



**ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE PARA
RETORNOS DE ALTA FREQUÊNCIA DE ATIVOS
FINANCEIROS: BITCOIN E IBOVESPA**

Bruno Vaz Furtado

Pedro Henrique Paracampos Coelho

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: André Assis de Salles

Rio de Janeiro
Novembro de 2022

**ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE PARA RETORNOS DE
ALTA FREQUÊNCIA DE ATIVOS FINANCEIROS**

Bruno Vaz Furtado

Pedro Henrique Paracampos Coelho

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO.

Examinado por:

Prof. André Assis de Salles, D.Sc.

Prof. Jonas Knopman, D.Sc.

Prof. Rosemarie Broker Bone, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Novembro de 2022

Agradecimentos

Bruno Vaz Furtado

Gostaria de agradecer a todos meus amigos e familiares, os quais me apoiaram durante toda a jornada na universidade e foram fundamentais para que chegasse até aqui. Um agradecimento especial à minha mãe, que infelizmente não está mais aqui para ver minha formatura, meu pai, que sempre me cuidou muito bem de mim e meu irmão sozinho, e me incentivou a seguir com graduação nos momentos onde eu estava mais desmotivado. Também quero agradecer à minha namorada, que me apoiou durante todo o processo e me ajudou sempre que precisei de apoio.

Por fim, agradeço a todos os Professores da Escola Politécnica que contribuíram para a minha formação acadêmica e, em especial, ao meu orientador, André Salles, o qual esteve presente em grande parte da minha jornada acadêmica e me auxiliou no aprofundamento dos conhecimentos de estatística aplicada e econometria, e ter nos guiado durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho. Queria também agradecer ao professor Jonas Knopman, pois foi através dele que descobri a possibilidade de trabalhar com estratégias quantitativas, que hoje não só é meu trabalho, mas também vejo como uma paixão e desejo seguir como carreira para o resto da minha vida.

Agradecimentos

Pedro Henrique Paracampos Coelho

Agradeço à minha família por todo apoio e suporte que deram e ainda dão no meu processo de educação. Agradeço à minha mãe que sempre me apoiou e me aconselhou nas minhas escolhas, sempre esteve presente no meu processo educacional (até mesmo estando comigo na época da minha alfabetização) e por sempre me cobrar por resultados melhores em tudo que faço. Agradeço ao meu pai por sempre ter me dado o suporte necessário para as minhas conquistas e por ser um exemplo para mim em tudo que faço na minha vida, desde a simples forma de tratar uma pessoa desconhecida, até a maneira de me portar em situações desconfortáveis e críticas. Também gostaria de detalhar um agradecimento à minha tia avó que, quando em vida, sempre me perguntou sobre meu progresso na universidade e que sei que estará presente de alguma forma no momento da minha graduação.

Além disso, agradeço a todos os docentes e discentes da graduação da Escola Politécnica da UFRJ, por contribuírem diretamente ou indiretamente para a minha formação. Gostaria de deixar um agradecimento especial a duas pessoas: ao professor André Salles por ter me orientado na execução deste trabalho, e ao aluno Bruno Furtado que esteve comigo desde o meu primeiro dia de aula, até a entrega do meu Trabalho de Conclusão de Curso.

Gostaria de finalizar meus agradecimentos com uma das mais icônicas frases de um dos grandes mestres da engenharia, Sir Isaac Newton: "Se eu vi mais longe foi por estar sobre ombros de gigantes."

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Produção.

ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE PARA RETORNOS DE ALTA FREQUÊNCIA DE ATIVOS FINANCEIROS

Bruno Vaz Furtado

Pedro Henrique Paracampos Coelho

Novembro/2022

Orientador: André Assis de Salles

Curso: Engenharia de Produção

Nos últimos anos, a bolsa de valores brasileira viu um aumento de investidores, passando de 700 mil, no início de 2018, para mais de 5 milhões em 2022. Somado a isso, o mercado de criptomoedas começou a atrair a atenção de investidores brasileiros e do mundo todo, dado que o valor de mercado da principal criptomoeda do mundo, o Bitcoin, cresceu cerca de 500% desde 2017. No entanto, à medida que aumentou o número de brasileiros investindo nos últimos anos, tanto no mercado financeiro tradicional, quanto no mercado de criptomoedas, também observou-se períodos de grande volatilidade no mercado, causados principalmente por conta de eventos globais como a pandemia do COVID-19. Sabendo disso e tendo o conhecimento que, de acordo com a teoria de finanças, todos os ativos financeiros possuem seu retorno associado ao risco observado pelo investidor, e que a principal forma para mensurar esse risco é através de modelos de volatilidade de ativos financeiros, evidencia-se a necessidade do estudo da volatilidade dos ativos financeiros para mensurar a atratividade desses ativos em termos de retorno sobre risco ou o *trade-off* risco retorno. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo estudar a volatilidade do Bitcoin e do Ibovespa, principal índice de lucratividade do mercado financeiro brasileiro. Desse modo, foram estimados modelos autorregressivos da família ARCH para as séries temporais de retornos, tanto do Bitcoin quanto do índice Ibovespa, usando amostras das cotações por minuto, dos dias das últimas semanas dos meses de janeiro, março, maio e julho de 2020. Dessa forma, as amostras foram tomadas antes e depois da decretação da pandemia de COVID-19 que afetou toda economia mundial, para reduzir os impactos da pandemia na volatilidade. Conclui-se que os modelos GARCH e EGARCH foram os que tiveram melhor aderência para a previsão da maioria das amostras dos ativos financeiros estudados.

Palavras Chave: Criptomoedas, Ibovespa, Mercado de Capitais, Modelos de Volatilidade

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Production Engineer.

ESTIMATION OF VOLATILITY MODELS FOR HIGH FREQUENCY RETURNS OF FINANCIAL ASSETS

Bruno Vaz Furtado

Pedro Henrique Paracampos Coelho

Novembro/2022

Advisor: André Assis de Salles

Course: Industrial Engineering

In recent years, the Brazilian stock exchange has seen an increase in investors, from 700 thousand at the beginning of 2018 to over 5 million in 2022. Added to this, the cryptocurrency market has begun to attract the attention of Brazilian investors and worldwide, given that the market value of the world's leading cryptocurrency, Bitcoin, has grown by around 500% since 2017. However, as the number of Brazilians investing in recent years has increased, both in the traditional financial market and in the cryptocurrency market, periods of high market volatility were also observed, mainly caused by global events such as the COVID-19 pandemic. Knowing this and having the knowledge that, according to the theory of finance, all financial assets have their return associated with the risk observed by the investor, and that the main way to measure this risk is through models of volatility of financial assets, evidences There is a need to study the volatility of financial assets to measure the attractiveness of these assets in terms of return on risk or the risk-return trade-off. Thus, this work aims to study the volatility of Bitcoin and Ibovespa, the main profitability index of the Brazilian financial market. In this way, autoregressive models of the ARCH family were estimated for the time series of returns, both for Bitcoin and for the Ibovespa index, using samples of quotes per minute, from the days of the last weeks of the months of January, March, May and July 2020. In this way, samples were taken before and after the enactment of the COVID-19 pandemic that affected the entire world economy, to reduce the impacts of the pandemic on volatility. It is concluded that the GARCH and EGARCH models were the ones that had the best adherence for the prediction of most of the samples of the financial assets studied.

Keywords: Cryptocurrencies, Ibovespa, Capital markets, Volatility models.

SUMÁRIO

	Página
1. INTRODUÇÃO	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
3. METODOLOGIA ADOTADA	17
4. DADOS UTILIZADOS	25
5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	31
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Gráfico de cotação do Bitcoin contra o dólar abr/2021 - out/2021	11
Gráfico 2 - Simetria de Distribuição de Probabilidade	18
Gráfico 3 - Curtose de Distribuição de Probabilidade	19
Gráfico 4 - Série Temporal Estacionária	20
Gráfico 5 - Série Temporal Não Estacionária	20
Gráfico 6 - Série de retornos diários do índice de lucratividade do S&P 500	21
Gráfico 7 - Série das cotações do Índice Ibovespa (jan-jun 2020)	26
Gráfico 8 - Série das cotações do Bitcoin (jan-jun 2020)	28
Gráfico 9 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/01	38
Gráfico 10 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/01	38
Gráfico 11 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/01	39
Gráfico 12 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 30/01 ...	39
Gráfico 13 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 31/01	40
Gráfico 14 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 23/03	41
Gráfico 15 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 24/03	41
Gráfico 16 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 25/03	42
Gráfico 17 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 26/03	42
Gráfico 18 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/03	43
Gráfico 19 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 25/05	44
Gráfico 20 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 26/05	44
Gráfico 21 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/05	45
Gráfico 22 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/05	45
Gráfico 23 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/05	46
Gráfico 24 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/07	47
Gráfico 25 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/07	47
Gráfico 26 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/07	48
Gráfico 27 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 30/07	48
Gráfico 28 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 31/07	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela dos símbolos das amostras do índice Ibovespa	26
Tabela 2 - Resumo estatístico da amostra do índice Ibovespa (jan - mar / 2020)	27
Tabela 3 - Resumo estatístico da amostra do índice Ibovespa (mai - jul / 2020)	27
Tabela 4 - Tabela dos símbolos das amostras do Bitcoin	29
Tabela 5 - Resumo estatístico da amostra do Bitcoin (jan - mar / 2020)	29
Tabela 6 - Resumo estatístico da amostra do Bitcoin (mai - jul / 2020)	30
Tabela 7 - Tabela dos símbolos dos modelos utilizados	32
Tabela 8 - Modelos utilizados para o índice Ibovespa e Bitcoin	33
Tabela 9 - Resumo estatístico da volatilidade do Ibovespa (jan-mar / 2020)	34
Tabela 10 - Resumo estatístico da volatilidade do Ibovespa (mai-jul / 2020)	35
Tabela 11 - Resumo estatístico da volatilidade do Bitcoin (jan-mar / 2020)	36
Tabela 12 - Resumo estatístico da volatilidade do Bitcoin (mai-jul / 2020)	36
Tabela 13 - Correlação dos retornos e volatilidade do Bitcoin e do índice Ibovespa (jan - mar / 2020)	48
Tabela 14 - Correlação entre os retornos e volatilidade do Bitcoin e do índice Ibovespa (mai - jul / 2020)	49

1. INTRODUÇÃO

Com a evolução do mercado de capitais, a negociação de ativos financeiros se torna cada vez mais competitiva e eficiente, com os investidores procurando as melhores oportunidades com o maior retorno e menor risco possível. Deve-se destacar que o objetivo final do investidor racional, ou seja, o investidor que busca maximizar seu fator de retorno em relação ao risco, é obter a melhor relação de risco sobre retorno independente do ativo financeiro analisado.

Um dos ativos financeiros cujo número de negociações e volume financeiro têm apresentado um crescimento significativo nos últimos anos são os classificados como criptomoedas. As criptomoedas são ativos digitais, sem lastro físico, gerados por uma tecnologia chamada *blockchain*, através da qual são registradas as transações e o rastreamento de ativos tangíveis ou intangíveis. Enquanto os ativos financeiros tradicionais são regulamentados e lastreados, os ativos financeiros que utilizam *blockchain* têm a posse comprovada somente pelo seu histórico de transações, e não possuem qualquer controle de bancos centrais ou agentes regulatórios de instituições governamentais ou de organismos internacionais e, portanto são muito difíceis de serem rastreados (Cointelegraph, 2022). Se por um lado, essa independência gerou muita popularidade e, conseqüentemente, um aumento de volume muito grande, por outro lado gerou incertezas acerca da longevidade desses ativos frente às regulações governamentais. E, em alguns casos, tem provocado reações e a atuação de governos que vão até a proibição de se negociar e possuir criptomoedas como acontece na China e em outros países (Fortune, 2022).

Nos últimos anos foi observado um crescimento expressivo no número de investidores nos mercados em geral. No caso da Bolsa de Valores B3, que é a única e bolsa de valores brasileira, houve um aumento de 198% dos investidores cadastrados de 2019 até 2021, de acordo com as informações fornecidas pela própria B3 em seu *website*. No que se refere ao Bitcoin, uma das principais criptomoedas transacionadas no mercado global, de 2019 até 2021, o volume negociado aumentou em cinco vezes enquanto sua capitalização de mercado aumentou em dez vezes. Vale ressaltar que a volatilidade de ambos os ativos mencionados é o principal parâmetro para a determinação das expectativas de preço, como ocorre com qualquer ativo financeiro. Deve-se salientar que as criptomoedas sempre apresentam uma volatilidade alta quando comparadas com os preços das ações, índices de lucratividade de ações e cotações de *commodities*. Um exemplo recente ocorreu em abril de

2021, onde seu valor de mercado caiu mais de 50% em 35 dias, saindo de sua cotação de 65173 dólares no dia 14 de abril de 2021, até um mínimo no ano de 30185 dólares no dia 19 de maio de 2021. Pode-se observar no Gráfico 1, o da Binance a maior corretora de criptomoedas do mundo, esse movimento brusco em abril de 2021

Gráfico 1 - Gráfico de cotação do Bitcoin contra o dólar abr/2021 - out/2021



Fonte: Binance

Com o avanço do número de investidores tanto no mercado de capitais, quanto no mercado de criptomoedas, fica evidente a necessidade da compreensão de conceitos fundamentais da teoria de finanças, principalmente, no que se refere ao *trade-off* risco e retorno. Nesse contexto, a determinação e gerenciamento do risco ou da volatilidade associados aos ativos financeiros ocupa posição de destaque dentro de estudos e pesquisas apresentadas na literatura em finanças. Assim, as estimativas de volatilidade se destacam dentre as tarefas necessárias para avaliação de ativos financeiros. A partir das análises da volatilidade de um ativo, um investidor consegue ter uma melhor expectativa de seu respectivo retorno, dado seu preço. Galdi e Pereira (2007) afirmam que os modelos de volatilidade têm como principal objetivo prover uma métrica que possa ser utilizada na gestão de riscos financeiros, na seleção de carteiras de ativos financeiros, e de projetos de investimentos, e na formação de preços de derivativos. Assim, deve-se observar que a utilização de modelos para previsão de volatilidade para o desenvolvimento de estratégias de alocação adequadas e eficientes de recursos na atividade produtiva da economia. Estimar a

volatilidade e seus impactos no mercado é de relevância ímpar para análise do comportamento dos preços e retornos dos ativos financeiros (ver Brooks (2008)).

A crise sanitária provocada pela pandemia de COVID-19 afetou todas as atividades ao redor do mundo e, em particular, as atividades econômicas, provocando desemprego e instabilidade econômica. A pandemia de COVID-19 foi responsável por uma preocupação global devido à facilidade de contágio e as mortes causadas pela doença. Essa preocupação se refletiu nas economias, com a diminuição da atividade econômica e o fechamento parcial da economia imposto pela pandemia, o que se refletiu nos mercados financeiros e de *commodities* do mundo inteiro. Os índices de lucratividade dos ativos financeiros tiveram forte queda em um espaço de tempo de poucos dias no início da pandemia de Covid-19, e em outros momentos da crise sanitária. O principal índice de lucratividade do mercado brasileiro de ações, o Ibovespa, chegou a alcançar uma máxima histórica no mês de janeiro de 2020, recuou em apenas dois meses acumulando uma queda de quase 50% da sua máxima até a mínima logo após o início da pandemia, de acordo com os dados públicos da Bolsa de Valores B3 que foram obtidos em seu *website*. A pandemia da COVID-19 aumentou o risco dos ativos no mercado em meio à tensão global dadas pelas expectativas de acontecimentos futuros que poderiam diminuir as consequências desse evento. Esses momentos reforçam a necessidade de haver um gerenciamento de risco dentro dos portfólios dos investidores nos mercados de capitais.

Fica evidente a necessidade de estudar modelos que possibilitem uma melhor compreensão da volatilidade de algumas classes de ativos financeiros para que se possa elucidar o comportamento das oscilações dos preços de determinados ativos financeiros em diferentes momentos no tempo. Dado que os modelos de volatilidade são uma maneira de mensurar o risco de ativos financeiros, então à medida que se obtém estimativas dos riscos dos ativos, pode-se estimar o retorno e, por conseguinte, o preço justo desses ativos.

Este trabalho tem por objetivo estimar a volatilidade de alta frequência de duas classes de ativos financeiros, criptomoedas e ações, através das cotações do Bitcoin e do índice de lucratividade das ações negociadas no mercado brasileiro de ações, o Ibovespa. Com isto, este trabalho pretende ter como base de comparação para a volatilidade das criptomoedas negociadas nos mercados organizados, o mercado de ações, em particular, o mercado de ações brasileiro. Ademais, este trabalho procura auxiliar o desenvolvimento de uma metodologia para avaliação do *trade-off* risco e retorno para a tomada de decisão de investimentos. Uma vez que o nível da volatilidade está relacionado diretamente à frequência e à intensidade das oscilações dos preços de ativos financeiros, compreender seu

comportamento é um passo importante tanto para entender o risco de investimento em um determinado ativo, quanto para precificá-lo de forma mais assertiva.

Para se atingir o propósito deste trabalho, foi realizada uma análise estatística da volatilidade das duas classes de ativos financeiros, aqui estudados, no intuito de encontrar um modelo econométrico que melhor explique a volatilidade desses ativos através de modelos autorregressivos condicionais heteroscedásticos.

Além desta introdução, este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica de estudos e pesquisas que analisam a relação entre diferentes modelos de heterocedasticidade condicional autoregressivos e suas aplicações para realização de previsões de séries temporais de preços e de retornos dos ativos financeiros. O Capítulo 3 mostra a metodologia utilizada para atingir os objetivos deste trabalho. Enquanto uma descrição dos dados utilizados, um resumo de estatística descritiva e testes de pressupostos básicos são apresentados no Capítulo 4. O Capítulo 5 trata dos resultados da construção e estimação dos modelos de volatilidade. O Capítulo 6 contempla as considerações finais deste estudo, seguindo-se as referências bibliográficas e anexos contendo os gráficos e tabelas resultantes da produção e desenvolvimento do presente trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como assinalado no capítulo anterior, o conceito de volatilidade ocupa lugar de destaque na literatura de finanças, uma vez que a determinação do risco é fundamental na avaliação dos ativos financeiros através das expectativas dos retornos. Muitos estudos e pesquisas têm sido desenvolvidos buscando encontrar melhores formas de prever a volatilidade dos ativos financeiros, com o intuito de melhor precificá-los. Assim sendo, foi realizada uma seleção de trabalhos para a construção de uma análise mais assertiva e aprofundada sobre o tema deste trabalho. A seguir estão listados breves resumos de alguns dos trabalhos selecionados no levantamento bibliográfico realizado para elaboração deste trabalho.

