de uma órbita periódica quando a bifurcação cruza um valor crítico.
- Bifurcação Hamiltoniana de *Hopf*, presente em sistemas conservadores, onde ocorre perda de estabilidade em um ponto fixo e uma subsequente saída do eixo imaginário.
- Bifurcação de *Pitchfork*, referente à divergência onde a bifurcação é caracterizada por uma autofrequência igual a zero, em que o equilíbrio original torna-se instável e dois novos equilíbrios estáveis são gerados.

A análise de estabilidade de um tubo transportando fluido pode ser feita através das autofrequências, utilizando como parâmetro a velocidade do fluido, u , para o qual a uma certa velocidade crítica, u_c , o sistema perde a estabilidade.

O diagrama de Argand, é uma representação gráfica de números complexos, podendo ser utilizado neste estudo, onde as autofrequências possuem parte real e parte imaginária, sendo a parte real, \Re , referente à frequência de oscilação e a parte imaginária, \Im , ao amortecimento. A tabela 2.3 ilustra os possíveis modos de instabilidade de acordo com as autofrequências.

Tabela 2.3: Tipos de instabilidade em sistemas lineares [16].

$\Re(\omega) + \Im(\omega)$	
$\Re(\omega) > 0$	Instável
$\Im(\omega) = 0$	Divergência
$\Im(\omega) \neq 0$	<i>Flutter</i>
$\Re(\omega) \leq 0$	Estável

O diagrama de Argand para um sistema com ausência de dissipação é apresentado na figura 2.4, onde as autofrequências são puramente reais para velocidades do fluido menores que a velocidade crítica, $u < u_c$, e se tornam puramente imaginárias quando $u = u_c$, a figura 2.4(a) ilustra esse comportamento. A bifurcação de *Hopf* é ilustrada na figura 2.4(b), mostrando que para $u < u_c$ o sistema é amortecido e para $u > u_c$ ele é negativamente amortecido no segundo modo.

A figura 2.4(c) mostra o diagrama de Argand para *flutter* de modo acoplado, através da chamada bifurcação Hamiltoniana de *Hopf* de um sistema não amortecido. Para $u < u_c$ não há amortecimento no sistema, e para $u > u_c$ a combinação dos dois modos resulta em duas frequências específicas com amortecimento positivo e negativo. A figura 2.4(d) mostra outra forma de *flutter* de modo acoplado, apresentando como característica distintiva do citado anteriormente a bifurcação originando-se diretamente do estado divergente. Portanto, no início da vibração, a frequência de oscilação é zero e depois puramente real [27].

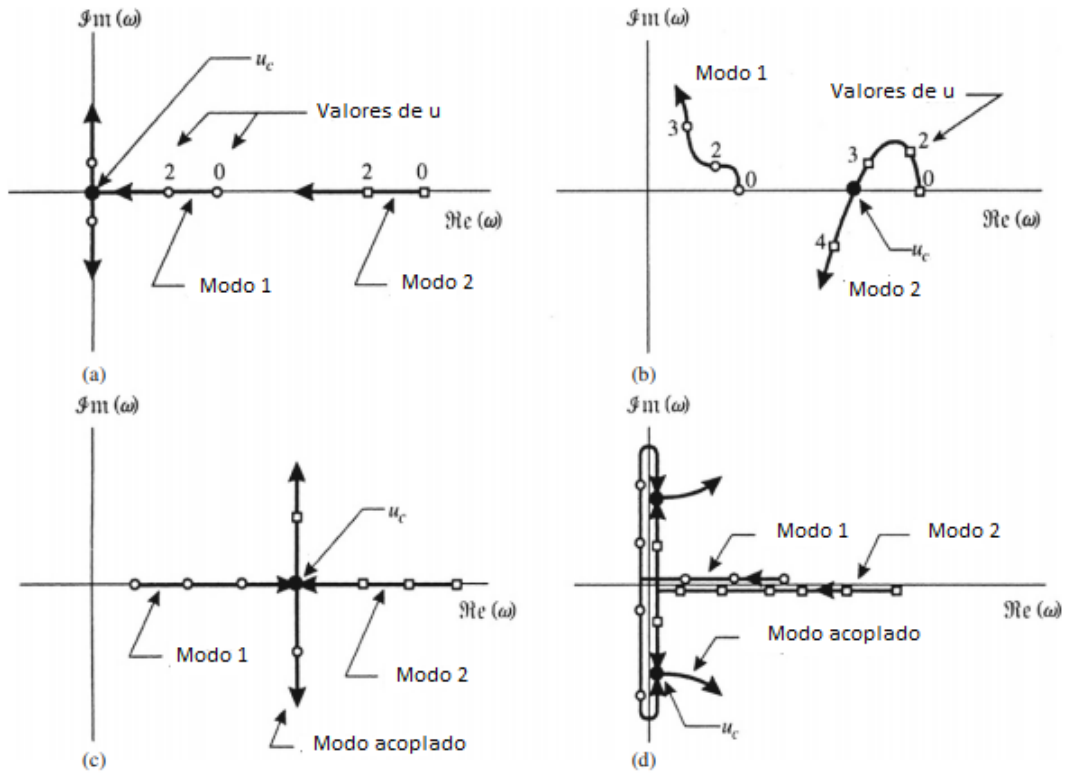


Figura 2.4: Típico Diagrama de Argand mostrando o comportamento das auto-freqüências em função de u . (a) Divergência via bifurcação de pitchfork, (b) *flutter* via bifurcação Hopf, (c) *flutter* de modo acoplado Hamilton e (d) *flutter* de modo acoplado Paidoussis [27].

2.4 Interação Fluido-Estrutura (FSI)

Tubos contendo fluido são caracterizados pela interação fluido-estrutura, onde estruturas deformáveis interagem com o escoamento interno, resultando em forças dinâmicas que podem causar vibrações. A rugosidade da parede do tubo se opõe ao movimento das partículas do fluido que estão próximas a parede interna, e conseqüentemente o atrito causado pela rugosidade reduz a velocidade das partículas naquela seção, assim gerando forças de excitação na tubulação.

A resposta desse tipo de sistema é dependente de fatores como a velocidade do escoamento e as condições de suporte do tubo, Paidoussis [28] foi um dos pioneiros no assunto, estudando extensivamente a dinâmica e a instabilidade de tubos contendo fluido para diferentes condições de contorno. Seus resultados mostraram que esses sistemas quando submetidos a altas velocidades de escoamento interno, sofriam instabilidade oscilatória, ao contrário de outros estudos que apresentavam a flambagem como única forma de instabilidade.

Para analisar o comportamento dinâmico de tubos transportando fluido diferen-

tes métodos foram utilizados, como o método da rigidez dinâmica que foi empregado na análise de tubos *multi-span*, baseados na teoria das vigas de Timoshenko [4]. O mesmo método, juntamente com o método de transferência foi utilizado para estudar as características da vibração de um tubo de Euler-Bernoulli [24], além de ter sido empregado no estudo de tubos feitos de materiais com gradação funcional [12].

Análises considerando outros tipos de escoamento também ganharam aporte científico, podendo ser encontradas revisões da literatura envolvendo a vibração induzida por escoamento em sistemas de tubos, dando ênfase ao caso de fluido bifásico [26]. Vibrações induzidas por vortex (VIV) também possuem papel relevante dentro deste tema e possuem extensas revisões publicadas [36].

Diferentes metodologias foram adotadas ao longo dos anos para solucionar analiticamente esse tipo de problema físico. O método de transformação diferencial (DTM) foi utilizado para obter a frequência natural e as velocidades críticas do fluido em tubos apresentando diferentes condições de contorno como mostra a figura 2.5 [25]. Similarmente, o comportamento dinâmico e a estabilidade de tubos *multi-span* foi formulada pelo método de interação variacional (MIV), obtendo as frequências naturais para diferentes velocidades do escoamento, além de analisar a influência da localização dos suportes na estabilidade e na velocidade crítica desses sistemas[14].

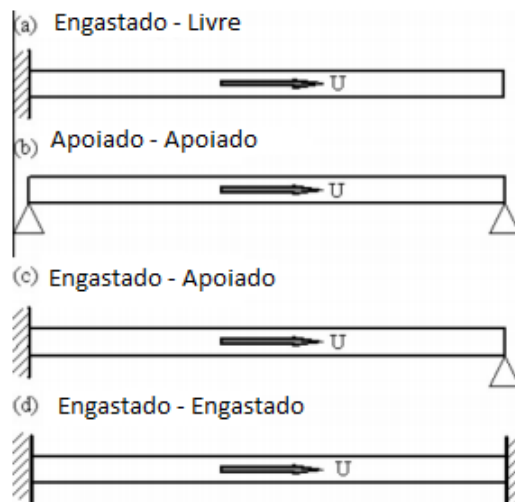


Figura 2.5: Diferentes condições de contorno para tubos transportando fluido com velocidade U [26].

A técnica de transformada integral generalizada (GITT) foi empregada na análise do comportamento dinâmico de um tubo transportando fluido bifásico, obtendo-se assim uma faixa de estabilidade do sistema [1]. A mesma técnica foi utilizada para estudar o comportamento dinâmico do movimento *in-plane* e *out-of-plane* de tubos curvos contendo fluido, mostrando que as frequências naturais e as respostas de

vibração são compatíveis com os resultados disponíveis na literatura que fazem uso de outras metodologias [23].

2.5 FSI em Engenharia Nuclear

Tubos são essenciais dentro da engenharia nuclear já que estão presentes em diversos equipamentos que constituem a planta (fig. 2.6). Esses cilindros são responsáveis principalmente pelo transporte de fluidos e dessa forma estão sujeitos a escoamentos axiais e transversais, sendo eles internos ou externos.

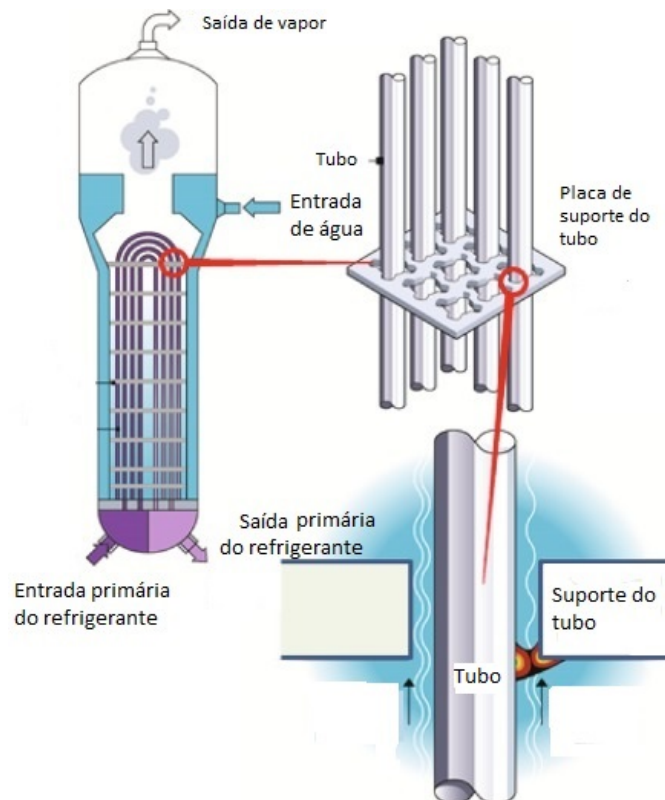


Figura 2.6: Gerador de vapor, equipamento presente em centrais nucleares [32].

A relevância do estudo de vibrações induzidas por escoamento em reatores nucleares é resultado da tendência de estruturas cada vez mais flexíveis e do aumento da velocidade de escoamento de acordo com a evolução dos reatores, Blevins [6] reporta três casos importantes com a presença desse fenômeno em reatores. O primeiro em 1973, na usina nuclear de Wylfa, localizada na Inglaterra, onde houve vazamento nos tubos da caldeira, fazendo com que a água vazasse para o refrigerante do reator, sendo o motivo desse vazamento a corrosão causada pela vibração induzida pela alta vazão de CO_2 em alguns tubos economizadores (trocador de calor). O segundo caso foi o do reator Mark 111 TRIGA, localizado na Coréia do Sul, que ao começar a operar com combustível de alta potência atingiu níveis de vibrações que eram audíveis

e perceptíveis ao toque. Por último, Fermi, um reator refrigerado a sódio, localizado nos Estados Unidos, que apresentou vibração induzida pelo escoamento de sódio na guia de fluxo cônico, fazendo com que um segmento se desprendesse da guia e fosse arrastado para a entrada do núcleo do reator, causando interrupção do escoamento em dois elementos combustíveis que superaqueceram e chegaram a derreter.

Vibrações excessivas ainda afetam o pleno funcionamento de equipamentos da indústria nuclear e são motivos de revisões bibliográficas e implementações constantes [29]. Métodos de otimização não-lineares foram utilizados para prever a vibração induzida pelo escoamento e as respostas estruturais do sistema [31]. Os efeitos de massa concentrada em rotação nas vibrações livres e na instabilidade de tubos transportando fluidos também foram analisados, chegando-se a conclusão de que a inércia rotativa pode influenciar as frequências naturais mais altas [18].

O comportamento de tubos biengastados com escoamento de um fluido em seu interior, foi investigado a partir de soluções analítico-numéricas empregando a GITT na análise de vibrações transversais, considerando fluido monofásico e bifásico, ambos apresentando resultados com exatidão, indicando a eficiência do uso da técnica [17][2].

A interação fluido-estrutura foi analisada em tubos de Timoshenko sob influência de excitações aleatórias [38]. Para o mesmo tipo de interação, as frequências naturais de um tubo de Euler-Bernoulli foram investigadas pelo método de elemento de Galerkin, aplicando diferentes condições de contorno [37]. Zhang, fez análises modais considerando a FSI para três metodologias de acoplamento diferentes, indicando que resultados bidirecionais são mais aceitáveis [39].

As barras de combustíveis e o refrigerante representam bem essa interação, e previsões numéricas foram feitas para diferentes aspectos da FSI mostrando resultados com boa exatidão quando comparados com os já existentes na literatura [33]. A tabela 2.4 ilustra alguns componentes de reatores americanos que sofreram FIV; Outros componentes de reatores PWR e LMFBR foram estudados considerando a vibração induzida por escoamento cobrindo diferentes situações, além de serem discutidos efeitos de massa e amortecimento [10].

Tabela 2.4: Reatores americanos que apresentaram VIF [10].

Ano	Reator	Componente
1962	LMFBR	Tubos do gerador de vapor
1968-72	PWR	Blindagem térmica
1971-75	PWR	Vareta combustível
1980-82	PWR	Pastilhas combustível
1981-84	PWR	Tubos do gerador de vapor

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo são apresentadas as formulações matemáticas necessárias para a análise da resposta dinâmica de um tubo biengastado transportando fluido monofásico, assim como a metodologia empregada para a solução das equações.

Inicialmente é apresentado a descrição do problema físico; Em seguida, são formuladas as equações que governam a interação fluido-estrutura e por fim, é apresentado o método utilizado para a solução do problema.

3.1 O problema Físico

O presente trabalho estuda a resposta dinâmica de um tubo biengastado contendo um fluido monofásico e incompressível, modelado a partir da teoria das vigas de Euler-Bernoulli. A figura 3.1 apresenta a geometria do modelo físico, onde em um tubo de comprimento L , área transversal A , massa por unidade de comprimento m , rigidez à flexão EI , escoia axialmente um fluido de massa por unidade de comprimento M e velocidade U .

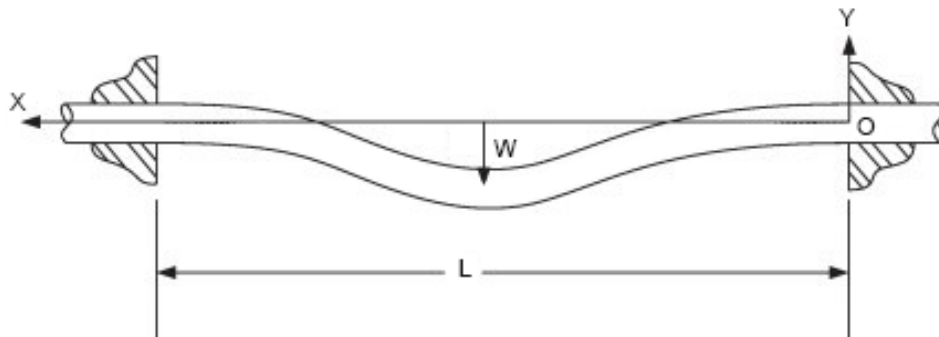


Figura 3.1: Tubo biengastado contendo um fluido em escoamento [17].

3.2 Equações Governantes

A interação fluido-estrutura é representada por um conjunto de equações governantes que acoplam a fluidodinâmica e a mecânica estrutural, onde a equação do movimento de um tubo contendo um fluido em escoamento pode ser derivada seguindo a derivação Newtoniana, decompondo um elemento infinitesimal do fluido e do tubo, assim obtendo a equação diferencial do movimento que representa a resposta dinâmica do problema físico proposto.

Considerando um tubo delgado, com as características mencionadas no problema físico, apresentando pequenos deslocamentos laterais $w(x, t)$ e contendo fluido escoando, cujo elemento δs está sujeito a: (i) forças de pressão p e (ii) forças exercidas pelo tubo, sendo elas normais e tangenciais, $F\delta x$, e cisalhantes, $qS\delta s$. Forças gravitacionais, externas, efeitos dissipativos e amortecimento não foram considerados. Dessa forma, aplicando a segunda lei de Newton no elemento infinitesimal do fluido nas direções de x e z , e assumindo $s \simeq x$, obtemos [27],

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - qS + F \frac{\partial w}{\partial x} = M a_{fx}, \quad (3.1)$$

$$-F - A \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - qS \frac{\partial w}{\partial x} = M a_{fz}, \quad (3.2)$$

onde a_{fx} e a_{fz} são acelerações do fluido nas respectivas direções.

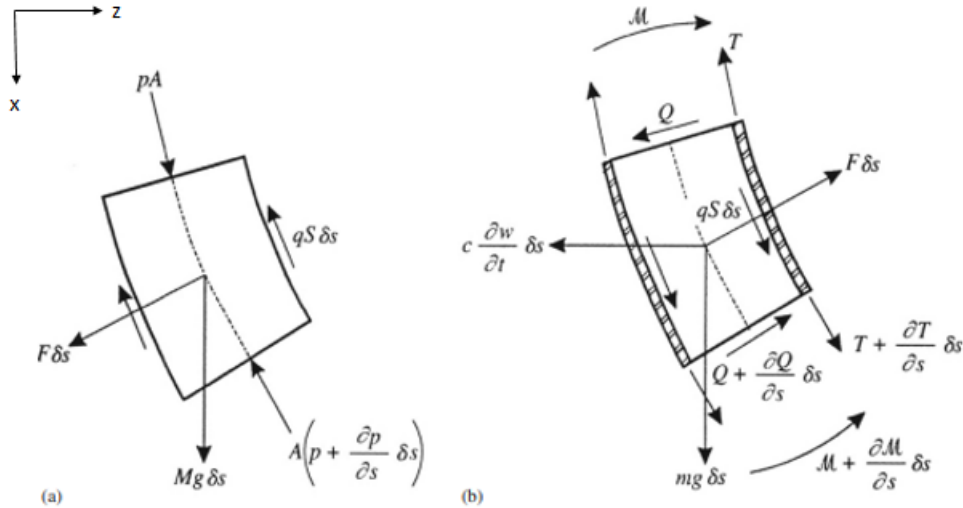


Figura 3.2: Diagrama dos elementos infinitesimais (a) do fluido e (b) do tubo [27].

Similarmente para o elemento do tubo, figura 3.2(b), obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial x} + qS - F \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + F + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + qS \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad (3.5)$$

onde T é a tensão longitudinal, Q é a tensão de cisalhamento transversal no tubo e M é o momento fletor. Os termos de segunda ordem, as deformações por cisalhamento transversal e a inércia rotativa foram negligenciados de acordo com a teoria das vigas de Euler-Bernoulli [27].