Dhamija e Bhalla (2010) buscaram estimar modelos para média e para variância dos retornos diários do índice National Stock Exchange of India Fifty (NIFTY) e de taxas cambiais. No trabalho foram utilizados dados diários da cotação do índice NIFTY, entre os meses de Janeiro de 2005 até Fevereiro de 2009, e de cinco séries temporais de taxas cambiais de diferentes moedas em relação ao dólar americano, em diferentes intervalos de tempo. A partir desses dados foram estimados modelos autorregressivos heteroscedásticos condicionais ou modelos da família ARCH (autoregressivo condicional heterocedástico). Dhamija e Bhalla (2010) concluíram que o desempenho dos modelos IGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico integrado) e TGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico com *threshold*) foram superiores aos outros modelos heteroscedásticos condicionais autorregressivos utilizados na previsão de taxas de câmbio.

Kerma (2017) procurou comparar o desempenho da previsão de cinco diferentes modelos da família ARCH utilizando cinco diferentes índices de lucratividade de ações para um período de 17 anos. Os índices de lucratividade das ações investigados foram o CAC 40, índice de lucratividade do mercado acionário francês, o FTSE100, índice de lucratividade do mercado acionário inglês, o NIKKEI, índice de lucratividade do mercado acionário japonês, o S&P 500, índice de lucratividade do mercado acionário norte-americano de ações, e o EUROSTOXX50, índice de ações formado pelas 50 ações com maior liquidez e negociação dos mercados europeus de ações. Dentre os modelos de volatilidade da família ARCH, foram estimados os modelos GARCH (Generalized ARCH model), EGARCH (Exponential GARCH), GJR-GARCH (Glosten–Jagannathan–Runkle GARCH), APARCH (Asymmetric Power ARCH) e o CGARCH (Component GARCH). O estudo de Kerma (2017) concluiu

que os modelos EGARCH e APARCH apresentaram as melhores previsões para a maioria das amostras de dados utilizados.

Choi et al. (2017) utilizaram métodos de *Machine Learning*, em particular *Random Forest* e Regressão Logística, para prever flutuações dos preços dos ativos no curtíssimo prazo. O estudo analisou ordens de mercado de 13 corretoras de valores em intervalo de microssegundos, removendo os 15 minutos iniciais e finais de cada dia, totalizando 864.000 informações do período de 05/01/2015 até 16/01/2015. Os resultados obtidos no estudo apontaram que as melhores estimativas para o ativo XLF foram obtidas através de um modelo de Regressão Logística, enquanto para o ativo MSFT as melhores estimativas foram obtidas com o *Random Forest*.

Conrad, Custovic e Ghysels (2018) apresentaram um estudo dos fatores que influenciam a volatilidade do Bitcoin no longo e no curto prazo através do modelo GARCH-MIDAS. No estudo utilizaram os retornos e a volatilidade das cotações diárias dos seguintes ativos financeiros: Bitcoin; S&P 500; Nikkei 225; VIX; Variance Risk Premium (VRP); S&P Global Luxury Index (GLUX); SPDR Gold Shares ETF (GLD); Bloomberg Copper ETF (JJC); e Baltic Dry Index (BDI). Os resultados do estudo mostraram que o modelo utilizado, apesar de apresentar significância estatística para a constante e demais parâmetros, não satisfaz a condição de estacionariedade da covariância. Outra conclusão do estudo aponta que os índices VIX e o RV-Glux estão relacionados negativamente com a volatilidade de longo prazo do Bitcoin, enquanto os índices VRP e o BDI estão relacionados positivamente. Através do trabalho de Conrad et al. (2018) foi possível inferir que o modelo GARCH-MIDAS parece ser uma boa alternativa para estimar a volatilidade do Bitcoin.

Wang et al (2018) investigou a relação entre a volatilidade dos preços do petróleo e a do mercado de ações e procurou encontrar uma forma de prever a volatilidade do mercado de ações através da volatilidade do petróleo. Os dados utilizados no estudo foram de retornos diários do índice S&P 500, do petróleo bruto do tipo Brent e do tipo WTI, no período entre janeiro de 1991 até dezembro de 2015. Foram obtidas estimativas recursivas e de médias móveis. No caso do coeficiente de volatilidade ser negativo, descartavam o modelo e utilizavam o *benchmark*. Para avaliar a performance dos modelos foi utilizado o coeficiente de determinação R^2 , que é uma medida estatística de quão próximos os dados estão da regressão, para previsões fora da amostra utilizando um modelo de regressão linear estimado pelo método de mínimos quadrados, que é uma técnica de otimização utilizada em estatística, para calcular a regressão linear, é traçada a função cuja soma do quadrado das distâncias da reta traçada até as observações são minimizadas. Os resultados indicaram que o modelo com

petróleo bruto do tipo WTI possui maior poder preditivo que o do tipo Brent. O modelo com petróleo bruto do tipo WTI conseguiu reduzir em 0,826% o Erro Médio Quadrado de de Previsão, onde é medido o quadrado do erro, ou seja, da distância do modelo para as observações reais, o que indica que a utilização do WTI no modelo reduz o erro de previsão. O trabalho concluiu que existe um efeito positivo ao utilizar a volatilidade do petróleo do tipo WTI para se prever a volatilidade do principal índice de lucratividade do mercado acionário norte-americano, o S&P 500.

Ali e Huq (2018) buscaram estimar e prever a volatilidade do índice da Dhaka Stock Exchange (DSE), a principal bolsa de valores de Bangladesh. Foi utilizado neste trabalho uma amostra de dados dos retornos do índice DSE, entre os meses de Janeiro de 2013 a Maio de 2017, para estimativas de modelos autoregressivos condicionais heteroscedáticos – modelos ARCH. Antes de aplicarem a metodologia baseada nos modelos ARCH foram feitos testes de hipótese de homocedasticidade e de Multiplicador de Lagrange (LM) para o efeito heterocedasticidade condicional autorregressiva (ARCH). Para avaliar o desempenho dos modelos estimados foram utilizados os critérios de informação de Akaike (AIC) e de Schwarz (BIC), que são dois critérios estatísticos utilizados para mensurar a qualidade de um modelo, enquanto a raiz do erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE), erro percentual médio absoluto (MAPE), o coeficiente de desigualdade e a proporção de viés foram usados para verificar o desempenho da previsão obtida com os modelos estimados. O Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério de Informação de Schwarz (BIC) indicaram que o modelo GJR-GARCH (1,1) foi o modelo mais bem ajustado entre todos os modelos estimados.

Dos artigos analisados na revisão bibliográfica, os que mais contribuíram para a produção deste trabalho foram Kerma (2017), pela sua utilização de diferentes modelos da família ARCH, o que ajudou na seleção de quais modelos utilizar neste trabalho, e também o estudo de Ali e Huq (2018) pela sua utilização dos Critérios de Informação de Akaike e de Schwarz em conjunto com os modelos da família ARCH, pois esses critérios também serão utilizados neste trabalho como critério para selecionar os modelos neste trabalho.

A partir da revisão bibliográfica, cuja parte foi comentada aqui, precedeu-se a definição e da abordagem metodológica utilizada neste trabalho é apresentada no capítulo seguinte.

3. METODOLOGIA ADOTADA

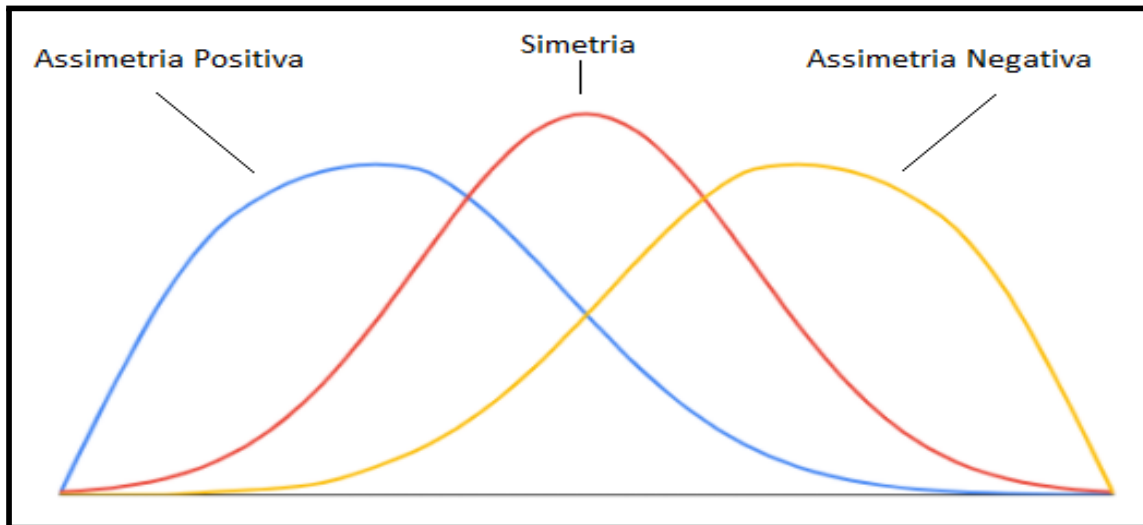
A determinação do risco de ativos tem importância fundamental na determinação das expectativas de retornos e, por conseguinte, é uma variável essencial para modelos de análise de derivativos, como opções ou futuros. Portanto, se torna importante a medição da volatilidade ou das métricas estatísticas que podem ser aplicadas para definir as distribuições analisadas no estudo, e também os modelos que podem ser utilizados para estimar a volatilidade de ativos financeiros.

3.1. Descrição Estatística dos Dados

Para descrever os dados utilizados neste trabalho, é necessário primeiramente entender sua distribuição de probabilidade de seus dados, e se é possível considerá-la normalmente distribuída ou não. Assim, algumas estimativas de parâmetros foram feitas para se analisar e compreender os dados utilizados. A seguir estão descritos os procedimentos e testes utilizados para essa análise.

Uma distribuição de probabilidade é simétrica quando seus valores de média, mediana e moda coincidem. A comparação entre o valor da média e o valor da moda, dá, portanto, uma indicação da assimetria da distribuição. Como pode ser visto em Salles (2010), pode-se classificar uma distribuição de probabilidade em simétrica, assimétrica positivamente e assimétrica negativamente, observando-se os valores de sua média, mediana e moda: se Média = Mediana = Moda o conjunto de dados é simétrico; se Média > Mediana > Moda, o conjunto de dados é positivamente assimétrico; e se a Média < Mediana < Moda, o conjunto de dados é negativamente assimétrico. Pode-se observar no Gráfico 2, distribuições com assimetria positiva (em azul), assimetria negativa (em amarelo) e uma distribuição simétrica (em vermelho).

Gráfico 2 - Simetria de Distribuição de Probabilidade



Fonte: Elaboração própria.

Existem algumas formas para estimar a assimetria, neste trabalho utilizamos a descrita por Gujarati (2011), como indica a fórmula 1:

$$S = \frac{\left(\frac{\sum [x_i - \bar{x}]^3}{n} \right)}{s^3} \quad (1)$$

Sendo n = número de observações, x_i = variável i , \bar{x} = média amostral e s = desvio padrão amostral.

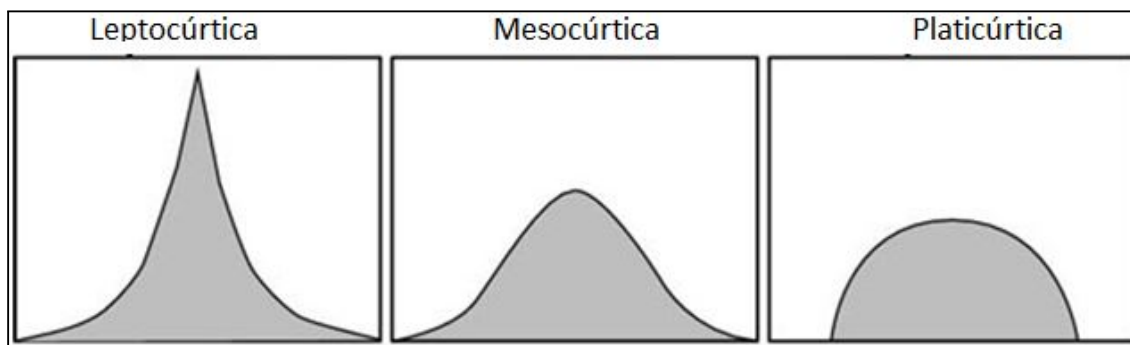
Quanto dependendo do valor, a distribuição pode ser Leptocúrtica, Mesocúrtica ou Platicúrtica, como está indicado no Gráfico 3, adiante. Curtose significa o quanto de uma variável tem sua distribuição achatada em relação ao achatamento de distribuição de probabilidade normal. Dados que se ajustam à distribuição de probabilidade normal possui o valor da curtose como três, portanto um valor muito maior ou menor que três indica que a distribuição não é normal. De acordo com Gujarati (2011), o coeficiente de curtose pode ser medido através da fórmula 2:

$$K = \frac{\left(\frac{\sum [x_i - \bar{x}]^4}{n} \right)}{s^4} \quad (2)$$

Sendo K = curtose, x_i = observação, \bar{x} = média, n = número de observações e s = desvio padrão.

Para facilitar a visualização do efeito da curtose das distribuições, no Gráfico 3 estão exemplos de distribuições Leptocúrticas, Mesocúrticas e Platicúrticas.

Gráfico 3 - Curtose de Distribuição de Probabilidade



Fonte: Pezzullo (2016).

A normalidade dos dados indica o quão próximo os dados estão de uma distribuição normal, e se é possível se ajustar os dados a uma distribuição de probabilidade normal. O teste estatístico da hipótese de normalidade dos dados mais difundidos, para se verificar a aceitação ou rejeição da hipótese de normalidade, é o teste proposto por Jarque e Bera. Segundo Gujarati (2011), o teste de normalidade de Jarque e Bera (JB) é um teste assintótico, cuja a estatística de teste é dada pela fórmula 3:

$$JB = n \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right). \quad (3)$$

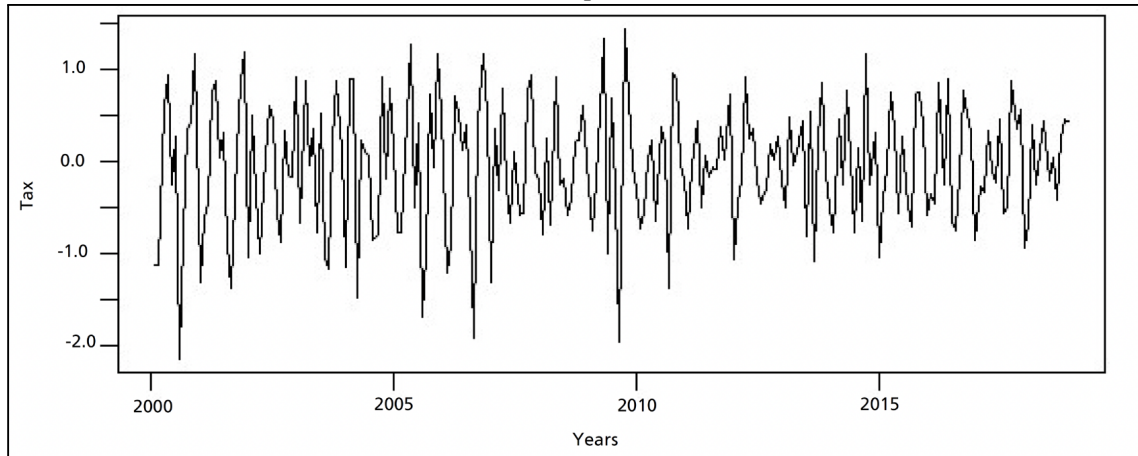
Onde n = número de observações, K = coeficiente de curtose e S = coeficiente de assimetria. De acordo com Gujarati (2011), para uma variável normalmente distribuída tem-se $S = 0$ e $K = 3$.

Dessa maneira, o teste JB é um teste da hipótese conjunta de S e K serem iguais a zero e três, respectivamente, e a hipótese nula deste teste enuncia serem as observações normalmente distribuídas. Assim, se o p-valor for suficientemente baixo e o valor obtido muito diferente de zero, rejeita-se a hipótese nula das observações serem distribuídas normalmente.

De acordo com Gujarati (2011), uma série temporal estacionária tem a propriedade da média e da variância serem constantes no decorrer do tempo e o valor da covariância entre os dois períodos de tempo depender apenas da distância do intervalo ou da defasagem entre os dois períodos, e não o tempo real ao qual a covariância é computada. Assim, uma série temporal estacionária terá uma tendência de reversão à média, e as flutuações ao redor dessa

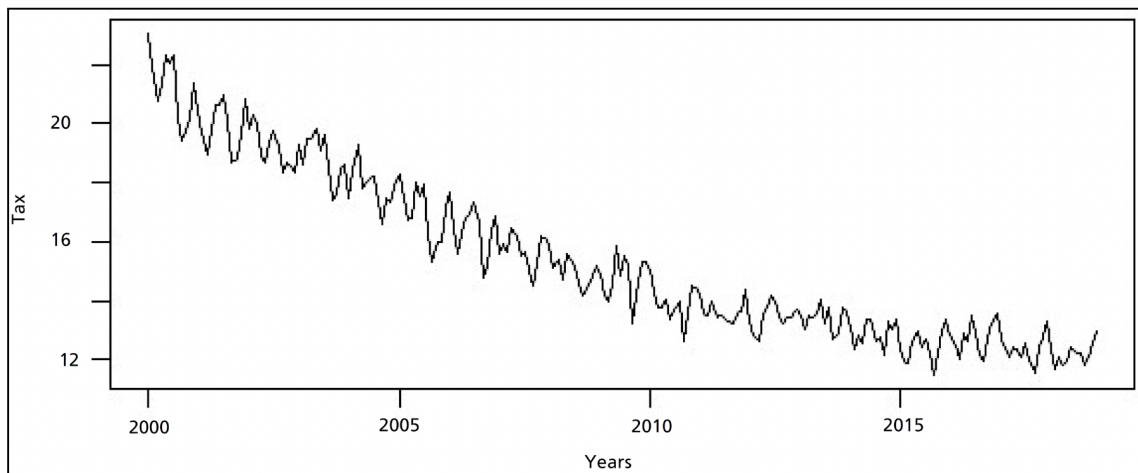
média terão amplitude constante. As Gráficos 4 e 5, a seguir, exemplificam o comportamento de uma série estacionária e de uma série não-estacionária, respectivamente.