Para obter a aceleração, o fluxo de fluido foi aproximado como um fluxo infinito com todos seus pontos apresentando velocidade U em relação ao tubo. Dessa forma, a velocidade do tubo é apresentada em termos do vetor unitário [27],

$$V_p = \frac{\partial r}{\partial t} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (3.6)$$

onde r é a distância de um ponto medido a partir da origem, como mostrado na figura 3.3 . A seguir, a velocidade no centro do elemento fluido V_f é denotada como

$$V_f = V_p + U\tau, \quad (3.7)$$

onde, τ é o vetor tangencial ao centro do tubo,

$$\tau = \frac{\partial x}{\partial s}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial s}\mathbf{k}. \quad (3.8)$$

Substituindo as eqs. 3.6 e 3.8 na eq. 3.7 obtemos

$$V_f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right) (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \equiv \frac{D\mathbf{r}}{Dt}, \quad (3.9)$$

onde D/Dt é a derivada material. De acordo com as coordenadas de Euler e Lagrange, comumente utilizadas na mecânica dos fluidos, temos que $w = z$, para tubos inextensíveis $\frac{\partial x}{\partial s} \simeq 1$ (fig. 3.3(b)) e $\frac{\partial z}{\partial t} \sim O(\epsilon^2) \simeq 0$. Obtendo assim,

$$V_f = U\mathbf{i} + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + U \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \mathbf{k}. \quad (3.10)$$

Conseqüentemente, temos a aceleração do tubo e do fluido a_f ,

$$a_f = \frac{D^2\mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{dU}{dt}\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w\mathbf{k}, \quad (3.11)$$

onde,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{dU}{dt} \frac{\partial w}{\partial s}. \quad (3.12)$$

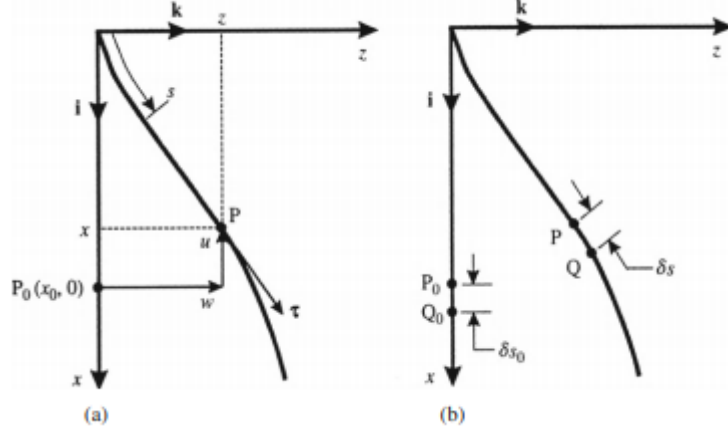


Figura 3.3: Sistemas de coordenadas de Euler e Lagrange, respectivamente [27].

Agora, considerando um elemento do tubo δs contendo fluido de volume δV , a taxa de mudança do momento sobre esse elemento δx é escrita como [27],

$$\frac{dM}{dt} = \int \int \int_{\delta V} \left[\frac{\partial V_f}{\partial t} + (V_f \cdot \nabla) V_f \right] \rho dV. \quad (3.13)$$

Obtivemos V_f como visto em eq. 3.10. Adaptando, temos

$$\frac{\partial V_f}{\partial t} = \frac{dU}{dt} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \frac{dU}{dt} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \mathbf{k}, \quad (3.14)$$

$$(V_f \cdot \nabla) V_f \cong U \frac{\partial}{\partial s} \left[U \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial s} \right) \mathbf{k} \right] \cong \left(U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \mathbf{k}. \quad (3.15)$$

Então a eq. 3.13 se torna,

$$\frac{dM}{dt} = M \frac{dU}{dt} \delta s \mathbf{i} + M \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w \delta s \mathbf{k}. \quad (3.16)$$

Utilizando as eqs. 3.11 e 3.16 e assumindo $s \simeq x$, uma vez que o deslocamento lateral é maior que o longitudinal, assim obtemos

$$a_{fx} = \frac{dU}{dt}, \quad a_{fz} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w. \quad (3.17)$$

A partir das eqs. 3.2, 3.4, 3.5 e 3.17, chegamos em

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (pA - T) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial (pA - T)}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial x} \\ + M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{dU}{dt} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Somando as eqs. 3.1 e 3.3 e utilizando 3.17, temos

$$\frac{\partial}{\partial x} (pA - T) + M \frac{dU}{dt} = 0. \quad (3.19)$$

Integrando eq. 3.19 de x a L e substituindo em eq. 3.18, obtemos a equação que formula pequenos deslocamentos laterais,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[MU^2 + M \frac{dU}{dt} (L - x) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.20)$$

3.2.1 Condições de Contorno e Iniciais

Com ambas as extremidades fixas, o deslocamento transversal e a inclinação são zero, de tal forma que as condições de contorno são dadas abaixo:

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0. \quad (3.21)$$

Excitações podem acontecer na forma de deslocamento ou velocidade iniciais, podendo ter como origem, dentre outros, a ação do meio ambiente ou maquinária. Neste texto foi adotada uma velocidade senoidal, usualmente utilizado em sistemas físico similares ao tratado neste trabalho [2]. Dessa forma, as condições iniciais são apresentadas abaixo,

$$w(x, 0) = 0, \quad \frac{dw(x, 0)}{dt} = \nu_0 \sin(\pi x). \quad (3.22)$$

3.2.2 Forma Adimensional

A equação adimensional do movimento é obtida a partir dos seguintes termos [27]:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad u = UL\sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad t^* = \sqrt{\frac{EI}{M+m}} \frac{t}{L^2}, \quad \beta = \frac{M}{M+m}. \quad (3.23)$$

Substituindo a eq. 3.23 em eq. 3.20, obtemos

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.24)$$

Fazendo o mesmo para a eq. 3.25,

$$w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0. \quad (3.25)$$

3.3 A GITT

A técnica de transformada integral generalizada (GITT) é uma metodologia analítica-numérica que transforma equações diferenciais parciais (EDPs) em equações diferenciais ordinárias (EDOs), trazendo as vantagens de uma solução híbrida para problemas envolvendo escoamento de fluido e condução de calor.

Essa abordagem apresenta como fundamento a criação de um par de equações que representam a transformação e inversão do problema original, utilizando a expansão em série obtida a partir de um problema de Sturm-Liouville associado.

Os passos básicos para obtenção de uma solução a partir da GITT são: [11]

1. Determinação do problema de autovalor adequado;
2. Resolver o problema de autovalor;
3. Obter o par de transformada;
4. Aplicar a transformada na equação governante;
5. Obter os coeficientes truncados em um número suficientemente grande;
6. Resolver o sistema transformado;
7. Fazer uso da formula de inversão para obter a reconstrução da solução híbrida.

3.3.1 O Problema de Sturm-Liouville

O comportamento dinâmico do problema físico apresentado neste texto pode ser modelado na forma de um problema de quarta ordem de Sturm-Liouville, que é um problema de autovalor unidimensional regido de forma geral pela seguinte equação [30].

$$(A(x)X_i'')'' + (B(x)X_i')' + E(x)X_i = \mu_i^4 p(x)X_i, \quad 0 < x < L. \quad (3.26)$$

onde $A(x)$, $B(x)$ e $E(x)$ são funções definidas no intervalo $0 < x < L$. Para cada valor de λ para os quais o problema admite solução não-trivial, ele é chamado de autovalor, e cada função associada ao autovalor são chamadas autofunções.

O problema apresenta as seguintes condições de contorno:

$$A(x)X_i'' - k_{RL}X_i' = 0 \quad \text{ou} \quad (A(x)X_i'')' + k_{TL}X_i = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, \quad (3.27)$$

$$A(x)X_i'' + k_{RR}X_i' = 0 \quad \text{ou} \quad (A(x)X_i'')' - k_{TR}X_i = 0 \quad \text{para} \quad x = L, \quad (3.28)$$

onde, k_R e k_T são coeficientes de rigidez à rotação e translação, respectivamente.

Principais propriedades do formalismo de Sturm-Liouville:

- Se um problema de Sturm-Liouville possui autovalores distintos, então suas autofunções são ortogonais;
- Os autovalores, λ_n , formam uma sequência crescente e infinita;
- Autovalores são reais para casos regulares ou periódicos;
- Seja λ um autovalor do problema, então o subespaço abrangido pelas autofunções associadas admitem uma base ortogonal de funções;
- A ortogonalidade das autofunções permite que elas sejam usadas em combinação linear.

3.3.2 Determinação do Problema de Autovalor

Neste passo utilizaremos a eq. 2.5 que representa o movimento de deslocamento lateral de um tubo, para a determinação do problema de autovalor. Podendo ser reescrita na forma indicada na eq. 3.29, equação que caracteriza o problema de autovalor do tipo Sturm-Liouville,

$$\frac{d^4 W_i(x)}{dx^4} - \mu^4 W_i(x) = 0 \quad 0 < x < 1, \quad (3.29)$$

onde $W_i(x)$ é a autofunção do problema e μ é o autovalor correspondente. Lembrando que

$$\mu^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}, \quad (3.30)$$

onde ρ , A , EI e ω são: a massa por unidade de volume, área transversal, rigidez flexural e frequência natural, respectivamente.

Pelo formalismo de Sturm-Liouville, sabemos que as autofunções da eq. 3.29 são consideradas ortogonais em relação ao peso $p(x)$,

$$\int_0^1 p(x) W(x)_i W(x)_j dx = \delta_{ij} N_i, \quad (3.31)$$

com $\delta_{ij} N_i = 0$ para $i \neq j$ e $\delta_{ij} N_i = 1$ para $i = j$.

3.3.3 Resolução do Problema de Autovalor

Uma vez com o problema de autovalor definido, as autofunções da eq. 3.29 assumem a seguinte forma [15],

$$W_i(x) = \cos(\mu_i x) + A_i \sin(\mu_i x) + B_i e^{-\mu_i x} + C_i e^{-\mu_i(1-x)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

onde os coeficientes A_i , B_i e C_i são determinados a partir de combinações das condições de contorno a seguir,

$$W_i(0) = 0, \quad W_i'(0) = 0, \quad W_i(L) = 0, \quad W_i'(L) = 0. \quad (3.33)$$

Obtendo,

$$W_i(x) = (-1)^i \cos(\mu_i x) - \sin(\mu_i x) \cot\left(\frac{\mu_i}{2}\right)^{(-1)^i} - \frac{(-1)^i e^{-\mu_i x}}{1 - (-1)^i e^{-\mu_i}} + \frac{e^{-\mu_i(1-x)}}{1 - (-1)^i e^{-\mu_i}}. \quad (3.34)$$

Substituindo os coeficientes na eq. 3.32 e aplicando as condições de contorno, obtemos o autovalor, μ , a partir da seguinte equação transcendental [15],

$$(-1)^i \tan\left(\frac{\mu_i}{2}\right) = \frac{1 - e^{-\mu_i}}{1 + e^{-\mu_i}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

A equação característica 3.35 é resolvida usando-se o comando **FindRoot** no *software* comercial *Mathematica*.

3.3.4 Par da Transformada Integral

Dessa forma, o problema de autovalor eq. 3.29 assume o seguinte par de transformada-inversa [17],

$$\begin{cases} \bar{w}_i(t) = \int_0^1 \tilde{W}_i(x)w(x,t)dx, & \text{transformada} \\ w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{W}_i(x)\bar{w}_i(t) & \text{inversa} \end{cases} \quad (3.36a,b)$$

onde $\tilde{W}_i(x)$ é a norma da autofunção, sendo

$$\tilde{W}_i(x) = \frac{W_i(x)}{N_i^{1/2}}. \quad (3.37)$$

3.3.5 Transformada Integral da Equação Governante

Neste passo, cada termo da equação governante é multiplicado pela transformada e integrado no intervalo $[0,1]$. Sabendo que

$$\int_0^1 w'''' \tilde{X}_i(x)dx = \left[w'''' \tilde{X}_i \right]_0^1 - \left[w'''' \tilde{X}'_i \right]_0^1 + \left[w'''' \tilde{X}''_i \right]_0^1 - \left[w'''' \tilde{X}'''_i \right]_0^1 + \int_0^1 w'''' \tilde{X}_i'''' dx.$$

Para condições de contorno homogêneas, tem-se:

$$\int_0^1 w'''' \tilde{X}_i dx = \int_0^1 w'''' \tilde{X}_i'''' dx = \mu_i^4 \int_0^1 w'''' \tilde{X}_i dx = \mu_i^4 \bar{w}_i,$$

$$\int_0^1 w'' \tilde{X}_i dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{X}_j'' \bar{w}_j \right) \tilde{X}_i dx = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' dx \right) \bar{w}_j = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \bar{w}_j,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tilde{X}_i dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 w(x,t) \tilde{X}_i dx = \frac{d^2 \bar{w}_i}{dt^2},$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \tilde{X}_i dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{X}_j' \frac{d\bar{w}_j}{dt} \right) \tilde{X}_i dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j' dx \frac{d\bar{w}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\bar{w}_j}{dt},$$

Obtem-se a equação governante em sua forma transformada,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{w}_i(t)}{dt^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(2u_k \beta_k^{1/2} A_{ij} \right) \frac{d\bar{w}_j(t)}{dt} \\ + \sum_{j=1}^{\infty} (u_k^2 B_{ij}) \bar{w}_j(t) + \mu_j^4 \bar{w}(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Fazendo a mesma transformação para as condições iniciais, obtemos:

$$\bar{w}_i(0) = 0, \quad \frac{d\bar{w}_i(0)}{dt} = v_0 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \sin(\pi x) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.39)$$

3.3.6 Determinação dos Coeficientes

Os coeficientes são determinados a partir das seguintes equações [7]:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j'(x) dx, \\ B_{ij} &= \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j''(x) dx, \\ C_{ij} &= \int_0^1 \tilde{X}_i(x) (x-1) \tilde{X}_j''(x) dx. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Em seguida, a expansão para o deslocamento transversal é truncada em ordem finita de NW e as séries truncadas podem ser escritas da seguinte forma vetorial:

$$\frac{d^2 \mathbf{w}(t)}{dt^2} + \mathbf{D} \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} + \mathbf{E} \mathbf{w}(t) = 0, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{w}(0) = 0, \quad \mathbf{w}'(0) = \mathbf{f}_0, \quad (3.42)$$

$$D_{ij} = 2 \sum_k u_k \beta_k^{1/2} A_{ij}, \quad (3.43)$$

$$E_{ij} = \mu_j^4 + \sum_k u_k^2 B_{ij}.$$

O sistema é resolvido a partir do uso do *NDSolve* no *Wolfram Mathematica*. Uma

vez com $\bar{w}_i(t)$ obtido, faz-se uso da transformada de inversão para construção da expressão analítica de $w(x, t)$.

Para obtenção das frequências naturais da vibração transversal do sistema, \bar{w} assume a seguinte forma exponencial,

$$\bar{w}_i(t) = W_i e^{i\omega t}. \quad (3.44)$$

Fazendo com que a eq. 3.38 se torne,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[(\mu_j^4 - \omega^2) \delta_{ij} - \sum_k u_k^2 B_{ij} + 2 \sum_k u_k \beta_k^{1/2} A_{ij} i\omega \right] W_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

A fim de implementar um comando para a solução da eq. 3.46, define-se um problema quadrático de autovalor (QEP) escrito em sua forma matricial, como visto a seguir [34],

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{E}) \mathbf{W} = 0, \quad (3.46)$$

onde \mathbf{I} é a matriz unitária e \mathbf{W} o vetor dos componentes W_j . Uma forma comum de solução desta equação é a linearização do problema de autovalor, onde escreve-se o problema na forma generalizada,

$$Ax = \lambda Bx, \quad (3.47)$$

e utiliza-se o método QZ nas matrizes companheiras de Frobenius para obtenção das raízes do problema de autovalor polinomial. O comando **PolynomialEigenvalues** em *Mathematica* usado para resolver o problema quadrático de autovalor é apresentado no Apêndice A.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para análise linear de um tubo biengastado apresentado no problema físico, seção 3.1, sendo dividida em três seções, onde inicialmente são apresentados os autovalores obtidos, seguido de uma análise de convergência e por fim, uma análise de estabilidade.

4.1 Autovalores

O problema de autovalor que rege o problema físico proposto foi apresentado na subseção 3.3.2, juntamente com a equação transcendental, utilizada para obtenção dos autovalores. Na tabela 4.1(a) são apresentados os autovalores, μ_i , obtidos utilizando a GITT, para o maior número de truncamento $NW = 24$. A tabela 4.1(b) ilustra os valores disponíveis na literatura.

Tabela 4.1: Autovalores. (a) obtidos através da GITT e (b) Blevins [8].

(a)				(b)	
μ_1	4,73004074	μ_{13}	42,41150082	μ_1	4,73004074
μ_2	7,85320462	μ_{14}	45,55309348	μ_2	7,85320462
μ_3	10,99566079	μ_{15}	48,69468613	μ_3	10,99566079
μ_4	14,1371655	μ_{16}	51,83627878	μ_4	14,1371655
μ_5	17,2787597	μ_{17}	54,97787144	μ_5	17,2787597
μ_6	20,42035225	μ_{18}	58,11946409		
μ_7	23,5619449	μ_{19}	61,26105675		
μ_8	26,70353756	μ_{20}	64,4026494		
μ_9	29,84513021	μ_{21}	67,54424205		
μ_{10}	32,98672286	μ_{22}	70,68583471		
μ_{11}	36,12831552	μ_{23}	73,82742736		
μ_{12}	39,26990817	μ_{24}	76,96902001		
					$(2i + 1)\frac{\pi}{2}$, para $i > 5$

4.2 Comportamento da Convergência

A análise do comportamento de convergência da solução de transformada integral foi realizada empregando a GITT para diferentes ordens de truncamento, $NW= 4, 8, 12, 16, 20$ e 24 , analisando os aspectos de deslocamento e história no tempo.

A convergência do deslocamento transversal adimensional $w(x, t)$ foi analisada em diferentes posições $x= 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ e $0,9$, do tubo contendo um fluido, e foi examinada a partir do aumento dos termos de truncamento NW nos tempos adimensionais $t= 5, 25$ e 50 . Os valores para o deslocamento transversal considerando a razão de massa $\beta = 1,0$ e velocidade adimensional $u = 4,5$ são apresentados na tabela 4.2. Podendo ser observado que uma convergência satisfatória é atingida em sua maioria para uma ordem $NW \leq 8$; E para total convergência, apresentando três números significativos, se faz necessário uma ordem de truncamento $NW \leq 12$.

Tabela 4.2: Comportamento da convergência do deslocamento transversal $w(x, t)$ de um tubo contendo fluido monofásico.

x	$NW = 4$	$NW = 8$	$NW = 12$	$NW = 16$	$NW = 20$	$NW = 24$
$t = 5$						
0,1	-0,000475	-0,000542	-0,000525	-0,000524	-0,000523	-0,000524
0,3	-0,003296	-0,003418	-0,003420	-0,003420	-0,003420	-0,003420
0,5	-0,006097	-0,006135	-0,006136	-0,006136	-0,006136	-0,005069
0,7	-0,004937	-0,005055	-0,005067	-0,005070	-0,006136	-0,006136
0,9	-0,000884	-0,000887	-0,000866	-0,000869	-0,000869	-0,000869
$t = 25$						
0,1	-0,000843	-0,000857	-0,000823	-0,000829	-0,000830	-0,000830
0,3	-0,004443	-0,004867	-0,004878	-0,004879	-0,004880	-0,004880
0,5	-0,006260	-0,006156	-0,006144	-0,006142	-0,006142	-0,006142
0,7	-0,004432	-0,003763	-0,003714	-0,003708	-0,003705	-0,003705
0,9	-0,000767	-0,000579	-0,000602	-0,000608	-0,000608	-0,000608
$t = 50$						
0,1	-0,000236	0,000611	0,000690	0,000699	0,000703	0,000704
0,3	-0,001494	0,002453	0,002578	0,002589	0,002595	0,002597
0,5	-0,002016	0,001762	0,001882	0,001898	0,001901	0,001903
0,7	-0,001422	0,000470	0,000520	0,000537	0,000539	0,000540
0,9	-0,000312	0,000061	0,000087	0,000078	0,000077	0,000078

Adicionalmente, a figura 4.1 ilustra o perfil do deslocamento e em $t= 25$, para diferentes combinações de $u= 4,5$ e $1,5$, e $\beta=1,0$ e $0,5$. Sendo observado que para $NW \geq 8$ as linhas do gráfico ficam sobrepostas, indicando bons resultados de convergência, no qual o melhor resultado pode ser observado na figura 4.1(c), para o caso em que $u=1,5$ e $\beta=0,5$.