Gráfico 4 - Série Temporal Estacionária



Fonte: SILVA, 2021.

Gráfico 5 - Série Temporal Não Estacionária



Fonte: SILVA, 2021.

Para testar a estacionariedade das séries temporais utilizadas neste trabalho foi utilizado o teste Dickey e Fuller Aumentado (ADF), conforme a descrição de Gujarati (2011) é um teste de raiz unitária, que tem como hipótese nula a estacionariedade de um processo estocástico.

3.2. Modelos de Volatilidade

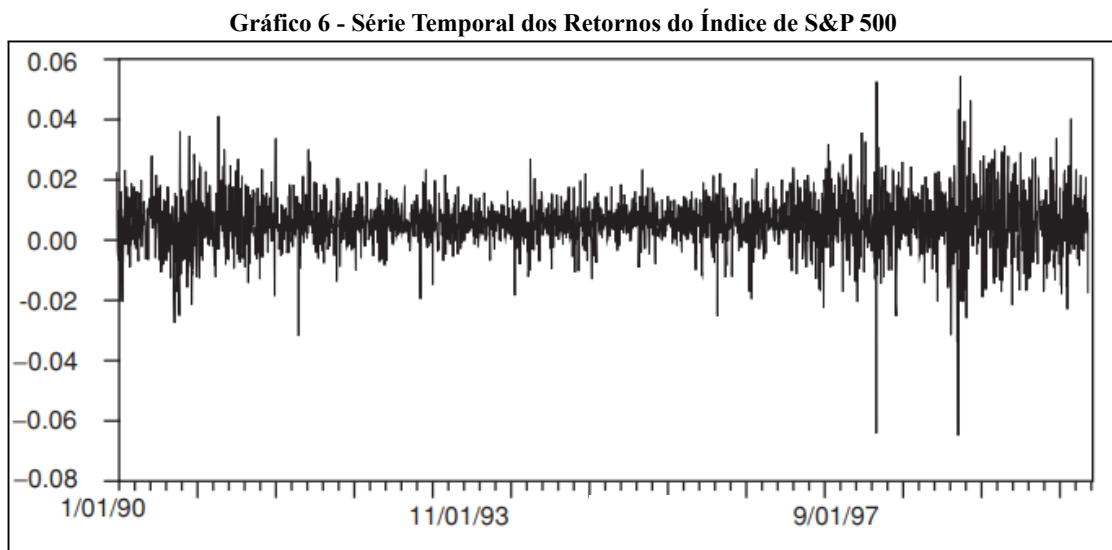
Segundo Brooks (2008), volatilidade é um dos conceitos mais importantes em finanças. A volatilidade medida pelo desvio padrão ou pela variância dos retornos de ativos

financeiros é utilizada para mensurar risco. Deve-se observar que os modelos de *Value-at-Risk* (VAR) necessitam de uma estimação e previsão da volatilidade para obter suas estimativas.

Existem muitos modelos para se estimar a volatilidade de séries temporais de retornos para ativos financeiros, os mais difundidos na literatura financeira são os modelos ARCH, modelos autoregressivos condicionais heteroscedástico, e GARCH, ARCH Generalizado. Esses modelos se caracterizam por uma dependência não linear e autoregressiva da sua variância condicional. Assim, os modelos ARCH e GARCH se baseiam nos quadrados dos erros e das variâncias defasadas para explicar ou prever a volatilidade futuras.

- Modelo ARCH

O modelo de heteroscedástico condicional autoregressivo, ou modelo ARCH, é muito utilizado para prever séries temporais da variância, e por conseguinte explicar séries temporais de retornos financeiros, dada sua característica de períodos de alta volatilidade alternados com períodos de baixa volatilidade. Segundo Brooks (2008), um padrão que pode-se observar nos retornos de ativos financeiros é o *clustering* de volatilidade, ou seja, a tendência de grandes variações nos retornos serem seguidas por maiores variações, e variações menores serem seguidas também por variações menores nos retornos. Para ilustrar esse processo, a Gráfico 6 mostra a série temporal dos retornos diários do índice de lucratividade do mercado norte americano de ações dado pelo índice *S&P500* ao longo do período de 01/01/1990 até 01/01/2000.



Fonte: Brooks (2008).

Pode-se observar, no Gráfico 6, que existem períodos contínuos de grandes variações nos retornos, seguindo-se de períodos de variações menores, mas poucos momentos onde as variações alternam rapidamente em magnitude. Segundo Brooks (2008) esse é um fator determinante para a utilização dos modelos da família ARCH, dado que esses modelos conseguem capturar esses momentos para realizar estimações mais precisas por sua natureza autoregressiva. A fórmula 4 mostra a expressão que representa o modelo ARCH:

$$\begin{aligned}
 y_t &= c + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t z_t \\
 \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

Sendo y_t = série temporal no período t da variável de interesse (retorno), c = média de y , z_t = processo de ruído branco, σ_t = desvio padrão dependente do tempo e α_i = coeficientes ou parâmetros.

- Modelo GARCH

Ao considerar que a variância do erro é uma média móvel autoregressiva, o modelo ARCH pode ser designado como o modelo ARCH generalizado, ou GARCH. Além dos parâmetros do modelo ARCH, o modelo GARCH também utiliza uma defasagem p para o parâmetro da variância, com isso p e q e são as ordens dos termos do modelo GARCH utilizado. De acordo com Brooks (2008), a fórmula 5 abaixo representa o modelo GARCH:

$$\begin{aligned}
 y_t &= c + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t z_t \\
 \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2
 \end{aligned} \tag{5}$$

Onde tem-se y_t = série temporal no período t da variável de interesse (retorno), c = média de y , z_t = processo de ruído branco, z_t = processo de ruído branco, σ_t = desvio padrão dependente do tempo, σ_p = desvio padrão dependente do tempo até a defasagem (q), ω =

coeficiente constante ou intercepto, α_i = coeficientes ($i = 1, \dots, q$) e β_j = coeficientes ($j = 1, \dots, p$).

- Modelo EGARCH

Um dos modelos da família ARCH que merece ser destacado, dada sua importância nesse trabalho, é o modelo EGARCH, modelo GARCH Exponencial. Ao se introduzir um componente exponencial na fórmula do modelo GARCH é possível incorporar efeitos diferentes para movimentos negativos e positivos nos retornos e, por conseguinte, na volatilidade. O que pode ser muito útil para se estimar a volatilidade de retornos de ativos financeiros. Em geral, movimentos negativos tendem a ter maior magnitude do que movimentos positivos. Conforme Brooks (2008), a fórmula 6 indica o cálculo do modelo EGARCH:

$$\begin{aligned}
 y_t &= c + \epsilon_t \\
 \epsilon_t &= \sigma_t z_t \\
 \log \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^q \alpha_i \log \sigma_{t-i}^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Onde y_t = série temporal no período t da variável de interesse (retorno), c = média de y , z_t = processo de ruído branco, z_t = processo de ruído branco, σ_t = desvio padrão dependente do tempo, σ_p = desvio padrão dependente do tempo até a defasagem (q), ω = coeficiente constante ou intercepto, α_i = coeficientes ($i = 1, \dots, q$), e β_j = coeficientes ($j = 1, \dots, p$).

- Outros Modelos ARCH

Existem outros modelos da família ARCH, tais como: NGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico não-linear), IGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico integrado), TGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico com *threshold*), FGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico familiar ou autoregressivo condicional heterocedástico de Hentschel) e QGARCH (autoregressivo condicional heterocedástico quadrático) entre outros. Cada um desses modelos tem suas peculiaridades adequadas para ajustar o modelo em certos conjuntos de dados, como por exemplo: um retorno assimétrico dependendo do grau da volatilidade; impactos ponderados da volatilidade

passada na volatilidade futura; capturar distribuições altamente não lineares; aumentar a robustez do modelo frente à poucas observações; entre outras finalidades. O modelo NGARCH, por exemplo, introduz um fator θ ao modelo GARCH, para considerar de forma distinta o impacto na volatilidade de retornos positivos e negativos, pois em alguns casos a volatilidade aumenta de forma assimétrica dependendo das observações dos retornos serem positivas ou negativas. Nas séries temporais dos retornos de ativos financeiros, a volatilidade tende a aumentar mais com retornos negativos. Enquanto o EGARCH considera o cálculo da volatilidade futura exponencial.

Para o propósito deste trabalho procurou-se estimar os modelos ARCH, GARCH e EGARCH, considerados suficientes para explicar a volatilidade das séries temporais de retornos de alta frequência. Além dos modelos ARCH, GARCH e EGARCH aqui descritos, os outros modelos da família ARCH citados podem ser vistos mais detalhadamente em Brooks (2008). Neste capítulo foi explicado em detalhe a metodologia utilizada no trabalho, para em seguida, no capítulo 4, serem descritos em detalhe quais os dados utilizados onde foi aplicada essa metodologia.

4. DADOS UTILIZADOS

As amostras dos ativos selecionados para este trabalho foram coletadas procurando minimizar possíveis impactos do Covid-19 nas análises subsequentes, portanto a última semana dos meses de janeiro, março, maio e junho de 2020, utilizando somente as últimas semanas dos meses para que um possível fator de variação mensal não interferisse na análise. Foram coletados, 10 dias de observações pré-pandemia e 10 dias posteriores ao início da pandemia de Covid-19. Por serem utilizados dados de alta frequência com granularidade de minuto, obtemos 60 observações de retorno por hora, portanto, 20 dias se demonstram observar uma quantidade suficientemente grande de observações, 9.600 para o índice Ibovespa e 38.400 para o Bitcoin por este ser 24h.

O conjunto de dados utilizados neste trabalho se compõem de séries temporais de preço na frequência de minutos, dos 20 dias mencionados. Para se possibilitar composições, foram escolhidos somente os dias de semana, para serem obtidos dados da cotação de Bitcoin e de Ibovespa para os mesmos dias, dado que o mercado de criptomoeda opera 24 horas, enquanto o do índice só em dias úteis das 9 às 17h. Assim, os dados amostrais primários foram do preço de fechamento a cada minuto nos intervalos descritos acima. A partir do preço de fechamento, os retornos a cada minuto foram calculados para cada uma das séries temporais. Para facilitar as análises estatísticas, dado que as séries temporais dos retornos financeiros tendem a ser estacionárias, diferente dos preços ao longo do tempo, o retorno financeiro foi calculado a partir da fórmula 7, utilizando o retorno continuamente composto:

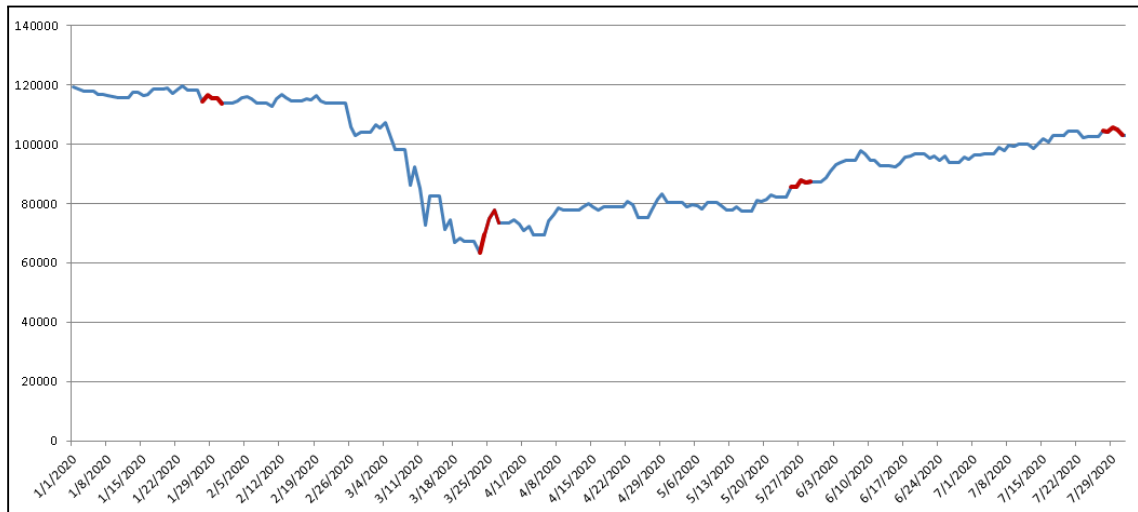
$$R_{i_t} = \ln\left(\frac{x_{i_t}}{x_{i_{t-1}}}\right) \quad (7)$$

Onde: R_{i_t} = Retorno do ativo i no tempo t , x_{i_t} = Preço de fechamento do ativo i no tempo t ,

$x_{i_{t-1}}$ = Preço de fechamento do ativo i no tempo $t-1$.

Os dados da cotação do índice Bovespa foram obtidos através do site Bloomberg (<https://www.bloomberg.com>). A Gráfico 7 abaixo exhibe o preço ao longo de 2020, com a amostra utilizada sinalizada em vermelho.

Gráfico 7 - Série temporal das cotações do Índice Ibovespa (jan-jul 2020)



Fonte: Elaboração própria.

Como pode-se observar no Gráfico 7, o início do período da pandemia de Covid-19 teve um impacto expressivo nas cotações do preço do índice Ibovespa, mas as cotações foram retornando aos patamares do início do ano poucos meses depois.

A tabela 1 indica o símbolo utilizado para cada amostra, para tornar mais fácil identificá-las ao longo do trabalho, utilizando 3 caracteres iniciais do ativo financeiro, e um número crescente associado à amostra. As tabelas 2 e 3 são o resumo estatístico da série temporal de retorno do índice Ibovespa, nos 20 dias de amostras utilizadas.

Tabela 1 - Tabela dos símbolos das amostras do índice Ibovespa

Período	27-jan	28-jan	29-jan	30-jan	31-jan	23-mar	24-mar	25-mar	26-mar	27-mar
Ativo	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa
Amostra	IBV-01	IBV-02	IBV-03	IBV-04	IBV-05	IBV-06	IBV-07	IBV-08	IBV-09	IBV-10
Período	25-mai	26-mai	27-mai	28-mai	29-mai	27-jul	28-jul	29-jul	30-jul	31-jul
Ativo	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa	Ibovespa
Amostra	IBV-11	IBV-12	IBV-13	IBV-14	IBV-15	IBV-16	IBV-17	IBV-18	IBV-19	IBV-20

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2 - Resumo estatístico da amostra do índice Ibovespa (jan - mar / 2020).

Amostra	IBV-01	IBV-02	IBV-03	IBV-04	IBV-05	IBV-06	IBV-07	IBV-08	IBV-09	IBV-10
Estatística	27-jan	28-jan	29-jan	30-jan	31-jan	23-mar	24-mar	25-mar	26-mar	27-mar
Média (x1000)	-0.031	0.028	-0.027	0.022	-0.011	-0.009	0.034	0.158	0.123	-0.035
Mediana (x1000)	-0.043	0.000	0.000	0.044	-0.044	-0.159	0.000	0.143	0.196	-0.067
Máximo	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.022	0.024	0.007	0.009	0.006
Mínimo	-0.002	-0.001	-0.002	-0.003	-0.002	-0.015	-0.006	-0.010	-0.009	-0.007
Desv. Padrão	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002
Assimetria	0.020	0.148	-0.198	0.060	0.054	0.830	3.295	-0.400	-0.096	-0.085
Curtose	3.151	1.279	1.099	2.884	1.766	5.851	39.914	1.877	1.455	0.423
Jarque-Bera	216.2	37.4	29.6	181.2	67.6	801.1	35388.3	89.1	46.0	4.3
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.116
ADF	-23.3	-23.5	-15.8	-24.0	-23.6	-7.9	-22.7	-10.8	-14.6	-10.7
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Nº de Observações	536	539	539	536	535	531	529	528	531	531

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 2 pode-se observar que os valores de média estão muito próximos de 0, dado que são retornos minuto a minuto, é esperado que esses valores sejam muito pequenos, os retornos observados estão na casa de 0.001%. Para melhor visualização desses dados, foi utilizado um multiplicador de fator 1.000 na média e mediana. Vale notar que na tabela 2, o p-Valor dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller são muito próximos de 0, indicando que a distribuição dos retornos não é normal. Além disso, vale notar que mês com maior desvio padrão de retornos foi março, sendo o dia com maior desvio padrão o dia 23 de março.

Tabela 3 - Resumo estatístico da amostra do índice Ibovespa (mai - jul / 2020).