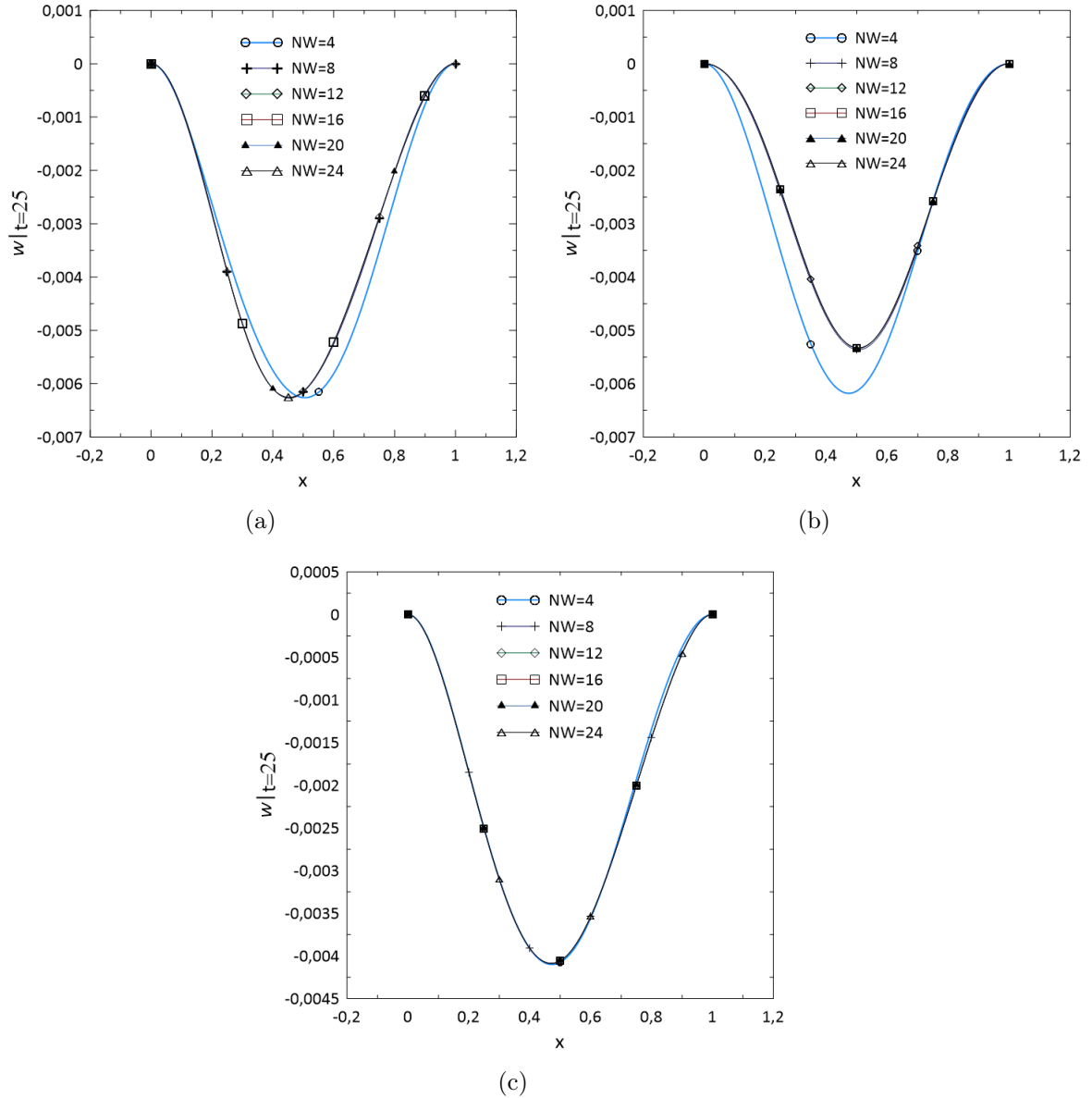


Figura 4.1: Análise de convergência da flexão transversal adimensional $w(x, t)$ para $t = 25$ com diferentes ordens de truncamentos NW para (a) $u = 4,5$ e $\beta = 1,0$, (b) $u = 4,5$ e $\beta = 0,5$ e (c) $u = 1,5$ e $\beta = 0,5$.

Similarmente, a evolução temporal do deslocamento transversal no ponto central do tubo é mostrado na figura 4.2 para o intervalo de tempo $t \in [45,50]$, também demonstrando convergência. Observando-se que o melhor caso é apresentado para as condições de $u = 4,5$ e $\beta = 0,5$, como ilustra a figura 4.2(b).

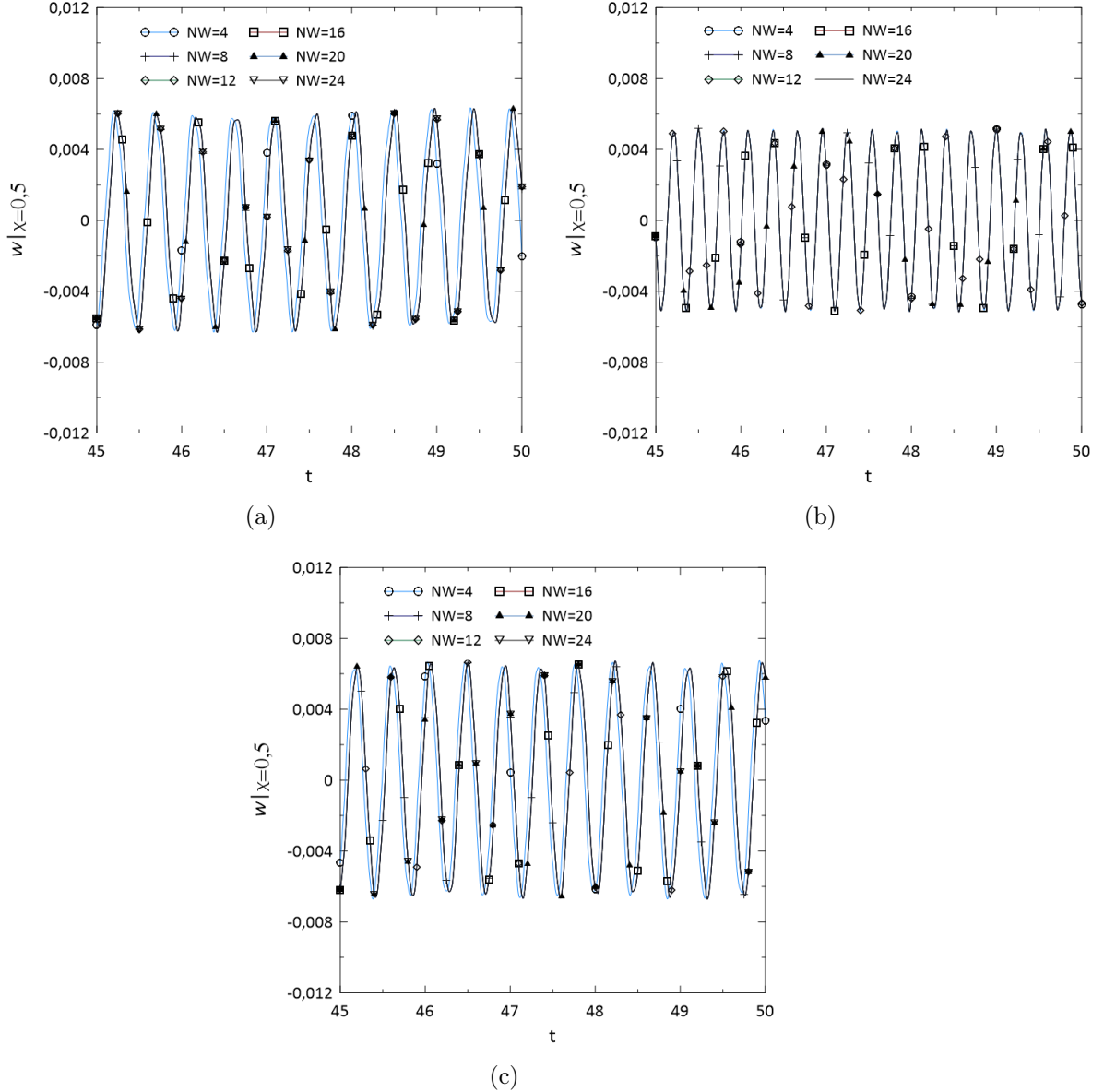


Figura 4.2: Análise da convergência da evolução temporal da flexão transversal no centro do tubo $w(0.5, t)$ com diferentes ordens de truncamentos NW para (a) $u = 4, 5$ e $\beta = 1, 0$, (b) $u = 4, 5$ e $\beta = 0, 5$ e (c) $u = 1, 5$ e $\beta = 0, 5$.

4.3 Verificação da Solução

A influência da velocidade do fluido nas primeiras cinco frequências adimensionais de um tubo biengastado transportando um fluido monofásico foi investigada, variando $u=0, 10, 20, 30, 40$ e 50 , considerando $\beta = 0, 1$, como mostrado na tabela 4.3 [3]. Os resultados mostram diminuição nos valores de w para $u \leq 10$ e um súbito aumento no segundo módulo quando $u = 20$. Para o valor seguinte de u os módulos voltam a aumentar e logo em seguida decrescem novamente. Para validar a solução, os valores de w_i para $u = 0$ foram comparados com valores da literatura e se

mostraram compatíveis.

Tabela 4.3: Influência da velocidade nas primeiras cinco frequências adimensionais ω_i para $\beta = 0, 1$.

u	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0	22,373 ¹	61,673 ¹	120,903 ¹	199,859 ¹	298,556 ¹
10	12,2412	12,2412	71,6038	153,457	252,852
20	6,42594	49,7643	49,7643	77,5743	77,5743
30	34,4104	34,4104	115,816	115,816	160,902
40	0	9,54581	91,8111	91,8111	191,478
50	$1,27747e^{-11}$	$7,44117e^{-11}$	60,8763	60,8763	196,722

¹ Frequência adimensional de vibração livre de uma viga biengastada [22].

A fim de mais uma vez validar os resultados obtidos através da GITT, os valores da frequência natural adimensional para os modos 1-3, considerando $\beta = 0, 1$, foram comparados com os já existentes na literatura mostrando eficiência e acurácia como ilustra a figura 4.3 [27].

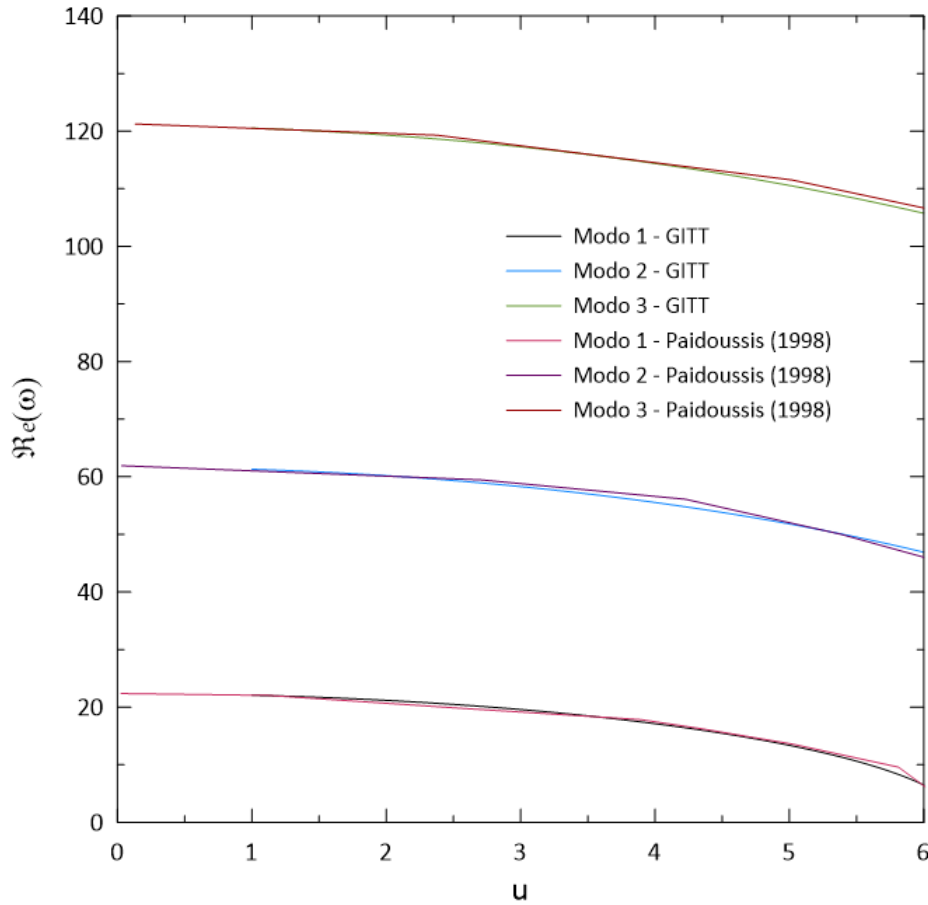


Figura 4.3: Frequência adimensional ω para os modos 1-3, versus a velocidade adimensional u , para $\beta = 0, 1$.

4.4 Análise de Estabilidade

Para este estudo a estabilidade foi analisada variando a velocidade adimensional, u , para obtenção das autofrequências. Considerando o tubo biengastado horizontalmente ($\gamma=0$), apresentado na seção 3.1, sem dissipações, para diferentes razões de massa $\beta=0,1, 0,5$ e $1,0$, o comportamento do primeiro modo da frequência adimensional referente ao deslocamento do tubo com o aumento da velocidade u é ilustrado na figura 4.4.

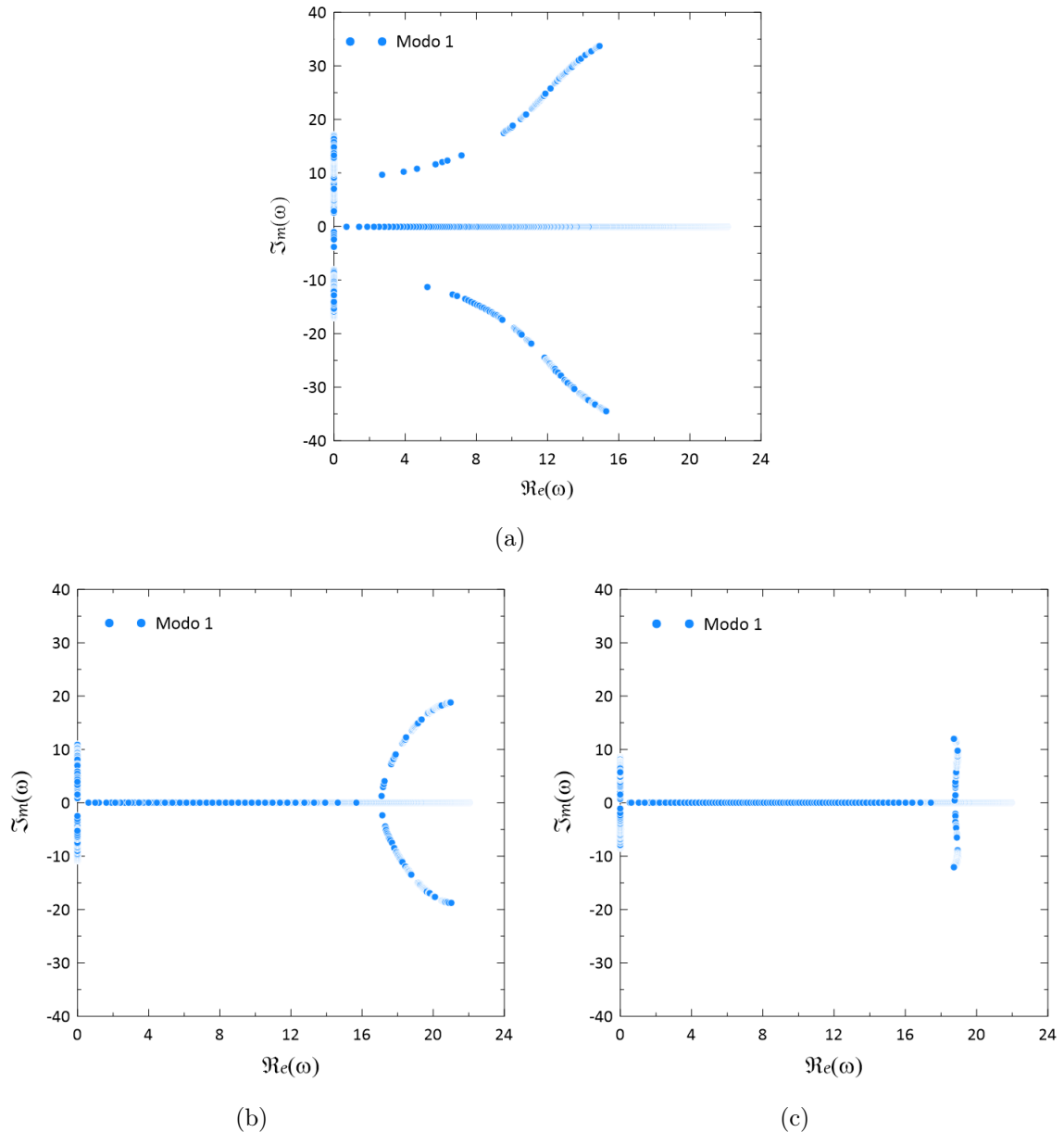


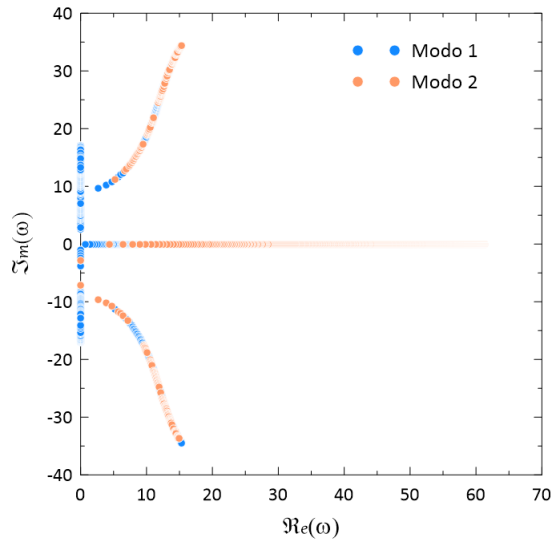
Figura 4.4: Diagrama do primeiro modo das frequências adimensionais complexas para (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.

De acordo com a figura 4.4(a), as autofrequências são puramente reais e com o aumento da velocidade os primeiros modos de frequência tendem a diminuir e

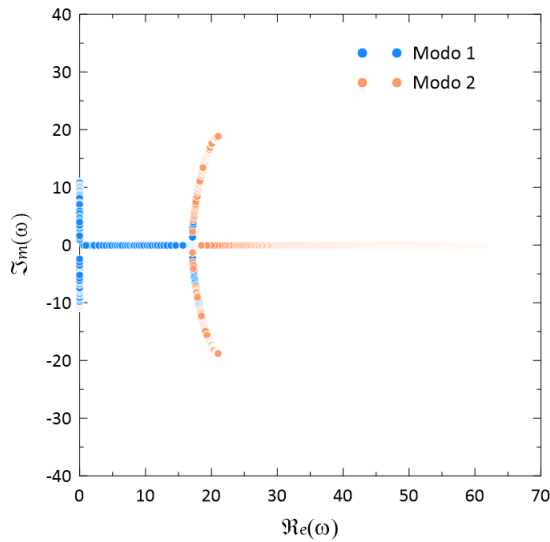
desaparecer quando $u = \pi$, denominada primeira velocidade crítica, u_c , do fluido. Porém, quando $u > u_c$ os primeiros modos se agrupam no eixo $\Im m$, tornado as autofrequências puramente imaginárias e em seguida, as autofrequências deixam o eixo simetricamente, significando perda de estabilidade do sistema [28].

As figuras 4.4(b) e 4.4(c) ilustram o mesmo caso anterior porém considerando $\beta = 0,5$ e $\beta = 1,0$, respectivamente. Notando-se que os primeiros modos continuam se agrupando em $\Im m$ e para velocidades mais altas começam a se agrupar no eixo $\Re e$, adotando comportamento simétrico logo em seguida [28].

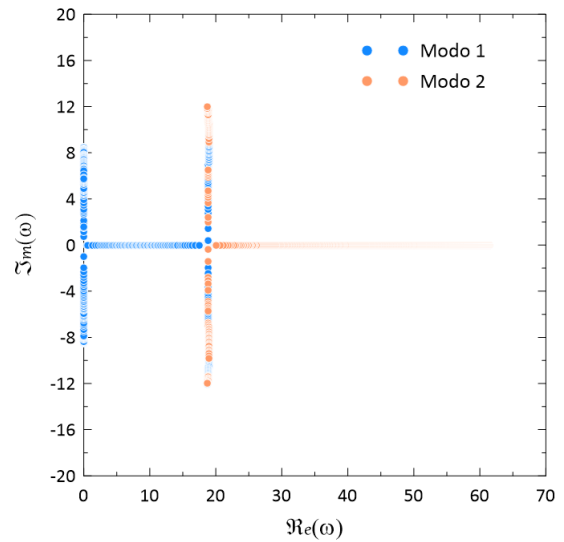
A mesma análise foi realizada para os modos 1-2 de frequência, e pode ser visto na figura 4.5(a) que o segundo modo segue o mesmo comportamento que o primeiro,



(a)



(b)



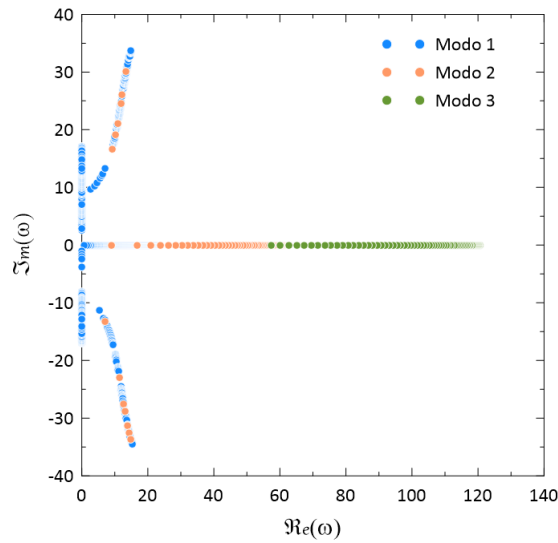
(c)

Figura 4.5: Diagrama do segundo modo das frequências adimensionais complexas para (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.