Amostra	IBV-11	IBV-12	IBV-13	IBV-14	IBV-15	IBV-16	IBV-17	IBV-18	IBV-19	IBV-20
Estatística	25-mai	26-mai	27-mai	28-mai	29-mai	27-jul	28-jul	29-jul	30-jul	31-jul
Média (x1000)	0.015	-0.012	0.034	-0.024	0.016	0.021	-0.001	0.020	0.015	-0.043
Mediana (x1000)	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.048	0.000	0.000	0.000	0.000
Máximo	0.002	0.003	0.002	0.003	0.005	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002
Mínimo	-0.003	-0.003	-0.004	-0.003	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002
Desv. Padrão	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001
Assimetria	-0.139	0.014	-0.251	-0.389	0.546	-0.163	-0.255	0.298	0.257	-0.344
Curtose	3.678	1.500	4.772	1.705	5.844	5.936	2.552	3.314	1.843	2.654
Jarque-Bera	294.1	48.4	497.5	76.0	769.3	768.8	146.7	246.0	79.1	162.9
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ADF	-10.8	-23.9	-18.3	-23.9	-22.8	-5.4	-23.7	-15.4	-22.1	-6.1
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Nº de Observações	532	534	531	534	534	534	534	534	534	534

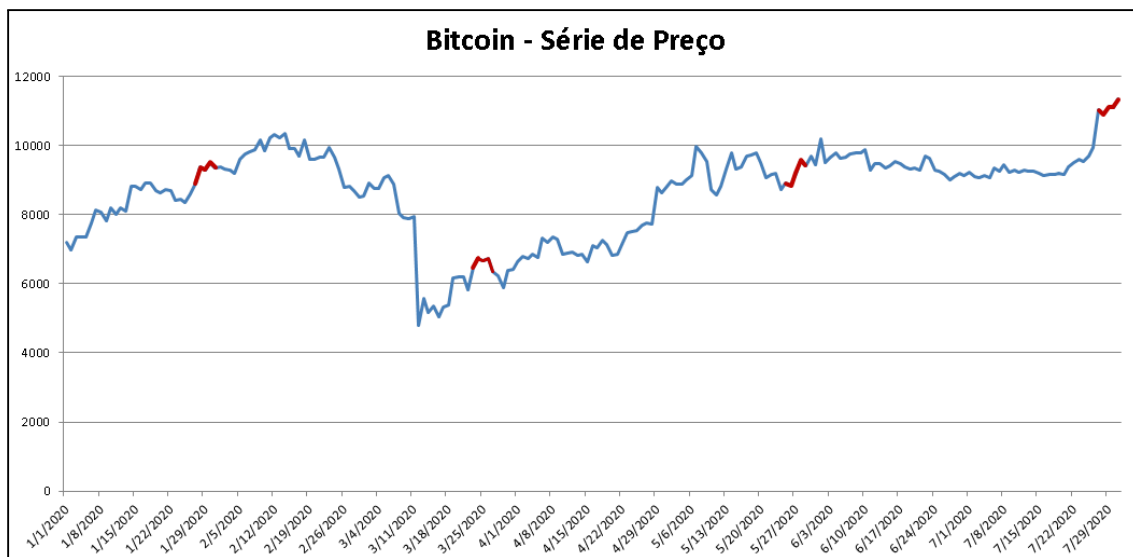
Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 3 também foi utilizado um multiplicador de fator 1.000 na média e mediana, dada a dimensão muito pequena dos valores observados. Assim como na tabela 2, o p-Valor dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller são muito próximos de 0, indicando que a distribuição dos retornos não é normal.

Dos dias observados, o de maior média de retorno foi o dia 25 de março, enquanto o de menor média foram os dias 27 de março e 31 de julho. Pode-se observar também que o desvio padrão das observações variar bastante entre os dias, mostrando que a volatilidade dos retornos pode ser considerada volátil, sendo 0.00213 no dia 25 de março e 0.00040 no dia 29 de julho, uma variação de mais de 500% entre o dia com maior desvio padrão e dia com menor desvio padrão. Outro ponto importante já citado nas análises individuais das tabelas, é o fato de os dados serem não-estacionários, como indica o teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). Também pode-se observar que há dias onde a distribuição se mostrou negativamente assimétrica e dias onde foi positivamente assimétrica, sem nenhuma tendência clara. Além disso, pode-se perceber que houveram dias com distribuições leptocúrticas, mesocúrticas e platicúrticas, dados os valores exibidos de curtose. Para identificar a normalidade dos dados, foi utilizado o teste de Jarque-Bera, e como percebe-se, houve somente um dia, 27 de março, onde o P-valor do teste indica uma significância menor que 10%, portanto percebe-se que os dados indicados não podem ser explicados por uma distribuição normal.

Os dados dos preços do Bitcoin foram obtidos na Binance, que é a maior bolsa de criptoativos do mundo, e permite o acesso público aos dados históricos com frequência de até 1 minuto. O gráfico 8, a seguir, exibe o preço ao longo do período de 2020, com a amostra utilizada sinalizada em vermelho.

Gráfico 8 - Série temporal das cotações do Bitcoin (jan-jul / 2020)



Fonte: Elaboração própria.

Pode-se observar no gráfico 8, assim como as cotações de Bitcoin, que o preço do Bitcoin no período estudado também foi fortemente impactado pela pandemia de Covid-19. Na tabela 4, dos símbolos das amostras do Bitcoin a serem utilizados ao longo do trabalho, utilizando uma abreviação do símbolo do ativo financeiro e um valor crescente referente ao dia da amostra. Posteriormente, as tabelas 5 e 6 mostram o resumo estatístico dos dados utilizados para o Bitcoin, e serão analisados individualmente após a apresentação das tabelas e de forma conjunta em seguida.

Tabela 4 - Tabela dos símbolos das amostras do Bitcoin

Período	27-jan	28-jan	29-jan	30-jan	31-jan	23-mar	24-mar	25-mar	26-mar	27-mar
Ativo	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin
Amostra	BTC-01	BTC-02	BTC-03	BTC-04	BTC-05	BTC-06	BTC-07	BTC-08	BTC-09	BTC-10
Período	25-mai	26-mai	27-mai	28-mai	29-mai	27-jul	28-jul	29-jul	30-jul	31-jul
Ativo	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin	Bitcoin
Amostra	BTC-11	BTC-12	BTC-13	BTC-14	BTC-15	BTC-16	BTC-17	BTC-18	BTC-19	BTC-20

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 5 - Resumo estatístico da amostra do Bitcoin (jan - mar / 2020).

Amostra	BTC-01	BTC-02	BTC-03	BTC-04	BTC-05	BTC-06	BTC-07	BTC-08	BTC-09	BTC-10
Estadística	27-jan	28-jan	29-jan	30-jan	31-jan	23-mar	24-mar	25-mar	26-mar	27-mar
Média (x1000)	0.021	0.035	-0.007	0.017	-0.011	0.080	0.022	-0.003	0.001	-0.040
Mediana (x1000)	0.016	0.017	-0.012	0.009	-0.012	0.016	0.005	0.048	-0.015	-0.021
Máximo	0.004	0.009	0.004	0.003	0.002	0.024	0.010	0.013	0.006	0.012
Mínimo	-0.005	-0.006	-0.008	-0.010	-0.003	-0.018	-0.009	-0.017	-0.011	-0.019
Desv. Padrão	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
Assimetria	0.029	1.054	-1.328	-2.575	-0.139	1.741	-0.104	-0.783	-0.868	-4.878
Curtose	5.818	15.180	14.490	29.247	1.696	24.716	2.852	15.049	12.510	87.369
Jarque-Bera	2012.9	13978.7	12915.6	52504.1	175.0	37086.4	485.4	13623.2	9492.8	460160.0
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ADF	-26.5	-9.7	-13.1	-40.0	-38.2	-39.8	-17.2	-10.4	-13.2	-22.4
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Nº de Observações	1439	1439	1439	1439	1439	1439	1439	1439	1439	1439

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 5, assim como nas tabelas 2 e 3, os valores de média estão muito próximos de 0, por o cálculo do retorno ter sido realizado minuto a minuto, os observados estão na casa de 0.01%. Assim como nas tabelas 2 e 3, para melhor visualização desses dados, foi utilizado um multiplicador de fator 1.000 na média e mediana. Vale notar que na tabela 5, o p-Valor dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller também são muito próximos de 0, indicando que a distribuição dos retornos do Bitcoin não é normal. Assim como para o índice Ibovespa, o mês com maior desvio padrão de retornos foi março, sendo o dia com maior desvio padrão também o dia 23 de março.

Tabela 6 - Resumo estatístico da amostra do Bitcoin (mai - jul / 2020).

Amostra	BTC-11	BTC-12	BTC-13	BTC-14	BTC-15	BTC-16	BTC-17	BTC-18	BTC-19	BTC-20
Estatística	25-mai	26-mai	27-mai	28-mai	29-mai	27-jul	28-jul	29-jul	30-jul	31-jul
Média (x1000)	0.018	-0.004	0.029	0.028	-0.012	0.074	-0.011	0.011	0.001	0.013
Mediana (x1000)	0.003	-0.014	-0.001	0.000	-0.007	0.058	0.035	0.015	-0.005	0.018
Máximo	0.116	0.041	0.046	0.105	0.220	0.342	0.046	0.221	0.039	0.035
Mínimo	0.003	0.003	0.001	0.004	0.002	0.002	0.004	0.006	0.002	0.001
Desv. Padrão	0.006	0.002	0.003	0.003	0.007	0.032	0.006	0.007	0.003	0.004
Assimetria	10.210	6.395	6.881	20.623	20.295	4.890	1.057	22.332	5.625	2.987
Curtose	136.011	62.913	71.138	569.870	540.761	31.007	1.710	625.645	54.082	13.838
Jarque-Bera	1125572.6	245255.6	312401.0	19424559.4	17509937.4	62910.2	440.2	23409570.9	181573.5	13530.4
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ADF	-6.9	-16.8	-7.5	-25.1	-13.9	-6.0	-4.3	-25.0	-16.2	-2.6
p-Valor	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.093
Nº de Observações	1438	1438	1438	1438	1439	1438	1438	1438	1438	1439

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 6 também foi utilizado um multiplicador de fator 1.000 na média e mediana, dada a dimensão muito pequena dos valores observados. Assim como nas tabelas 3, 4 e 5, o p-Valor dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller são muito próximos de 0, indicando que a distribuição dos retornos não é normal.

De todas as amostras observadas nas tabelas 5 e 6, o dia com maior média de retornos foi o dia 23 de março, com uma média de retornos de 0.008% nos minutos observados, enquanto o dia com menor média de retornos foi o dia 27 de março, dia em que houve também queda expressiva no índice Ibovespa. O desvio padrão observado nos dados de retorno, também possui uma variação expressiva entre as amostras, sendo o dia com maior desvio padrão de retornos o dia 23 de março, e o dia com menor desvio padrão o dia 31 de janeiro. Assim como nos dados do índice Ibovespa, observa-se que os dados são não-estacionários, como indica o teste de Augmented Dick-Fuller (ADF). Também pode-se observar que na maior parte dos dias a distribuição se mostrou negativamente assimétrica. Diferentemente dos dados de Ibovespa, a distribuição tende a ser leptocúrtica na maior parte dos dias observados, dados os valores exibidos de curtose. Para identificar a normalidade dos dados, foi utilizado o teste de Jarque-Bera e o teste de Augmented Dickey-Fuller, e em todos os dias observados, como foi citado nas análises individuais de cada tabela, o valor P foi muito menor que 1%, portanto a distribuição não é normal.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Primeiramente, foram estimados diversos modelos de volatilidade ARCH (p), GARCH (p, q) e EGARCH (p, q, r) para cada uma das 20 amostras selecionadas para os ativos financeiros Bitcoin e Ibovespa. Dentre os modelos da família ARCH, foram estimados as variações dos modelos citados e as variações das distribuições de probabilidade Normal e t de Student. Para cada amostra foram estimados uma média de aproximadamente 30 modelos. Desses modelos estimados foram selecionados os modelos, onde todos os parâmetros ou coeficientes estimados apresentaram significância estatística, de pelo menos 10%, e a seleção de um modelo de volatilidade de cada amostra de cada ativo estudado foi feita utilizando-se os critérios de seleção de modelos de Akaike (AIC) e o critério de Schwarz (BIC). Além disso, utilizou-se a soma de quadrados dos resíduos ou dos erros de estimação (SQR). Selecionado o melhor modelo para cada amostra, foram geradas as séries temporais de volatilidade, e os dados de volatilidade foram analisados para identificar possíveis padrões, diferenças e a associação entre as volatilidades do Bitcoin e do índice Ibovespa em períodos semelhantes. Por fim, foram analisadas e comparadas as associações, dada pelo coeficiente de correlação de Pearson, entre os retornos e entre as volatilidade das séries temporais diárias de Bitcoin e do índice Ibovespa.

Tendo a possibilidade de testar quase infinitas variações de modelos da família ARCH foi necessário reduzir o número de modelos a serem testados para cada amostra. Desse modo, foram primeiramente estimados os seguintes modelos para variância ou para volatilidade: ARCH(1), GARCH (1, 1), EGARCH (1, 0, 0), EGARCH(1, 1, 0) e EGARCH(1, 1, 1). Para média dos retornos .

Também foram testados para cada um desses modelos, três tipos de equações de retorno para a média, representada por c na equação (4): constante: α ; constante multiplicada pelo último retorno: $\beta * y_{t-1}$; e constante somada a outra constante multiplicado pelo último retorno: $\alpha + \beta * y_{t-1}$. Também foram testados os modelos utilizando as distribuições Normal, que também chamada de distribuição Gaussiana, que é uma distribuição muito utilizada em estatística, e foi testada também a distribuição t de Student, muito utilizada para modelar volatilidade e retornos de ativos financeiros.

Utilizando todas as possíveis combinações para os modelos citados acima, temos no total 18 modelos testados para cada uma das observações diárias, tanto de Bitcoin quanto de índice Bovespa, totalizando 720 modelos estimados.

Em algumas observações, nenhum dos modelos obteve um resultado minimamente satisfatório, e nesses casos foram estimados ainda mais modelos da família ARCH, além dos previamente citados. A tabela 7 que atrela o modelo ao seu símbolo, para facilitar a visualização e entendimento da tabela 8, que por sua vez indica os modelos selecionados para cada amostra de dados de retornos diários, do índice Ibovespa, e do Bitcoin.

Tabela 7 - Tabela dos símbolos dos modelos utilizados.

Modelo	Média	Variância	Distribuição de Probabilidade
M-01	α	EGARCH (1 , 0 , 0)	Normal
M-02	α	EGARCH (1 , 1 , 0)	Normal
M-03	α	EGARCH (1 , 1 , 1)	Normal
M-04	α	EGARCH (1 , 0 , 0)	Student
M-05	α	EGARCH (1 , 1 , 0)	Student
M-06	α	EGARCH (1 , 1 , 1)	Student
M-07	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 0 , 0)	Normal
M-08	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 0)	Normal
M-09	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 1)	Normal
M-10	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 0 , 0)	Student
M-11	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 0)	Student
M-12	$\alpha * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 1)	Student
M-13	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 0 , 0)	Normal
M-14	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 0)	Normal
M-15	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 1)	Normal
M-16	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 0 , 0)	Student
M-17	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 0)	Student
M-18	$\alpha + \beta * Y_{t(-1)}$	EGARCH (1 , 1 , 1)	Student

Fonte: Elaboração própria.

Para ficar mais claro, pode-se perceber que existem 18 possíveis modelos a serem utilizados, sendo estes a permutação entre as três diferentes formas de modelar a média descritas na tabela, três fórmulas para variância, sendo EGARCH(1,0,0) referente ao modelo ARCH para variância, EGARCH(1,1,0) referente ao modelo GARCH para variância, e EGARCH(1,1,1) referente ao modelo EGARCH para variância, enquanto existem duas possíveis distribuições de probabilidade, já descritas no texto, a distribuição Normal e t de Student.

Tabela 8 - Modelos utilizados para o índice Ibovespa e Bitcoin.

Amostras	Modelo Utilizado	Amostras	Modelo Utilizado	Amostras	Modelo Utilizado	Amostras	Modelo Utilizado
IBV-01 27-jan	M-15	IBV-11 25-mai	M-05	BTC-01 27-jan	M-02	BTC-11 25-mai	M-17
IBV-02 28-jan	M-01	IBV-12 26-mai	(1)*	BTC-02 28-jan	M-14	BTC-12 26-mai	M-02
IBV-03 29-jan	M-08	IBV-13 27-mai	M-01	BTC-03 29-jan	M-06	BTC-13 27-mai	M-11
IBV-04 30-jan	M-08	IBV-14 28-mai	M-11	BTC-04 30-jan	M-11	BTC-14 28-mai	M-13
IBV-05 31-jan	M-07	IBV-15 29-mai	M-02	BTC-05 31-jan	(4)*	BTC-15 29-mai	M-14
IBV-06 23-mar	M-05	IBV-16 27-jul	M-05	BTC-06 23-mar	M-02	BTC-16 27-jul	M-11
IBV-07 24-mar	M-05	IBV-17 28-jul	(2)*	BTC-07 24-mar	M-05	BTC-17 28-jul	M-11
IBV-08 25-mar	M-08	IBV-18 29-jul	M-02	BTC-08 25-mar	M-02	BTC-18 29-jul	M-05
IBV-09 26-mar	M-05	IBV-19 30-jul	(3)*	BTC-09 26-mar	M-17	BTC-19 30-jul	M-02
IBV-10 27-mar	M-03	IBV-20 31-jul	M-07	BTC-10 27-mar	M-05	BTC-20 31-jul	(5)*

Fonte: Elaboração própria.

(1)* Para o dia 26/05, nenhum dos modelos da tabela 7 foi satisfatório, foi utilizado o modelo $\alpha + \beta * \text{Retorno}(-1) + \gamma * \text{Retorno}(-2)$, com distribuição Normal e variância EGARCH(1, 1, 1)

(2)* Para o dia 28/07, nenhum dos modelos da tabela 7 foi satisfatório, foi utilizado o modelo $\alpha * \text{Retorno}(-2)$, com distribuição Normal e variância EGARCH(1, 1, 0).

(3)* Para o dia 30/07, nenhum dos modelos da tabela 7 foi satisfatório, foi utilizado o modelo $\alpha + \beta * \text{Retorno}(-1) + \gamma * \text{Retorno}(-2)$, com distribuição Normal e variância EGARCH(1, 0, 0).

(4)* Para o dia 31/01, nenhum dos modelos da tabela 7 foi satisfatório, foi utilizado o modelo $\alpha * \text{Retorno}(-2)$, com distribuição de Student e variância EGARCH(1, 1, 1).

(5)* Para o dia 31/01, nenhum dos modelos da tabela 7 foi satisfatório, foi utilizado o modelo $\alpha * \text{Retorno}(-2)$, com distribuição de Student e variância EGARCH(1, 1, 1)

Dentre os modelos selecionados, percebe-se uma clara predominância de modelos utilizando a distribuição de Student, conhecida na literatura de econometria por ser mais predominante na modelagem de retornos de ativos financeiros do que a distribuição gaussiana normal.

Dos modelos obtidos, 9 do total de 40 dias de observações foram do tipo EGARCH(1,0,0), ou seja, só possuem os componentes do modelo ARCH. Dentre esses modelos, 5 dos 8 foram utilizando a equação de autoregressão: $\beta * y_{t-1}$ e a distribuição T de student, o que indica uma predominância desse modelo autoregressivo para a volatilidade, dentro dos modelos ARCH selecionados.

Dos modelos obtidos, 18 do total de 40 dias de observações foram do tipo EGARCH(1 1 0), o que significa que eles possuem um componente de média móvel além do componente de autoregressão, mas não possuem o componente exponencial do EGARCH.

Dentre esses 18 modelos EGARCH (1 1 0), 9 dos 18 foram utilizando a equação de autoregressão: $\beta * y_{t-1}$ e no total 13 dos 18 modelos utilizaram a distribuição T de student, novamente demonstrando que o componente autoregressivo da volatilidade aparenta indicar os movimentos futuros da série temporal de retornos, para ambos os ativos.

Dos modelos obtidos, 13 do total de 40 dias de observações foram do tipo EGARCH(1 1 1), o que indica que em uma parte significativa dos modelos, mas não majoritária, o componente exponencial auxilia na modelagem da volatilidade das séries de retornos, e como já foi citado no capítulo 3, a componente exponencial do modelo EGARCH tende a modelar bem volatilidades autoregressivas cujo impacto é assimétrico, ou seja, situações onde uma variação negativa grande de volatilidade afeta de forma distinta as volatilidades futuras do que uma variação positiva. Dentre esses modelos, 9 dos 13 possuem algum componente de autoregressão em sua equação de volatilidade, reforçando a hipótese de que a volatilidade dos retornos observados nesse projeto podem ser modelados com critérios estatísticos significantes, através de modelos da família ARCH.

Após obter os modelos selecionados, foi possível montar as séries de volatilidade condicional dos modelos ARCH. Em seguida, foi realizada uma análise do resumo estatístico dessas séries de volatilidade, assim como foi feito para as séries de retornos, julgando as características das séries, suas diferenças e suas semelhanças, através de critérios estatísticos, já citados no capítulo 3.

Posteriormente, analisadas individualmente as séries de volatilidade condicional de Bitcoin e do Índice Ibovespa, e então serão comparadas as análises entre si.

Tabela 9 - Resumo estatístico da volatilidade do índice Ibovespa (jan - mar / 2020).

Amostra / Estatística	IBV-01 27-jan	IBV-02 28-jan	IBV-03 29-jan	IBV-04 30-jan	IBV-05 31-jan	IBV-06 23-mar	IBV-07 24-mar	IBV-08 25-mar	IBV-09 26-mar	IBV-10 27-mar
Média	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,117	0,039	0,044	0,053	0,038
Mediana	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,114	0,025	0,041	0,045	0,038
Máximo	0,012	0,005	0,004	0,011	0,011	0,314	0,143	0,286	0,130	0,039
Mínimo	0,000	0,002	0,001	0,002	0,002	0,064	0,008	0,028	0,025	0,035
Desv. Padrão	0,002	0,000	0,001	0,001	0,001	0,018	0,032	0,019	0,022	0,001
Assimetria	2,600	5,232	0,289	2,442	6,110	4,062	1,337	7,989	1,291	-1,095
Curtose	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	34,520	0,554	85,655	0,935	0,000
Jarque-Bera	2357,9	41104,6	28,1	1508,3	75737,9	27202,2	163,0	163600,8	164,5	143,9
p-Valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
ADF	-3,5	-6,4	-2,8	-3,8	-21,6	-6,0	-2,0	-18,1	-1,5	-11,6
p-Valor	0,009	0,000	0,064	0,003	0,000	0,000	0,278	0,000	0,536	0,000
Nº de Observações	536	539	538	535	535	529	529	527	529	530

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 9 pode-se observar que no mês de março a média da volatilidade está muito maior que em janeiro, e atinge seu maior valor de 0,117 no dia 23 de março. Além disso, os

p-Valores dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller estão muito próximos de 0, indicando que não é uma distribuição normal.

Tabela 10 - Resumo estatístico da volatilidade do índice Ibovespa (mai - jul / 2020).

Amostra	IBV-11 25-mai	IBV-12 26-mai	IBV-13 27-mai	IBV-14 28-mai	IBV-15 29-mai	IBV-16 27-jul	IBV-17 28-jul	IBV-18 29-jul	IBV-19 30-jul	IBV-20 31-jul
Média	0.003	0.004	0.004	0.005	0.008	0.003	0.003	0.002	0.002	0.003
Mediana	0.002	0.004	0.003	0.004	0.006	0.002	0.002	0.001	0.002	0.003
Máximo	0.029	0.007	0.021	0.016	0.049	0.024	0.003	0.009	0.006	0.013
Mínimo	0.002	0.002	0.001	0.001	0.003	0.001	0.002	0.000	0.001	0.002
Desv. Padrão	0.003	0.001	0.002	0.003	0.006	0.003	0.000	0.001	0.001	0.001
Assimetria	5.488	-0.053	3.007	1.484	3.376	3.498	2.374	2.640	1.587	9.329
Curtose	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Jarque-Bera	35251.1	14.7	5630.0	302.7	6797.9	6584.6	1808.3	2960.4	390.1	294097.9
p-Valor	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ADF	-13.2	-2.1	-6.1	-3.0	-4.0	-3.8	-7.0	-6.5	-5.0	-24.0
p-Valor	0.000	0.260	0.000	0.034	0.001	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
Nº de Observações	531	532	530	533	533	533	532	533	534	534

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 10 pode-se observar, assim como na tabela 9, que não é uma distribuição normal dados os valores dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller.

Em relação ao resumo estatístico, pode-se observar que os dados são não-estacionários, como indica o teste de Augmented Dick-Fuller (ADF). Também é possível observar que a distribuição é fortemente assimétrica na maioria dos dias observados, tendendo a ser em maioria positivamente assimétrica. Além disso, percebe-se que na maioria dos dias as distribuições tendem a ser mesocorticais, dados os valores exibidos de curtose. Para identificar a normalidade dos dados, foi utilizado o teste de Jarque-Bera, e como percebe-se, houve somente um dia onde o P-valor do teste indica uma significância menor que 10%, portanto percebemos que os dados indicados não podem ser explicados por uma distribuição normal.

Para analisar a volatilidade condicional dos modelos da família ARCH utilizados para os retornos do Bitcoin, assim como foi feito para o índice Ibovespa, foi gerado um gráfico sobrepondo o seu retorno e a volatilidade condicional, em eixos diferentes.

Tabela 11 - Resumo estatístico da volatilidade do Bitcoin (jan - mar / 2020).

Amostra / Estatística	BTC-01 27-jan	BTC-02 28-jan	BTC-03 29-jan	BTC-04 30-jan	BTC-05 31-jan	BTC-06 23-mar	BTC-07 24-mar	BTC-08 25-mar	BTC-09 26-mar	BTC-10 27-mar
Média	0,005	0,009	0,006	0,006	0,003	0,049	0,031	0,023	0,011	0,010
Mediana	0,004	0,006	0,004	0,004	0,003	0,029	0,027	0,021	0,009	0,006
Máximo	0,033	0,148	0,054	0,095	0,013	3,140	0,123	0,889	0,170	0,552
Mínimo	0,002	0,002	0,003	0,002	0,001	0,024	0,012	0,017	0,006	0,003
Desv. Padrão	0,004	0,012	0,005	0,007	0,002	0,141	0,016	0,024	0,010	0,029
Assimetria	2,944	7,534	4,864	6,358	1,819	16,617	2,439	32,520	9,739	13,994
Curtose	12,855	67,974	28,817	55,869	0,000	308,768	7,549	1159,059	116,813	221,754
Jarque-Bera	11900,3	288465,8	55053,8	195366,3	2308,6	5738606,6	4810,4	80131058,3	834528,6	2972690,6
p-Valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
ADF	-5,6	-5,6	-8,8	-6,7	-6,2	-18,4	-5,0	-37,9	-8,1	-9,4
p-Valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Nº de Observações	1438	1438	1438	1438	1437	1438	1438	1437	1438	1438

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 11, assim como na tabela 9 do índice Ibovespa, pode-se observar que no mês de março a média da volatilidade está muito maior que em janeiro, e atinge seu maior valor de 0,049 no dia 23 de março. Também como na tabelas 9 e 10, os p-Valores dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller estão muito próximos de 0, indicando que não é uma distribuição normal.

Tabela 12 - Resumo estatístico da volatilidade do Bitcoin (mai - jul / 2020).

Amostra / Estatística	BTC-11 25-mai	BTC-12 26-mai	BTC-13 27-mai	BTC-14 28-mai	BTC-15 29-mai	BTC-16 27-jul	BTC-17 28-jul	BTC-18 29-jul	BTC-19 30-jul	BTC-20 31-jul
Média	0,007	0,006	0,004	0,005	0,005	0,020	0,015	0,008	0,004	0,005
Mediana	0,006	0,005	0,004	0,005	0,004	0,010	0,014	0,007	0,004	0,004
Máximo	0,116	0,041	0,046	0,105	0,220	0,342	0,046	0,221	0,039	0,035
Mínimo	0,003	0,003	0,001	0,004	0,002	0,002	0,004	0,006	0,002	0,001
Desv. Padrão	0,006	0,002	0,003	0,003	0,007	0,032	0,006	0,007	0,003	0,004
Assimetria	10,210	6,395	6,881	20,623	20,295	4,890	1,057	22,332	5,625	2,987
Curtose	136,011	62,913	71,138	569,870	540,761	31,007	1,710	625,645	54,082	13,838
Jarque-Bera	1125572,6	245255,6	312401,0	19424559,4	17509937,4	62910,2	440,2	23409570,9	181573,5	13530,4
p-Valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
ADF	-6,9	-16,8	-7,5	-25,1	-13,9	-6,0	-4,3	-25,0	-16,2	-2,6
p-Valor	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,000	0,093
Nº de Observações	1438	1438	1438	1438	1439	1438	1438	1438	1438	1439

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 12, conseguimos perceber que os p-Valores dos testes de Jarque-Bera e Augmented Dickey-Fuller também estão muito próximos de 0, sendo o maior valor observado 0.093 no dia 31 de julho, que ainda é um valor baixo para indicar normalidade da distribuição, portanto, pode-se considerar que não é uma distribuição normal.

Em relação ao resumo estatístico, assim como no índice Ibovespa, pode-se observar que os dados são não-estacionários, como indica o teste de Dickey e Fuller Aumentado (ADF). Outra semelhança com os dados de volatilidade condicional do índice Ibovespa, é o fato de a distribuição ser fortemente assimétrica na maioria dos dias observados, e nesse caso ser maioria positivamente assimétrica em todos os dias observados. Uma diferença marcante, é o fato de os dados de volatilidade condicional de Bitcoin, diferentemente dos dados

observados para o índice Bovespa, possuírem valores altíssimos para Curtose, o que indica que as distribuições são fortemente leptocúrticas (há uma concentração maior do que a normal entre poucos múltiplos do desvio padrão). Isso pode ocorrer por haverem desvios extremamente largos na volatilidade do Bitcoin, dado que criptoativos possuem uma volatilidade alta já observada desde o início de sua presença no mercado. Sendo assim, existem momentos de *clusters* de volatilidade, que tornam a distribuição leptocúrtica. Assim como no índice Ibovespa, foi utilizado o teste de Jarque-Bera, e como pode-se perceber, houve somente um dia onde o P-valor do teste indica uma significância menor que 10%, portanto percebemos que os dados indicados não podem ser explicados por uma distribuição normal.

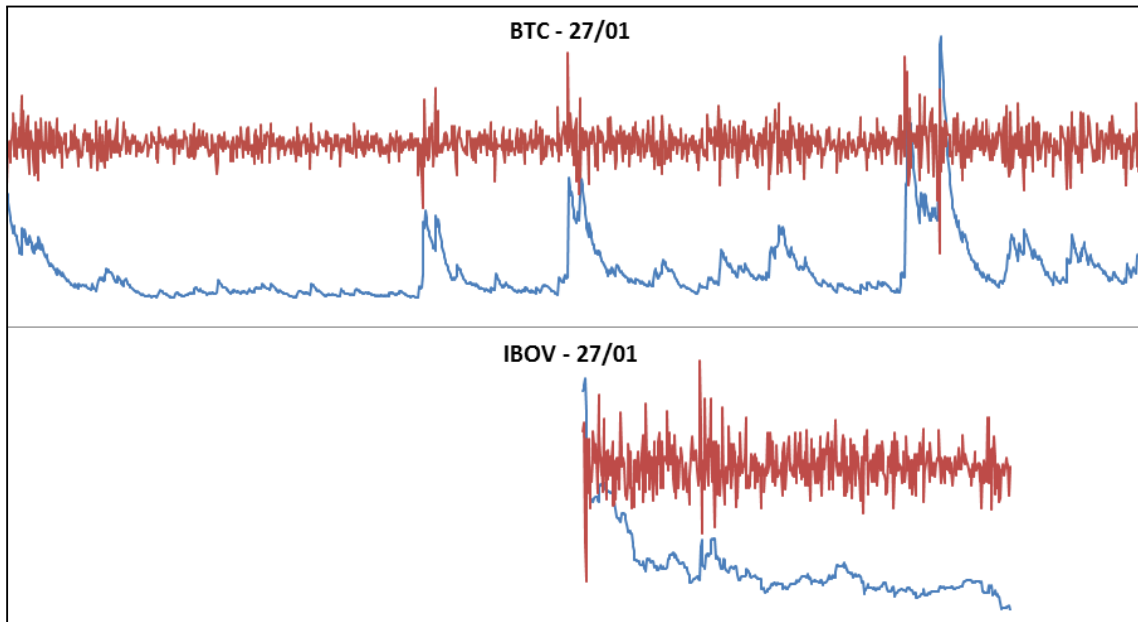
5.1. Análise das volatilidades

Será analisado cada um dos dias observados, tanto para o Bitcoin quanto para o IBOV, todas as semelhanças e diferenças entre as volatilidades e retornos observados minuto a minuto.

Nos gráficos de 9 a 28, a linha vermelha indica o retorno minuto a minuto, enquanto a linha azul representa a volatilidade condicional do modelo da família ARCH utilizado. Os resumos estatísticos das séries de retornos utilizadas está nas tabelas 2, 3, 5 e 6, enquanto o modelo da família ARCH que foi utilizado para o cálculo da volatilidade estão descritos na tabela 8, e os resumos estatísticos das séries de volatilidade obtidas estão nas tabelas 9, 10, 11 e 12. Também vale notar que foi calculado o índice de correlação de Pearson entre as séries de retornos do Bitcoin e do índice Ibovespa para os retornos no tempo em comum de funcionamento de ambos mercados, e estão descritos nas tabelas 13 e 14. Vale notar também que a escala de todos os gráficos, do gráfico 9 ao 28 são iguais para manter a homogeneidade da análise, mas foram retiradas para facilitar a visualização.

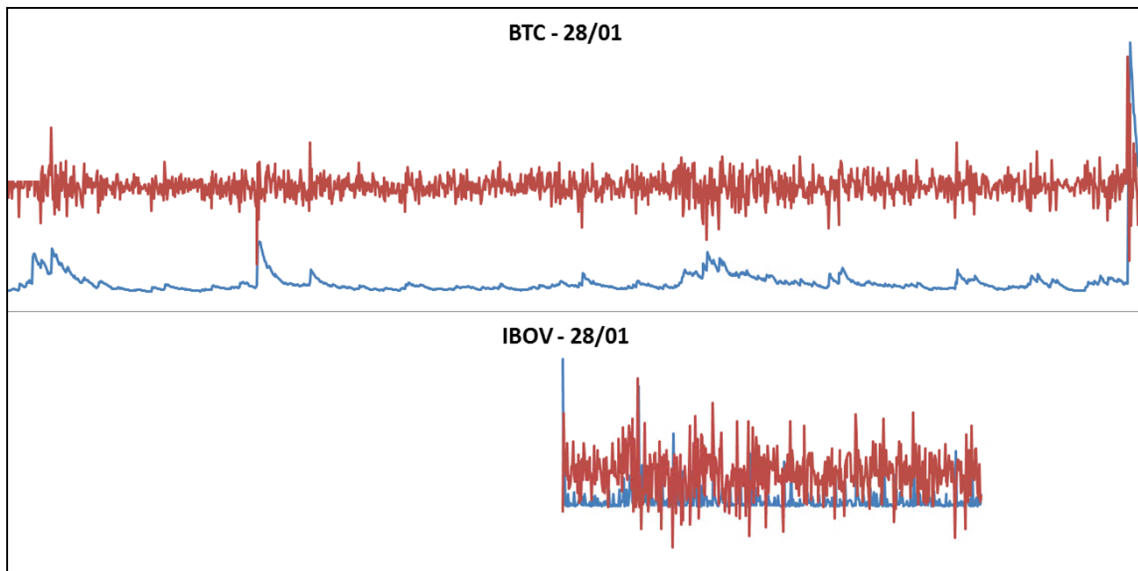
Nos gráficos 9 a 13 estão os dados de Janeiro, quando houve o início da disseminação do COVID, ainda predominantemente na China, portanto não haviam muitas preocupações referentes ao assunto, inclusive a bolsa estava perto de sua máxima histórica.

Gráfico 9 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/01



Fonte: Elaboração própria.