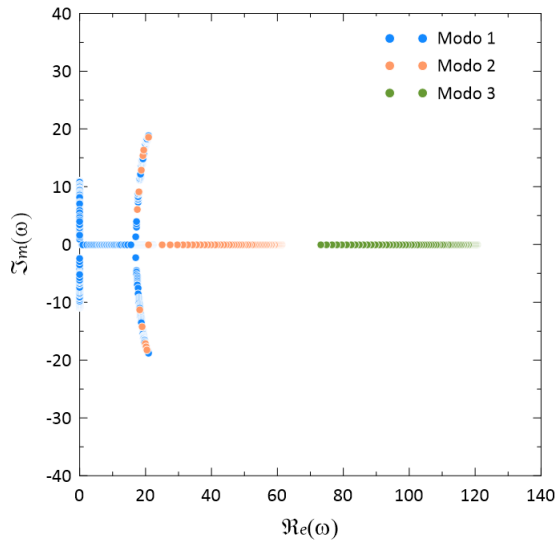
já mencionado na figura 4.4, porém a frequência do segundo modo desaparece quando $u = 2\pi$, denominada segunda velocidade crítica do sistema. No entanto, em $u > u_c$ os dois primeiros modos se fundem e indicam o início da vibração acoplada.

As figuras 4.5(b) e 4.5(c) ilustram o mesmo caso, porém considerando $\beta = 0,5$ e $\beta = 1,0$ respectivamente, adotando perfil simétrico após um ligeiro aumento das velocidades [28].

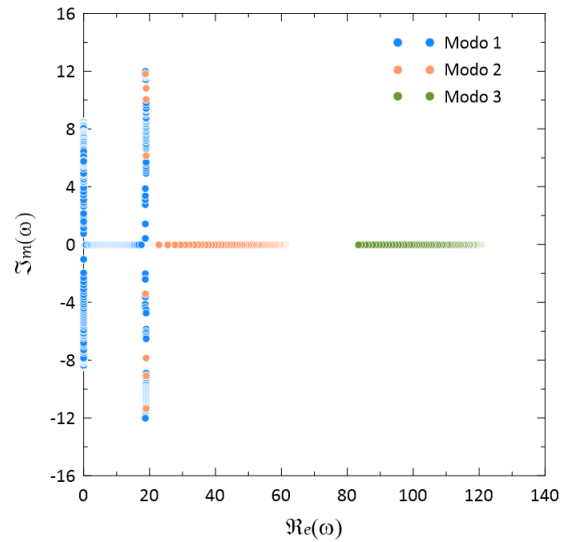
Os modos 1-3 são agora ilustrados na figura 4.6, no qual as autofrequências do sistema são puramente reais e decrescentes até $u = 2\pi$ e após isso os valores tornam-se puramente imaginários, caracterizando a perda de estabilidade do sistema por divergência através de uma bifurcação do tipo pitchfork [28].



(a)



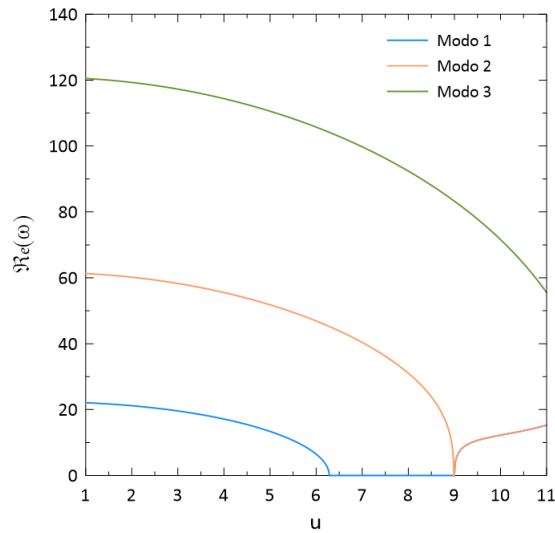
(b)



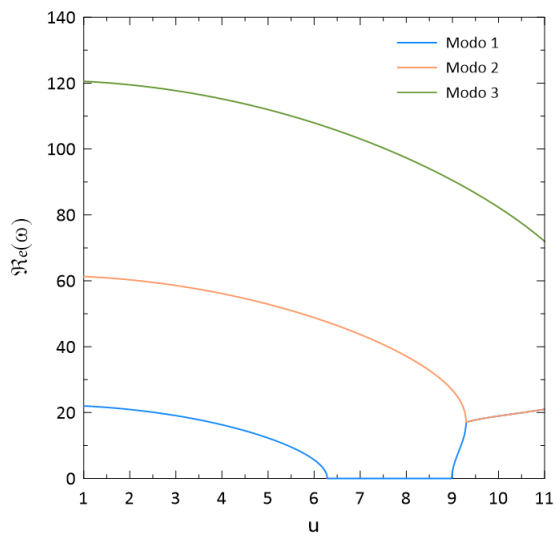
(c)

Figura 4.6: Diagrama do terceiro modo das frequências adimensionais complexas para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.

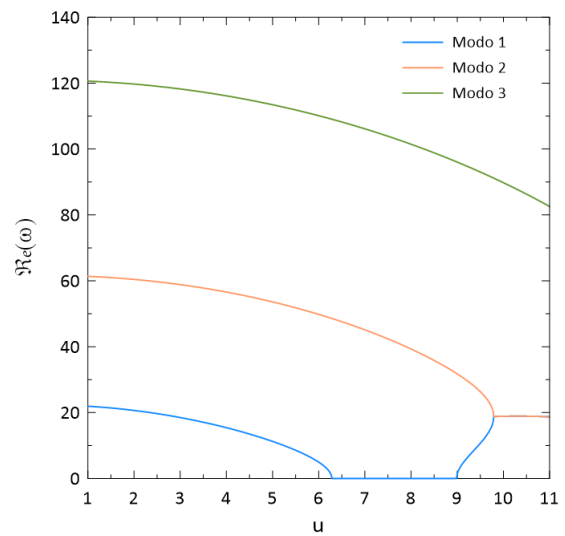
A figura 4.7 ilustra a parte real dos modos 1-3 das autofrequências adimensionais conforme a variação da velocidade, constatando-se que as autofrequências diminuem com o aumento de u e para certos valores, algumas frequências desaparecem e o sistema perde a estabilidade devido a divergência. Também é perceptível a independência da velocidade crítica em relação a β [27].



(a)



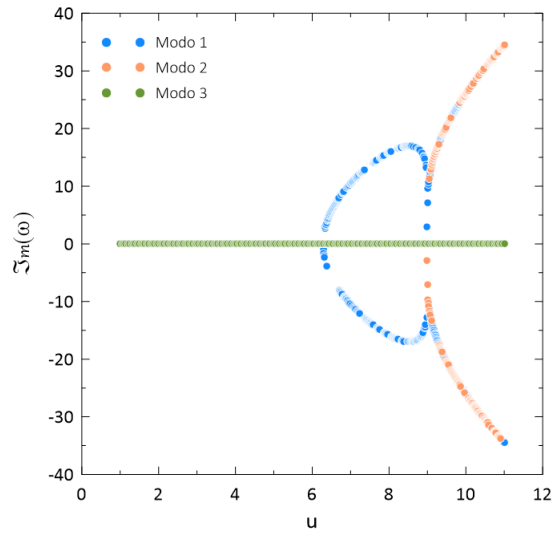
(b)



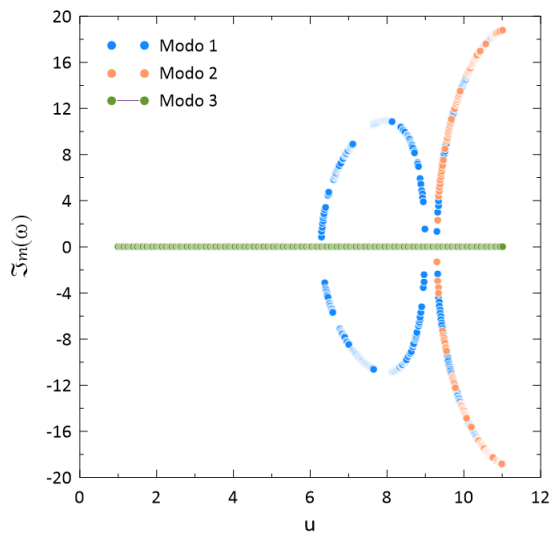
(c)

Figura 4.7: Componente real da frequência adimensional ω em função da velocidade adimensional u para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (c) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.

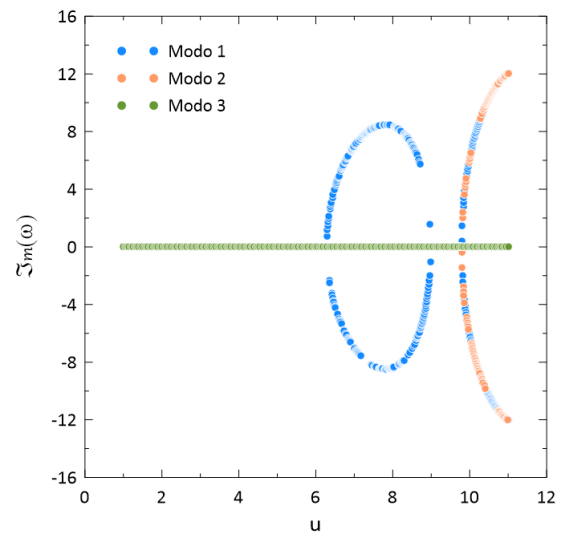
De acordo com as figuras 4.7 e 4.8 as autofrequências do sistema são puramente reais até $u_c = 2\pi$ e após esta velocidade os valores tornam-se puramente imaginários [27].



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: Componente imaginária da frequência adimensional ω em função da velocidade adimensional u para. (a) $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0$, (b) $\beta = 0,5$ e $\gamma = 0$ e (a) $\beta = 1,0$ e $\gamma = 0$.

Na tabela 4.4 são apresentados os resultados da influência de β nas primeiras cinco frequências adimensionais, notando-se uma diminuição dos valores associados a frequência fundamental, enquanto que para os modos 2-5 elas aumentam, sendo esses resultados esperados e compatíveis com os reportados na literatura [17].