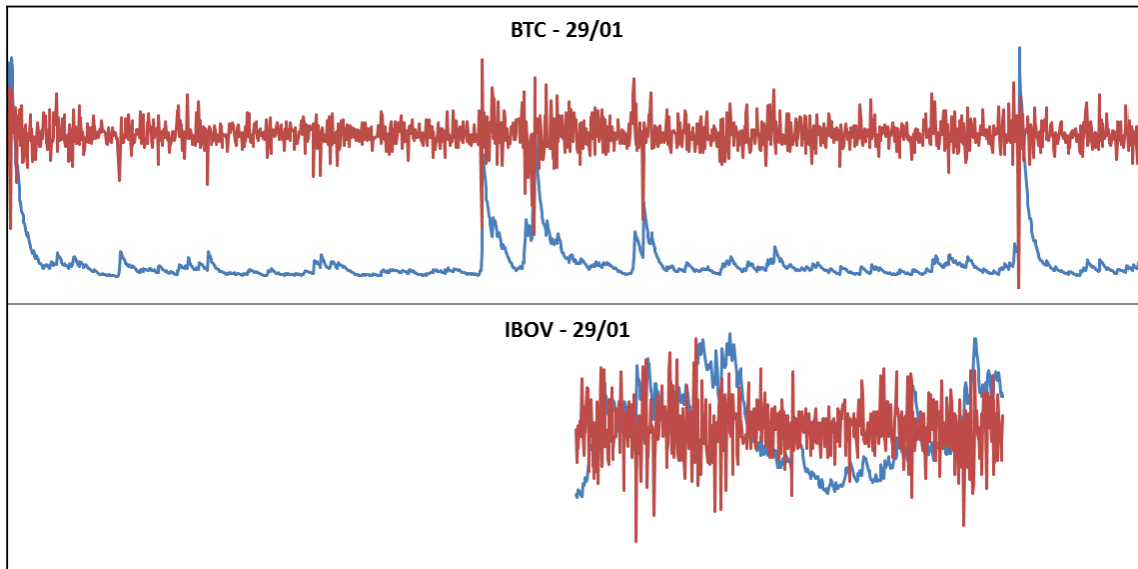
Gráfico 10 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/01



Fonte: Elaboração própria.

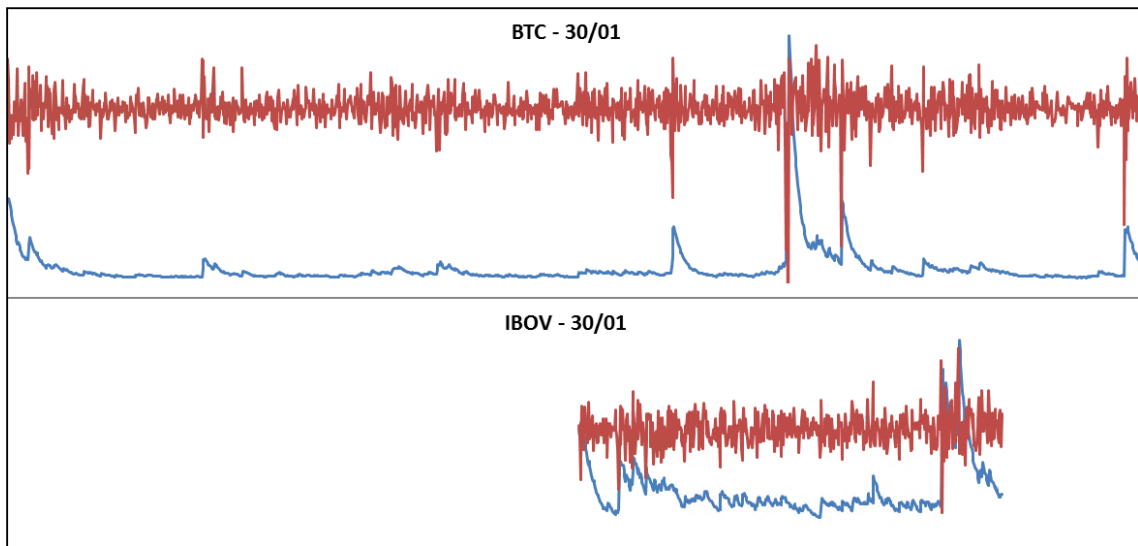
Nos gráficos 9 e 10, existem diversos clusters de volatilidade, o que é um bom cenário para utilizar modelos da família ARCH, e no início da operação do índice Ibovespa no dia 27 de janeiro por volta das nove horas da manhã, existe um aumento na volatilidade tanto do índice Ibovespa quanto do Bitcoin, provavelmente devido a um fator macroeconômico comum a ambos.

Gráfico 11 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/01



Fonte: Elaboração própria.

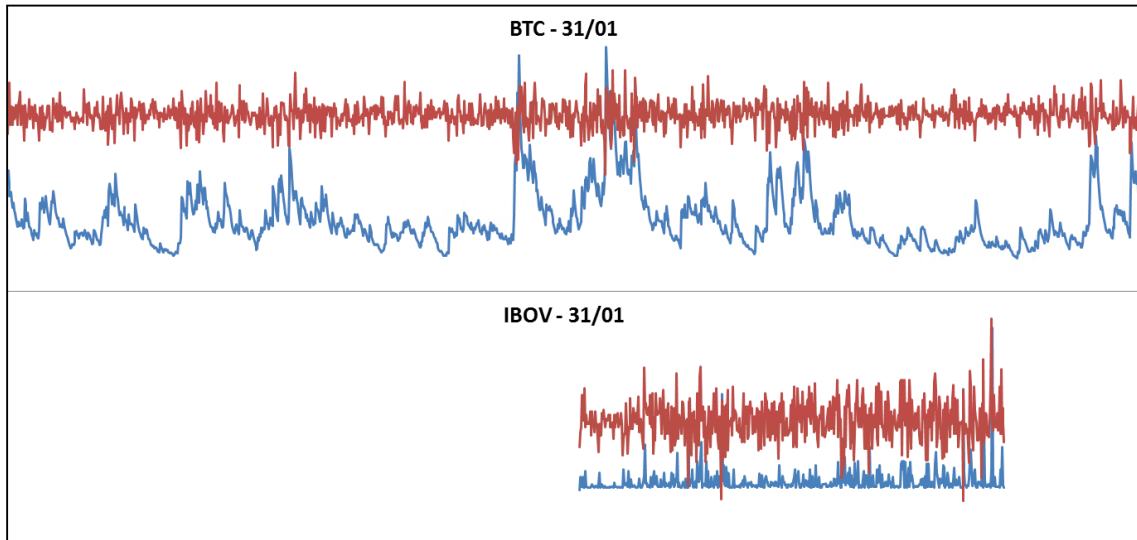
Gráfico 12 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 30/01



Fonte: Elaboração própria.

Nos gráficos 11 e 12, pode-se observar que houveram movimentos de aumento da volatilidade em diferentes momentos para o Bitcoin e para o índice Ibovespa, o que indica uma desconexão do retorno desses ativos, podendo ser causados por fatores distintos.

Gráfico 13 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 31/01

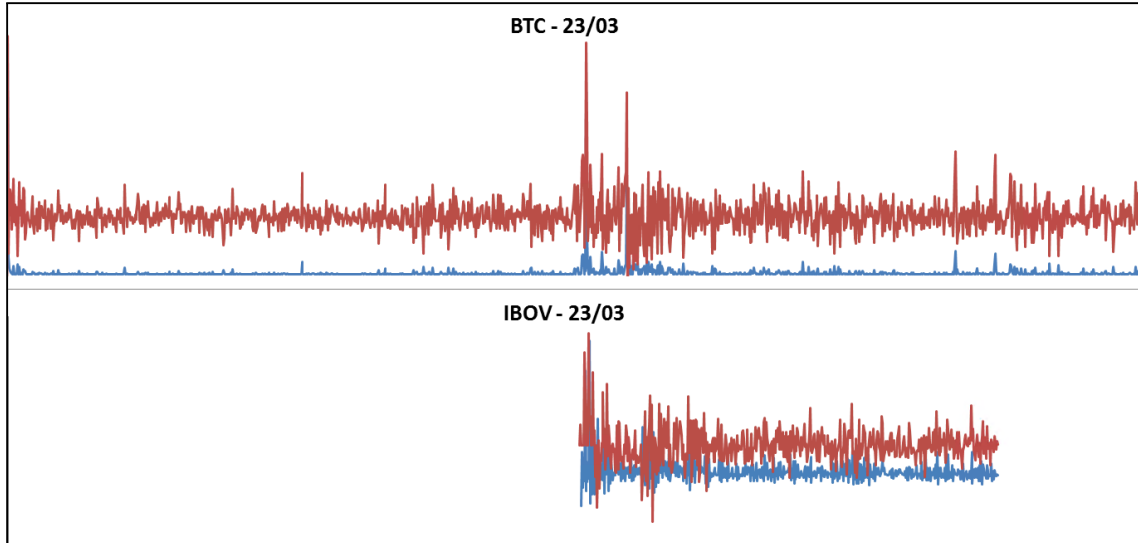


Fonte: Elaboração própria.

Como pode-se observar, tanto para o Índice Ibovespa quanto para o Bitcoin, o dia 27 teve uma volatilidade mais ampla, enquanto nos outros dias, principalmente para o Bitcoin, houve flutuações menores ao longo do dia, com ocasionais picos de volatilidade como pode-se observar nos dias 29 e 30. Já o Índice Ibovespa, aparenta ter sua volatilidade mais ampla também no dia 29. Vale ressaltar que não existe um padrão claro entre as correlações do retornos entre ambos ativos dos dias observados, sendo negativa em 4 dos 5 dias, porém em todos sua magnitude é menor que 0.1. Também nota-se que a correlação entre a volatilidade dos ativos foi positiva em 3 dos 5 dias observados, com seu maior valor em magnitude de -0.187 no dia 30.

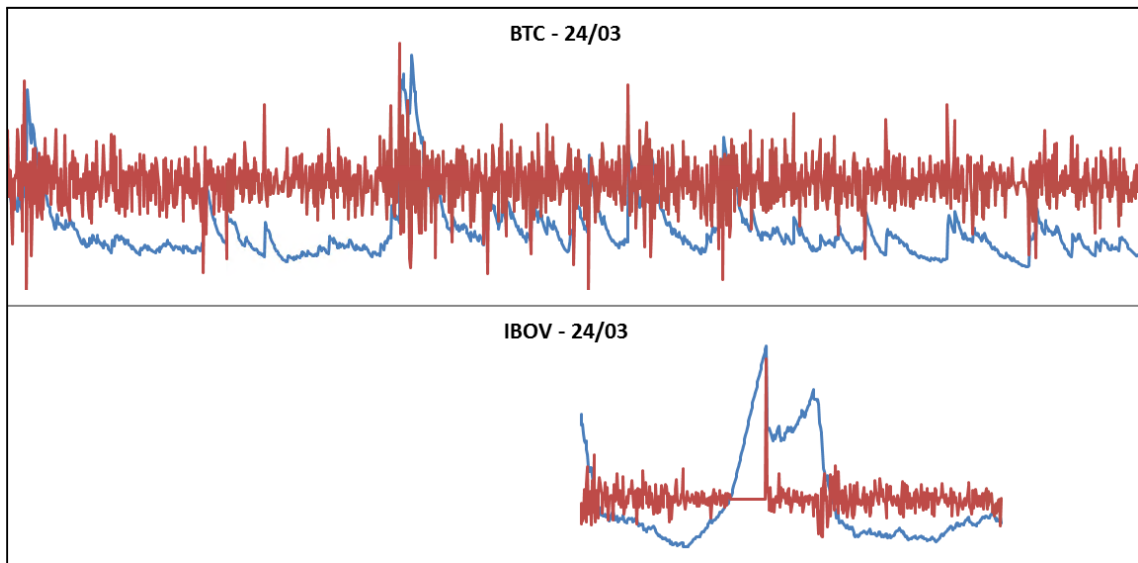
Nos gráficos 14 a 18 estão os dados de Março, nessa época já havia uma preocupação maior com a pandemia de COVID-19, mas ainda da decretação do fechamento parcial da economia. Porém, nessa época, a volatilidade dos mercados estava notoriamente maior, inclusive o Índice Ibovespa caiu quase 50% no final de fevereiro devido a preocupação em relação ao COVID.

Gráfico 14 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 23/03



Fonte: Elaboração própria.

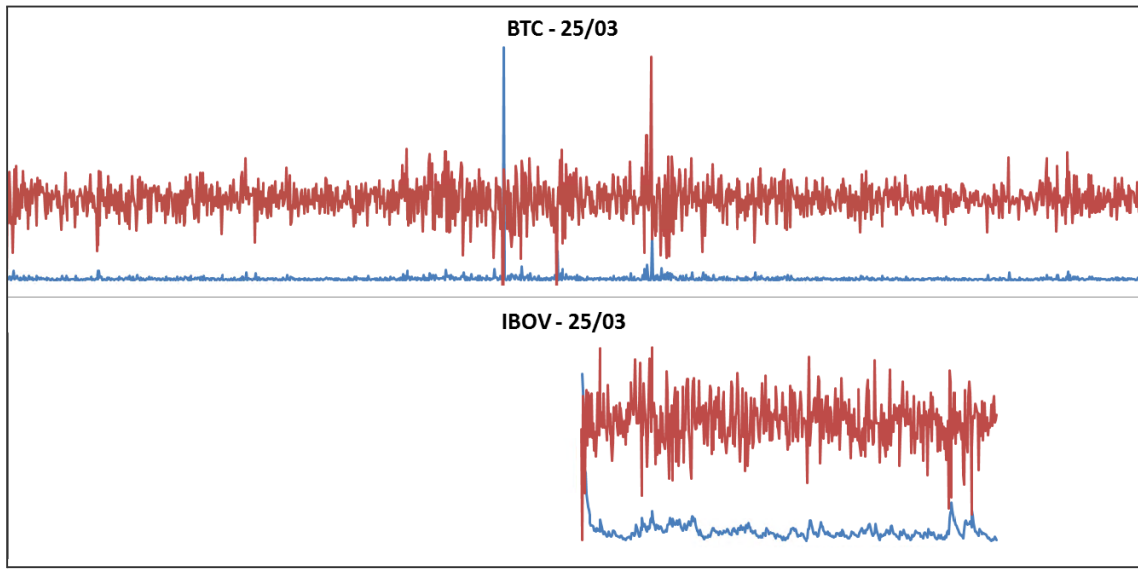
Gráfico 15 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 24/03



Fonte: Elaboração própria.

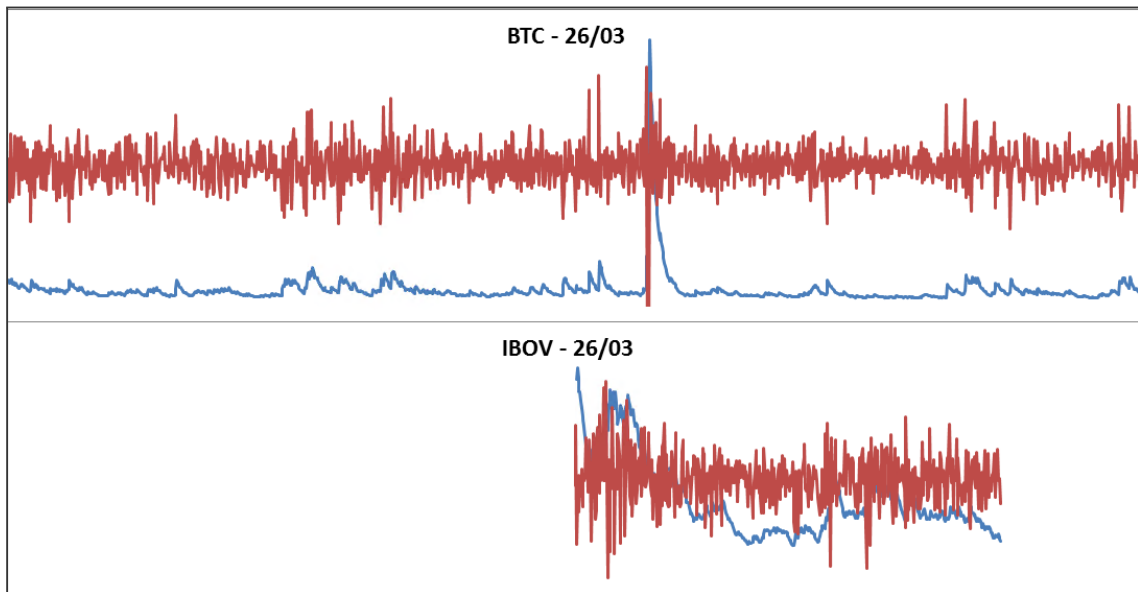
Nos gráficos 14 e 15, observa-se um aumento muito grande na volatilidade quando comparados aos gráficos 9 a 13 de janeiro. Vale notar o pico na volatilidade do Bitcoin e do índice Ibovespa cerca de nove horas da manhã do dia 23 de março, no gráfico 14, que ocasionou um aumento muito grande no desvio padrão de seus retornos, como vimos nas tabelas 2 e 4.

Gráfico 16 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 23/03



Fonte: Elaboração própria.

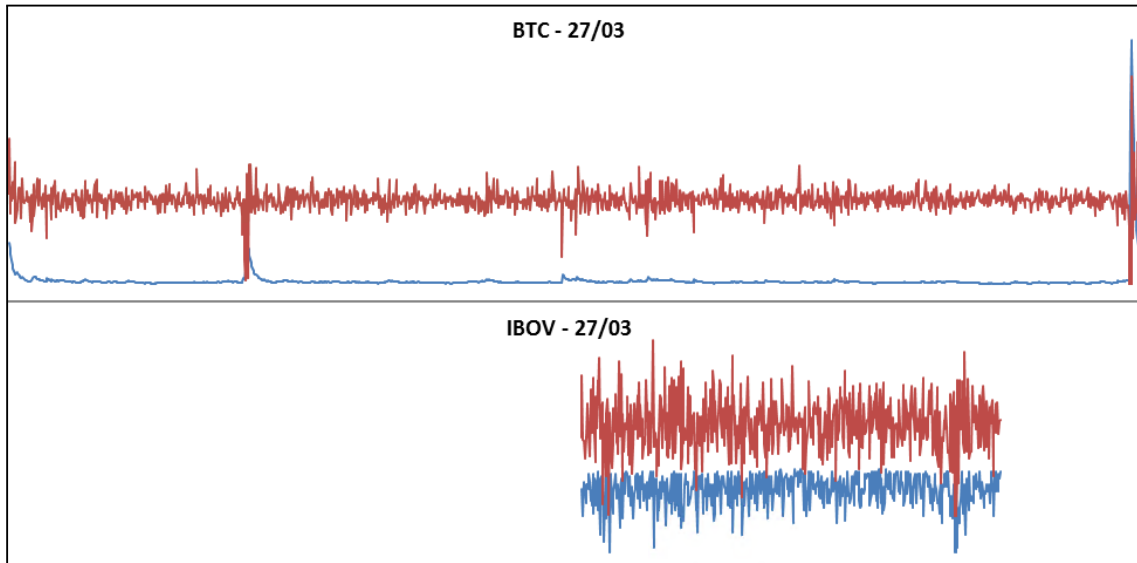
Gráfico 17 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 26/03



Fonte: Elaboração própria.

Nos gráficos 16 e 17, observa-se que a volatilidade segue maior do que quando em janeiro, com valores um pouco menores do que nos gráficos 14 e 15. Também é possível notar que houveram aumentos da volatilidade em momentos distintos no Bitcoin e no índice Ibovespa.

Gráfico 18 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/03



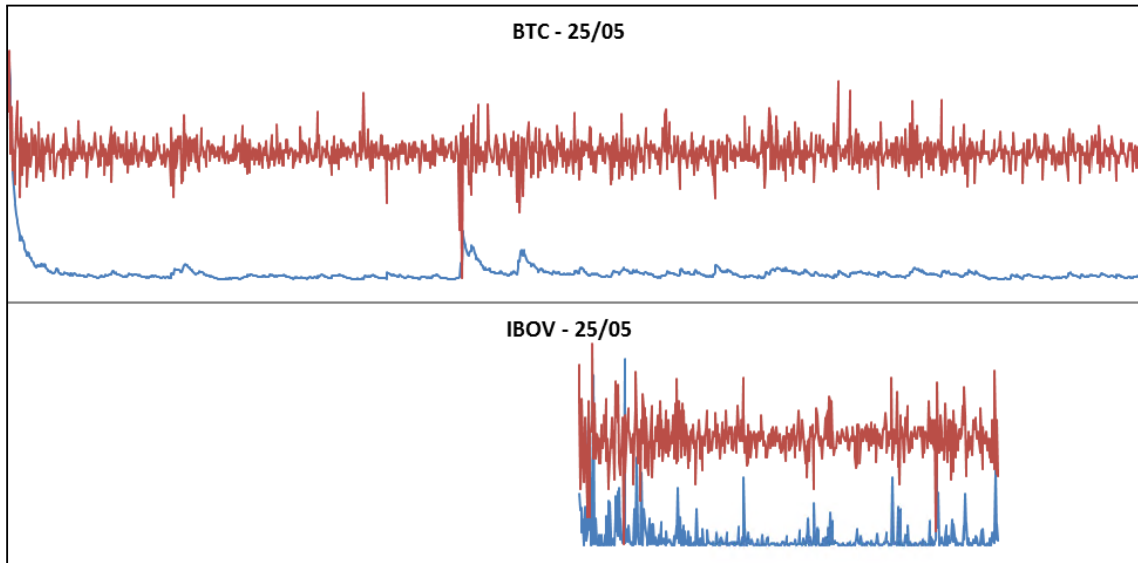
Fonte: Elaboração própria.

Nos gráficos 14 a 18 pode-se observar, principalmente nos gráficos de volatilidade condicional, que o mercado estava mais volátil devido ao COVID-19 e as recentes quedas em todas as bolsas do mundo. É possível identificar também, no dia 23, dois picos de volatilidade, provavelmente de perfil global, ou seja, um evento que afeta todos os mercados de capitais, dado que tanto o Índice Ibovespa quanto o BTC aparentam ter sido afetados. Pode-se notar que não existe um padrão claro entre as correlações dos retornos entre os ativos dos dias observados, sendo positiva em 2 dos 5 dias, e a maior magnitude encontrada é de 0.359397 no dia 23/03, que é um valor bem expressivo, principalmente se tratando de ativos financeiros. Vale ressaltar também que a correlação entre as volatilidades dos ativos analisados teve seu maior valor absoluto no dia 27/03, com uma correlação negativa de -0.178.

5.1.1. Dados de Maio

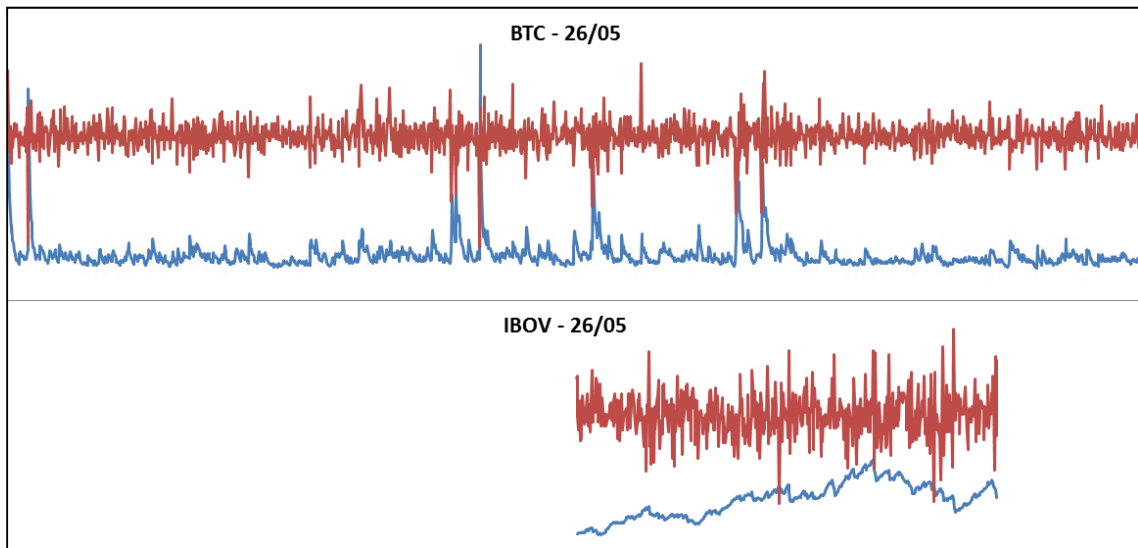
Nos gráficos 19 a 23, estão os dados de Maio, onde já havia uma preocupação maior com COVID, mas ainda antes do fechamento parcial da economia. Porém, nessa época, a volatilidade dos mercados estava notoriamente maior, inclusive o Índice Ibovespa caiu quase 50% no final de fevereiro devido a preocupação em relação ao COVID.

Gráfico 19 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 25/05



Fonte: Elaboração própria.

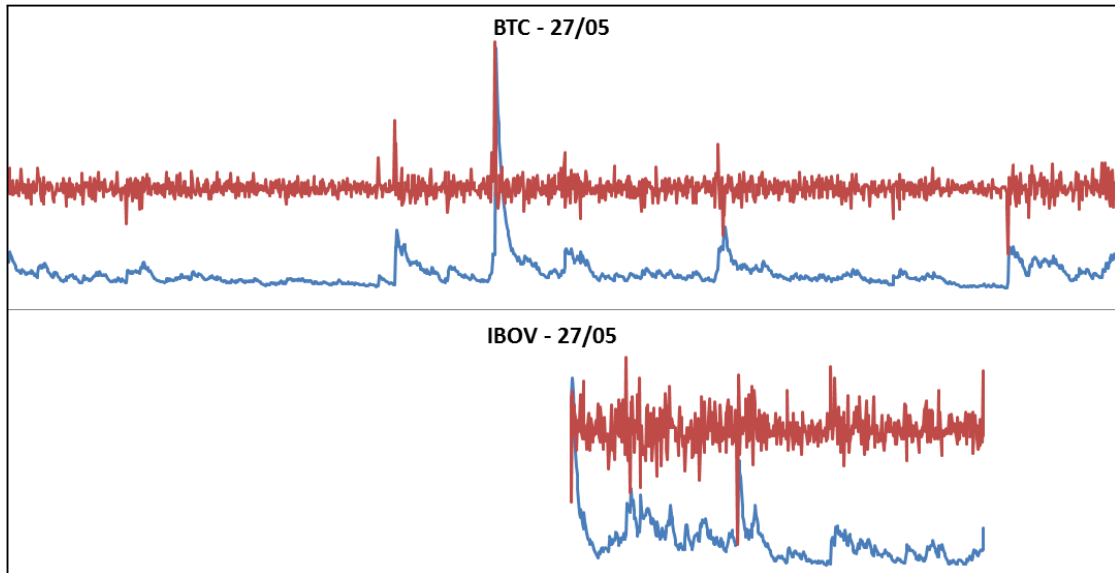
Gráfico 20 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 26/05



Fonte: Elaboração própria.

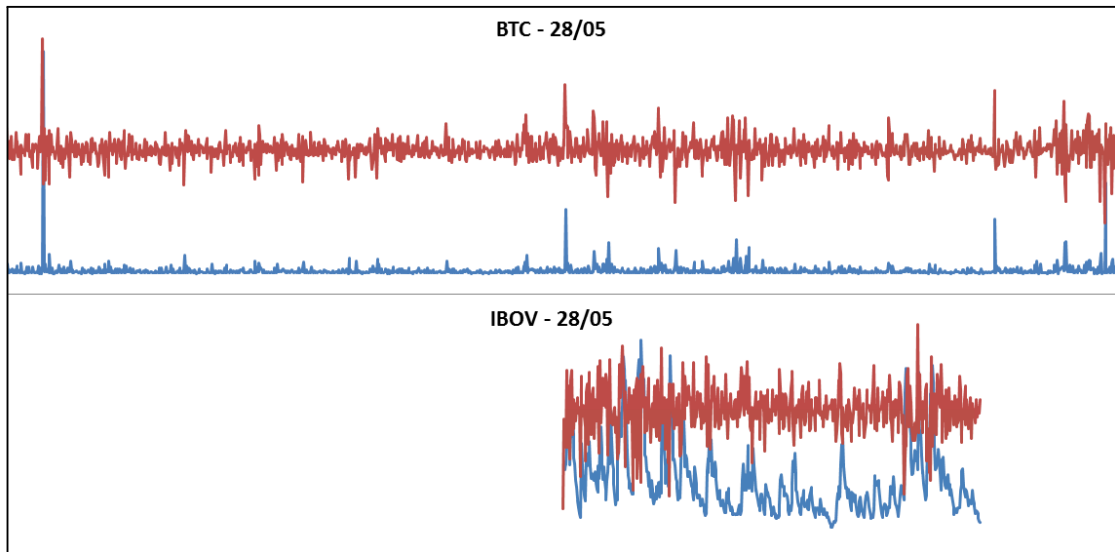
Nos gráficos 19 e 20, é possível notar que a volatilidade está menor que em março, assim como observamos nas tabelas 2, 3, 4 e 5. Mesmo assim, existem clusters de volatilidade acentuados, principalmente nas amostras do índice Ibovespa.

Gráfico 21 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/05



Fonte: Elaboração própria.

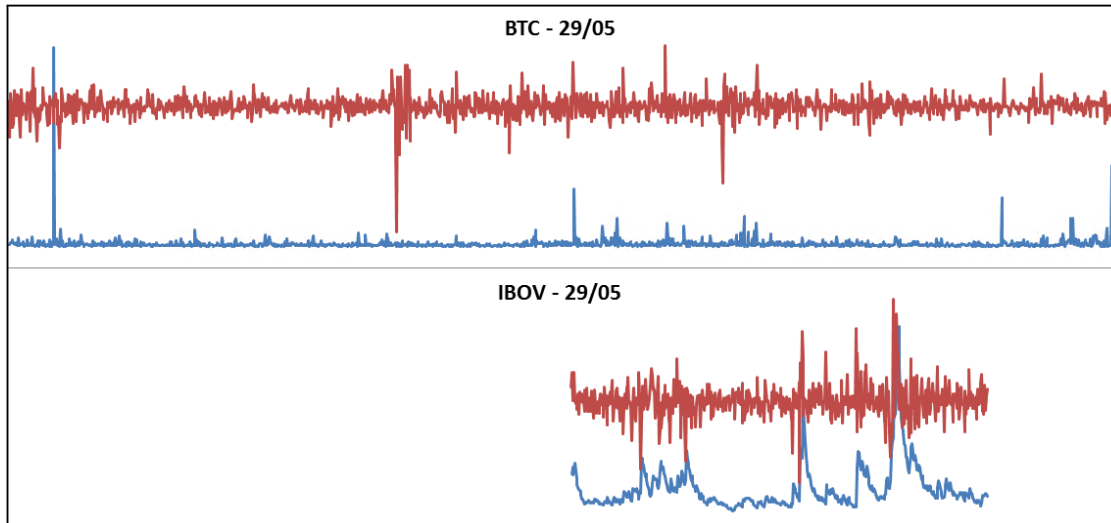
Gráfico 22 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/05



Fonte: Elaboração própria.

Nos gráficos 21 e 22, é possível notar que a volatilidade está menor que em março, assim como observamos nas tabelas 2, 3, 4 e 5. Mesmo assim, existem clusters de volatilidade acentuados, principalmente nas amostras do índice Ibovespa.

Gráfico 23 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/05



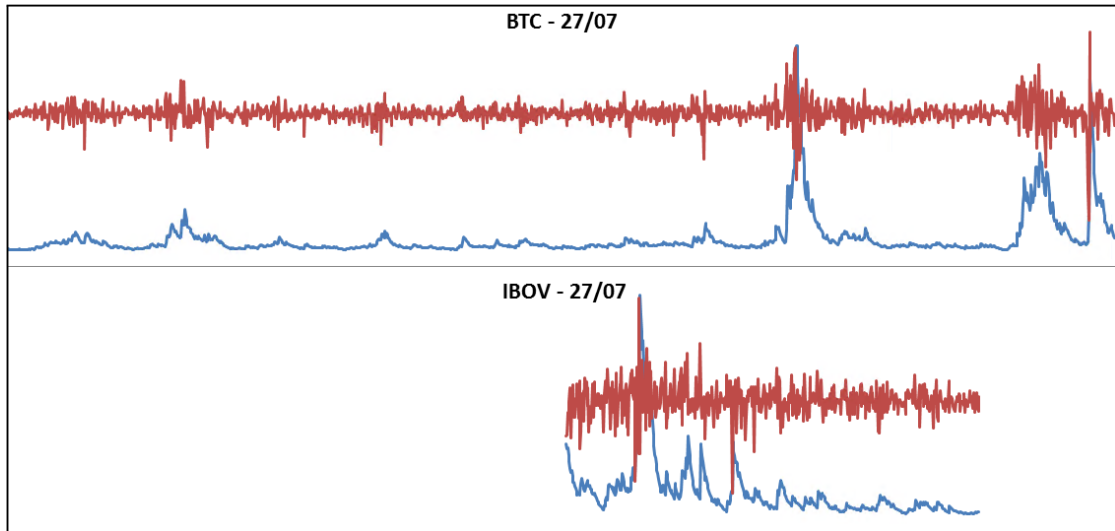
Fonte: Elaboração própria.

Pontos interessantes de serem notados nos gráficos 19 a 23, é que a volatilidade está bem menos ampla que a de março, onde havia maior incerteza em torno do futuro econômico global, por consequência da pandemia. Nos gráficos 21 e 23, referentes aos dias 26 e 28 de maio, houve maior volatilidade no Índice Ibovespa, que não aparenta estar presente no Bitcoin, como pode-se ver nos dias 28 e 29. Pode-se notar que não existe um padrão claro entre as correlações dos retornos dos ativos nos dias observados, sendo positiva em 3 dos 5 dias, e em todos os casos observados em maio foi menor do que 0.06. Outro ponto importante é que em Maio 4 dos 5 dias observados tiveram correlação entre as volatilidades dos ativos foi positiva, com seu maior valor absoluto em 27/05 com 0.421, valor alto quando comparado aos obtidos nos outros dias.

5.1.2. Dados de Julho

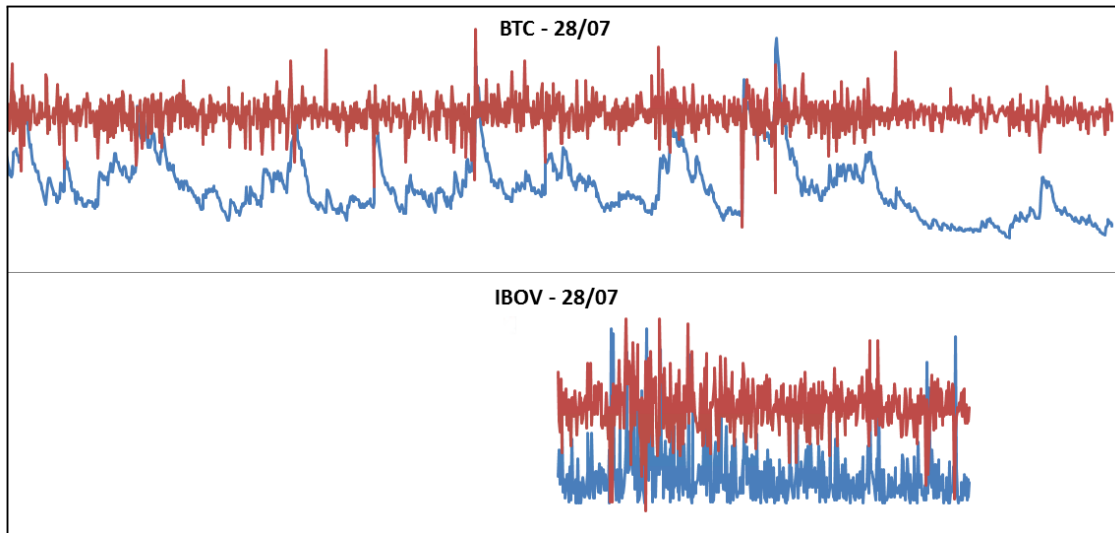
Por fim, abaixo estão os dados de Julho, dos meses observados, é o segundo após fechamento parcial da economia, e nessa época as bolsas do mundo já haviam recuperado parte da sua queda pós-COVID, dado que o cenário era mais estável, e já haviam promessas de vacinas para o ano seguinte, 2021.