Tabela 4.4: Influência de β nas cinco primeiras frequências so sistema para $u = 4, 5$.

β	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0,1	15,4688	53,8078	11,599	191,298	289,824
0,15	15,3352	53,9303	112,741	191,461	290,003
0,2	15,2052	54,0461	112,881	191,624	290,181
0,25	15,0786	54,1556	113,02	191,785	290,358
0,3	14,9552	54,259	113,156	191,945	290,535
0,35	14,835	54,3566	113,291	192,104	290,711
0,4	14,7177	54,4486	113,424	192,262	290,886
0,45	14,6033	54,5353	113,555	192,419	291,061
0,5	14,4916	54,6169	113,685	192,574	291,235
0,55	14,3826	54,6935	113,812	192,729	291,408
0,6	14,2761	54,7656	113,938	192,882	291,581
0,65	14,1719	54,8331	114,061	193,034	291,752
0,7	14,0702	54,8963	114,183	193,185	291,923
0,75	13,9706	54,9553	114,303	193,335	292,094
0,8	13,8732	55,0104	114,421	193,484	292,263
0,85	13,7779	55,0617	114,538	193,631	292,432
0,9	13,6846	55,1093	114,652	193,778	292,6
0,95	13,5932	55,1534	114,765	193,923	292,768
1,0	13,5037	55,1941	114,875	194,067	292,934

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas deste trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Conclusões

As seguintes conclusões foram obtidas da análise do comportamento dinâmico de um tubo de Euler-Bernoulli, com as duas extremidades engastadas, transportando fluido monofásico, empregando a técnica de transformada integral generalizada (GITT):

1. Os autovalores da vibração livre para um tubo biengastado apresentam excelente concordância com a literatura;
2. A pesquisa mostra que a solução converge para resultados com três algarismos significativos com ordem de truncamento $NW \leq 12$;
3. Mostra-se que a frequência fundamental w_1 diminui com o aumento da razão de massa, β , enquanto as frequências de modo 2-5 aumentam;
4. A verificação da solução também foi atestada e comparada com valores disponíveis na literatura, comprovando a eficiência do método;
5. A aplicação da técnica de transformada integral generalizada (GITT) para obtenção da solução híbrida da resposta dinâmica de um tubo contendo fluido monofásico mostrou ser uma boa abordagem para a solução do problema físico proposto, apresentando resultados acurados;
6. O critério de estabilidade estudado demonstra a influência da velocidade nos modos de frequência.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Para este trabalho, foi considerado um tubo de extremidades fixas, transportando fluido monofásico; Sabendo que por ser um sistema de grande abrangência no setor industrial, diversas configurações podem ser estudadas e aprimoradas, assim como, implementações de outras metodologias. Dessa forma, para a realização de trabalhos futuros são feitas as seguintes sugestões:

1. Outras formas de condições de contorno;
2. Análise considerando a teoria das vigas de Timoshenko;
3. Consideração de um tubo submetido a fluxo interno e externo;
4. Consideração de um tubo transportando escoamento bifásico.

Referências Bibliográficas

- [1] AN, C., SU, J., 2011, “Dynamic response of clamped axially moving beams: Integral transform solution”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, n. 2, pp. 249–259.
- [2] AN, C., SU, J., 2015, “Dynamic behavior of pipes conveying gas–liquid two-phase flow”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 292, pp. 204–212.
- [3] AN, C., SU, J., 2017, “Dynamic behavior of axially functionally graded pipes conveying fluid”, *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2017, pp. 11.
- [4] BAO-HUI, L., HANG-SHAN, G., YONG-SHOU, L., et al., 2013, “Transient response analysis of multi-span pipe conveying fluid”, *Journal of Vibration and Control*, v. 19, n. 14, pp. 2164–2176.
- [5] BEER, F. P., JOHNSTON, E. R., 1989, *Resistência dos materiais*. 3 ed. São Paulo, McGraw-Hill São Paulo.
- [6] BLEVINS, R., 1979, “Flow-induced vibration in nuclear reactors: a review”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 4, n. 1, pp. 25–49.
- [7] BLEVINS, R. D., PLUNKETT, R., 1980, “Formulas for natural frequency and mode shape”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, n. 2, pp. 461.
- [8] BLEVINS ROBERT, D., 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*. New York, Van Nostrand Reinhold Company.
- [9] BONATTO, A. M., ESTRELA, J. A., PILAR, R., 2007, “ANÁLISE DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO EM VIGAS BI-ENGASTADAS”, *V EPCC - Encontro Internacional de Produção Científica (23 a 26 de Outubro de 2007)*.
- [10] CHEN, S.-S., 1985, *Flow-induced vibration of circular cylindrical structures*. Relatório técnico, Argonne National Lab.(ANL), Argonne, IL (United States).

- [11] COTTA, R. M., 1998, *The integral transform method in thermal and fluids sciences and engineering*. Begell House Publishers.
- [12] DENG, J., LIU, Y., ZHANG, Z., et al., 2017, “Dynamic behaviors of multi-span viscoelastic functionally graded material pipe conveying fluid”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 231, n. 17, pp. 3181–3192.
- [13] DIMAROGONAS, A., 1996, *ibration for Engineers*. 2 ed. New Jersey, Prentice Hall.
- [14] EL-SAYED, T., EL-MONGY, H., 2019, “Free vibration and stability analysis of a multi-span pipe conveying fluid using exact and variational iteration methods combined with transfer matrix method”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 71, pp. 173–193.
- [15] GARTNER, J., OLGAC, N., 1982, “Improved numerical computation of uniform beam characteristic values and characteristic functions”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 84, n. 4, pp. 481–489.
- [16] GONÇALVES, J. E., 2020, *Investigação teórica da vibração gerada devido escoamento interno em tubos utilizando o método de elementos finitos*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- [17] GU, J., AN, C., DUAN, M., et al., 2013, “Integral transform solutions of dynamic response of a clamped–clamped pipe conveying fluid”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 254, pp. 237–245.
- [18] KANG, M.-G., 2000, “The influence of rotary inertia of concentrated masses on the natural vibrations of a clamped–supported pipe conveying fluid”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 196, n. 3, pp. 281–292.
- [19] KOTTAPALLI, S., 2016, “Numerical Prediction of Flow Induced Vibrations in Nuclear Reactors through Pressure Fluctuation Modeling”, v. 2017, pp. 57.
- [20] LANGUAGE, M. . W., 2012. “Computing polynomial eigenvalues in Mathematica”. Disponível em: <<https://mathematica.stackexchange.com/questions/9825/computing-polynomial-eigenvalues-in-mathematica>>.
- [21] LÁZARO, M., 2015, “Learning mechanical vibrations with Wolfram Mathematica”, *Modelling in Science Education and Learning*, v. 8, n. 2, pp. 93–108.

- [22] LEISSA, A. W., QATU, M. S., 2011, *Vibrations of continuous systems*. New York, McGraw-Hill Education.
- [23] LI, F., AN, C., DUAN, M., et al., 2019, “In-plane and out-of-plane dynamics of curved pipes conveying fluid by integral transform method”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 41, n. 12, pp. 1–16.
- [24] LI, Y., LI, Y., AKBAR, N., et al., 2020, “Analysis of Vibration of the Euler-Bernoulli Pipe Conveying Fluid by Dynamic Stiffness Method and Transfer Matrix”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, v. 8, n. 01, pp. 172.
- [25] MIWA, S., MORI, M., HIBIKI, T., 2011, “Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 217, pp. 7028–7038.
- [26] MIWA, S., MORI, M., HIBIKI, T., 2015, “Two-phase flow induced vibration in piping systems”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 78, pp. 270–284.
- [27] PAIDOUSSIS, M. P., 2007, *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. 464 ed. New York, Wiley Online Library.
- [28] PAIDOUSSIS, M. P., ISSID, N., 1974, “Dynamic stability of pipes conveying fluid”, *Journal of sound and vibration*, v. 33, n. 3, pp. 267–294.
- [29] PETTIGREW, M., TAYLOR, C., FISHER, N., et al., 1998, “Flow-induced vibration: recent findings and open questions”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 185, n. 2-3, pp. 249–276.
- [30] RAO, S. S., 2007, *Vibration of continuous systems*. 464 ed. New York, Wiley Online Library.
- [31] SINHA, J. K., RAO, A. R., SINHA, R., 2005, “Prediction of flow-induced excitation in a pipe conveying fluid”, *Nuclear engineering and design*, v. 235, n. 5, pp. 627–636.
- [32] SOLLIER, T., 2017, “Nuclear steam generator inspection and testing”. In: *Steam Generators for Nuclear Power Plants*, Elsevier, pp. 471–493.
- [33] TER HOFSTEDÉ, E., KOTTAPALLI, S., SHAMS, A., 2017, “Numerical prediction of flow induced vibrations in nuclear reactor applications”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 319, pp. 81–90.

- [34] TISSEUR, F., MEERBERGEN, K., 2001, “The quadratic eigenvalue problem”, *SIAM review*, v. 43, n. 2, pp. 235–286.
- [35] TONETTO, L., 2011, *Modelos elásticos para vigas segmentadas em microscopia de força atômica*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- [36] WILLIAMSON, C., GOVARDHAN, R., 2004, “Vortex-induced vibrations”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 361, pp. 413–455.
- [37] YI-MIN, H., YONG-SHOU, L., BAO-HUI, L., et al., 2010, “Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 240, n. 3, pp. 461–467.
- [38] ZHAI, H.-B., WU, Z.-Y., LIU, Y.-S., et al., 2011, “Dynamic response of pipeline conveying fluid to random excitation”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 241, n. 8, pp. 2744–2749.
- [39] ZHANG, T., DING, H. H., SU, Y., et al., 2012, “Modal analysis of multi-span pipes conveying fluid based on three different FSI methods”, *Advanced Materials Research*, v. 594, pp. 2525–2528.

Apêndice A

Implementação Mathematica da Abordagem da Matriz Companheira de Frobenius

```
PolynomialEigenvalues[matCof : {__?MatrixQ}] :=  
Module[{p = Length[matCof] - 1, n = Length[First[matCof]]},  
  Eigenvalues[{ArrayFlatten[  
    Prepend[NestList[RotateRight, PadRight[{IdentityMatrix[n]}, p],  
      p - 2], -Rest[matCof]]],  
    SparseArray[{Band[{1, 1}] -> First[matCof], {k_, k_} -> 1}, {n p,  
      n p}]]] /;  
  Precision[matCof] < Infinity && SameQ @@ (Dimensions /@ matCof)
```

[20]