Gráfico 24 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 27/07



Fonte: Elaboração própria.

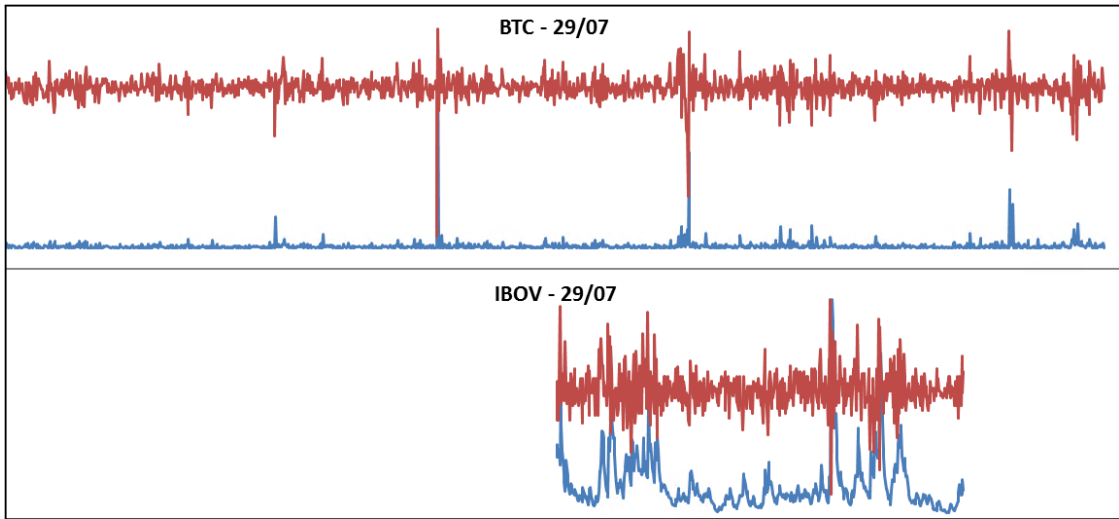
Gráfico 25 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 28/07



Fonte: Elaboração própria.

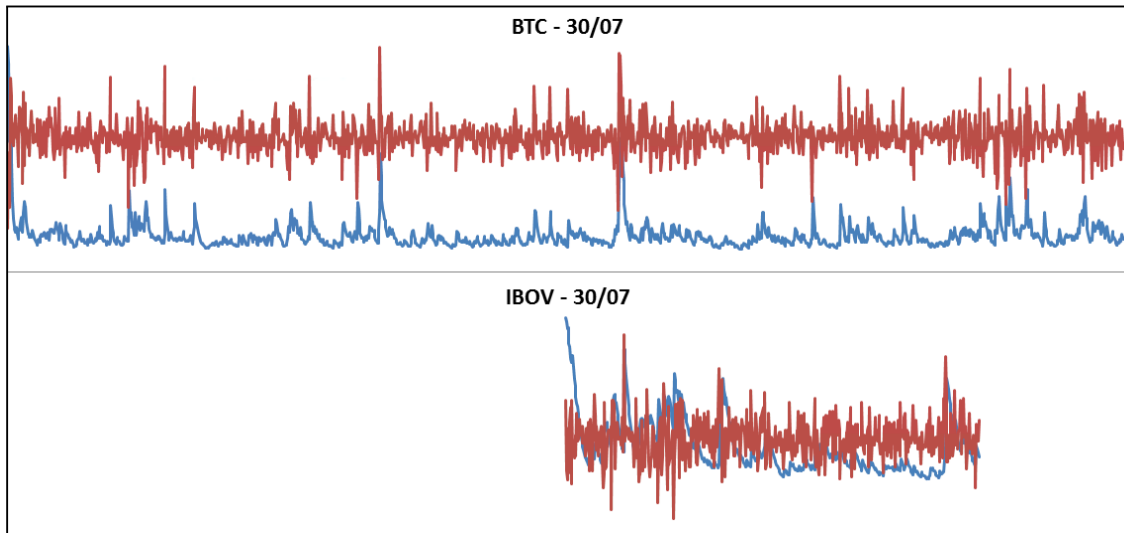
Nos gráficos 24 e 25, pode-se observar um comportamento destoante dos demais, especialmente no dia 28, onde a volatilidade do Bitcoin, e especialmente do índice Ibovespa, variou muito ao longo do dia, criando muitos picos e vales no modelo de volatilidade utilizado.

Gráfico 26 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 29/07



Fonte: Elaboração própria.

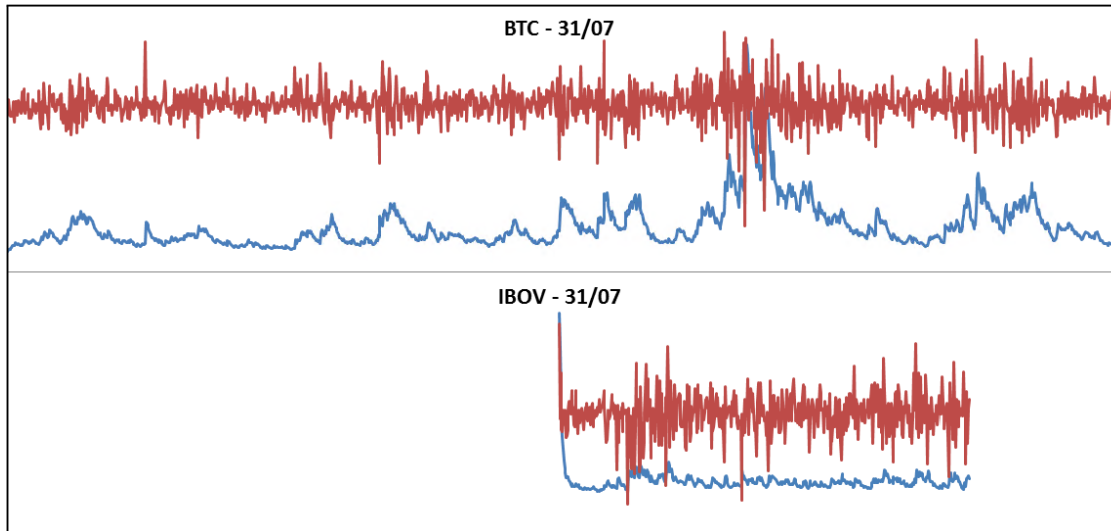
Gráfico 27 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 30/07



Fonte: Elaboração própria.

Nos gráficos 26 e 27, é possível notar alguns picos de magnitude grande na volatilidade e nos retornos, especialmente em Bitcoin, no dia 29 de julho.

Gráfico 28 - Comparação entre dados do índice Ibovespa e Bitcoin para 31/07



Fonte: Elaboração própria.

Pode-se verificar, que Julho foi um mês bem volátil, tanto para o Bitcoin quanto para o Índice Ibovespa. No dia 28, a volatilidade do Bitcoin e do Índice Ibovespa está notoriamente acentuada, e no dia 29 pode-se observar picos muito grande de volatilidade do Bitcoin. Vale ressaltar que assim como nos outros meses não existe um padrão claro entre as correlações dos retornos dos ativos nos dias observados, sendo positiva em 3 dos 5 dias, e em todos os casos observados em maio foi menor do que 0.06, sendo sua maior magnitude no dia 28/07, onde o valor encontrado foi de -0.05798. Nota-se também que a correlação entre as volatilidades de maior valor absoluto foi no dia 30/07, com um valor de 0.221.

5.2. Análise da correlação dos retornos e das volatilidades

Serão analisados os valores da correlação tanto dos retornos quanto da volatilidade, ambos observados minuto a minuto, dos ativos Bitcoin do índice Ibovespa, para todos os dias observados nas amostras das últimas semanas de janeiro, março, maio e julho de 2020. Nas tabelas 13 e 14, estão as correlações descritas.

Tabela 13 - Correlação dos retornos e volatilidade do Bitcoin e do índice Ibovespa (jan - mar / 2020).

Estatística \ Amostra	IBV-01 e	IBV-02 e	IBV-03 e	IBV-04 e	IBV-05 e	IBV-06 e	IBV-07 e	IBV-08 e	IBV-09 e	IBV-10 e
	BTC-01	BTC-02	BTC-03	BTC-04	BTC-05	BTC-06	BTC-07	BTC-08	BTC-09	BTC-10
	27-jan	28-jan	29-jan	30-jan	31-jan	23-mar	24-mar	25-mar	26-mar	27-mar
Correl. Dos Retornos	0.008	-0.013	-0.079	-0.035	-0.045	0.359	-0.036	0.098	-0.052	-0.061
Correl. Das Vol.	0.018	0.045	0.175	-0.187	-0.121	0.050	0.084	0.035	0.171	-0.178

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 14 - Correlação entre os retornos e volatilidade do Bitcoin e do índice Ibovespa (mai - jul / 2020).

Amostra Estatística	IBV-11 e	IBV-12 e	IBV-13 e	IBV-14 e	IBV-15 e	IBV-16 e	IBV-17 e	IBV-18 e	IBV-19 e	IBV-20 e
	BTC-11 25-mai	BTC-12 26-mai	BTC-13 27-mai	BTC-14 28-mai	BTC-15 29-mai	BTC-16 27-jul	BTC-17 28-jul	BTC-18 29-jul	BTC-19 30-jul	BTC-20 31-jul
Correl. Dos Retornos	-0.027	0.027	0.031	0.030	-0.051	-0.042	-0.058	0.004	0.011	0.001
Correl. Das Vol.	0.006	-0.222	0.421	0.044	-0.093	-0.100	-0.024	-0.027	0.221	0.025

Fonte: Elaboração própria.

Observa-se que ambas as correlações das volatilidades e dos retornos, possuem valores positivos e negativos para os dias observados. A média da correlação entre os retornos dos ativos foi de 0.004, enquanto a média da correlação entre a volatilidade dos ativos foi de 0.017.

Um ponto importante a se notar, é que em alguns dias, como em 23 de março, a volatilidade observada foi muito maior que a média, fato que pode ser útil para o investidor, dado que sua exposição a ambos os ativos pode apresentar um risco maior do que poderia ser percebido sem analisar mais a fundo a correlação entre eles.

Outro ponto que deve ser analisado é que no dia 27 de maio, a correlação entre as volatilidades teve seu valor mais alto, de 0.421, o que pode indicar que houve um ou mais fatores macroeconômicos comuns a ambos os ativos que impactam as volatilidades nesse dia.

Vale ressaltar que a correlação ter sua média positiva entre ambos o Bitcoin e o Ibovespa, tanto para suas séries de retornos quanto para suas séries de volatilidade, pode indicar que ambos os ativos estão sujeitos a riscos comuns ao mercado de capitais, e portanto esse risco e a correlação entre eles deve ser analisada a fundo para formar um portfólio otimizado para o risco conjunto entre esses ativos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi observar os modelos estimados para prever a volatilidade de ativos financeiros designados como Criptomoeda Bitcoin, que recentemente ganhou notoriedade e possui a característica de ser mais volátil que ativos convencionais. Utilizando o índice de lucratividade do mercado acionário Ibovespa, representado aqui pelo índice de lucratividade do mercado acionário brasileiro, como referência para comparação da volatilidade. Apesar de ser um ativo financeiro recente nos mercados financeiros, muitas pesquisas têm procurado estimar a volatilidade do Bitcoin e de outras criptomoedas. Assim, este trabalho procurou observar similaridades entre dois tipos muito distintos de ativos financeiros. Dessa forma, foi possível utilizar as séries temporais de retornos de Bitcoin e do índice Ibovespa para analisar mais a fundo os retornos e as volatilidades minuto a minuto das séries, e estimar com modelos da família ARCH suas volatilidades.

Para se obter um modelo de volatilidade adequado para cada amostra foram estimados muitos modelos da família ARCH, com diferentes parâmetros e distribuições de probabilidade para os retornos das cotações dos preços do Bitcoin e do índice Ibovespa. Foi possível perceber que os modelos GARCH e EGARCH foram selecionados para a maioria das amostras dos ativos financeiros estudados. Além disso, cabe ressaltar adequação na maior parte das amostras de séries temporais de retornos estudadas, tanto do Bitcoin como do Ibovespa, da distribuição de probabilidade t de Student, com diferentes graus de liberdade. Por fim, no que se refere a associação entre as séries temporais das volatilidades dos retornos, dada pelo coeficiente de correlação de Pearson, do Bitcoin e do Ibovespa para cada amostra foi positiva, o que indica que podem existir fatores macroeconômicos comuns que impactam a volatilidade de ambos os ativos estudados.

Uma possível continuação para este trabalho, seria explorar se existe uma causa comum para momentos onde o retorno dos ativos apresentou uma alta correlação, como foi no dia 23/03, com um valor de 0,35, valor alto para os padrões de séries temporais de retornos de ativos financeiros. Outra possibilidade também, seria identificar se há uma relação entre a volatilidade dos retornos minuto a minuto e suas características, e a volatilidade dos retornos diários desses ativos aqui estudados. Deve-se acrescentar que a estimação de modelos de volatilidade GARCH multivariados, a utilização de outros ativos como referência para comparação e a utilização de outras amostras podem vir a permitir outras inferências interessantes sobre o comportamento da volatilidade das criptomoedas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHOI, F; PREUDHOMME, G.; SIRANART N.; SONG, R.; WRIGHT, D. High Frequency Algorithmic Trading. 2017. 15 f. MS&E 448 - Big Financial Data for Algorithmic Trading, Final Paper Report, University of Stanford, California.
<http://stanford.edu/class/msande448/2017/Final/Reports/gr2.pdf>

Acessado por último em 18/04/2022

CONRAD, C.; CUSTOVIC, A.; GHYSELS, E. Long- and Short-Term Cryptocurrency Volatility Components: a garch-midas analysis. Journal Of Risk And Financial Management, v. 11, n. 2, p. 23, 2018.

<http://dx.doi.org/10.3390/jrfm11020023>.

DHAMIJA, A.; BHALLA, V. Financial Time Series Forecasting : Comparison Of Various Arch Models. Global Journal of Finance and Management, Delhi, India, v. 2, n. 12010, p. 159-172, 2010.

ENGLE, R. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica, vol. 50, no. 4, p. 987, 1982

<https://doi.org/10.2307/1912773>.

GALDI, C.; PEREIRA, M. Valor em Risco (VaR) utilizando modelos de previsão de volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica. Brazilian Business Review, v. 4, n. 1, p. 10-20, 2007.

GUJARATI, D.; PORTER, D. Econometria Básica, 5 ed., McGraw-Hill, 2011.

HUQ, M.; ALI, A.; Comparing the Performances of Garch-type Models in Capturing the Broad Index Volatility in Dhaka Stock Exchange. Zenodo, v. 6, n. 6, p. 81-89, 2018.

KERMA, A.; Comparing the forecasting performance of different GARCH models in international markets. Dissertação de Mestrado, Curso de Msc In Financial Engineering & Risk Management, University of Essex, Colchester, 2017.

MÜLLER, A.; DACORAGNA, M.; DAVÉ, R.; OLSEN, R.; PICTET, O.; WEIZSÄCKER, J.; “Volatilities of Different Time Resolutions — Analyzing the Dynamics of Market Components.” *Journal of Empirical Finance*, v. 4, n. 2–3, pp. 213–239, 1997.

[https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(97\)00007-8](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(97)00007-8).

PEZZULLO, J. C. The symmetry and shape of data distributions often seen in biostatistics, 2016. In: PEZZULLO, John C. *Biostatistics for Dummies. For Dummies*, a Wiley Brand, 2013.

QUIROZ-GUTIERREZ, M.; Crypto is fully banned in China and 8 other countries; *Fortune*, 2022; Disponível em: <https://fortune.com/2022/01/04/crypto-banned-china-other-countries/>; Acessado por último em 10/11/2022

SALLES, A. Notas de Aula – Séries temporais – introdução aos modelos de previsão, Escola Politécnica / Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

SILVA, A.; ARAÚJO, A.; FRIAS, P.; VILELA, M.; BONFIM, C.; Auto-Regressive Integrated Moving Average Model (ARIMA): conceptual and methodological aspects and applicability in infant mortality. *Revista Brasileira de Saúde Materno Infantil*, [S.L.], v. 21, n. 2, p. 647-656, 2021.

<http://dx.doi.org/10.1590/1806-93042021000200016>

VOSS, C.; Are Bitcoin transactions anonymous and traceable?; *Cointelegraph*, 2022; Disponível em:

[https://cointelegraph.com/explained/are-bitcoin-transactions-anonymous-and-traceable](https://cointelegraph.com/explained/are-bitcoin-transactions-anonymous-and-traceable;);

Acessado por último em 10/11/ 2022

WANG, Y.; WEI, Y.; WU, C.; YIN, L.; Oil and the short-term predictability of stock return volatility. *Journal of Empirical Finance*, v. 47, p. 90-104, 2018.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jempfin.2018.03.002>.

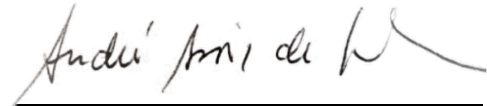
**ESTIMAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE PARA RETORNOS DE
ALTA FREQUÊNCIA DE ATIVOS FINANCEIROS**

Bruno Vaz Furtado

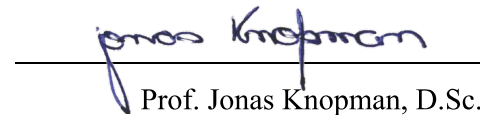
Pedro Henrique Paracampos Coelho

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO.

Examinado por:



Prof. André Assis de Salles, D.Sc.



Prof. Jonas Knopman, D.Sc.

Documento assinado digitalmente
gov.br ROSEMARIE BROKER BONE
Data: 27/11/2022 19:37:20-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Rosemarie Broker Bone, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Novembro de 2022